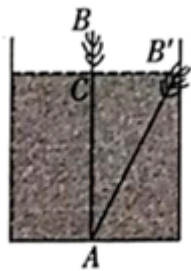


6. 《九章算术》勾股章有一“引葭赴岸”问题“今有饼池径丈，葭生其中，出水两尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深，葭各几何？”，其意思是：有一个直径为一丈的圆柱形水池，池中心生有一颗类似芦苇的植物，露出水面两尺，若把它引向岸边，正好与岸边齐，问水有多深，该植物有多高？其中一丈等于十尺，如图若从该葭上随机取一点，则该点取自水下的概率为（ ）

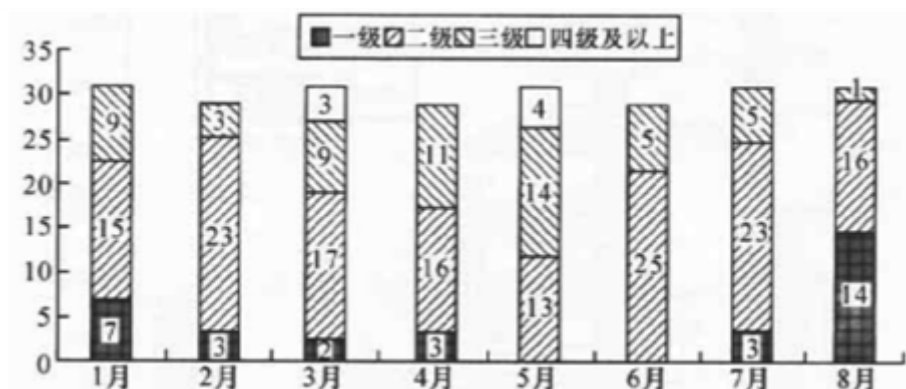


- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{13}{14}$ C. $\frac{21}{29}$ D. $\frac{14}{15}$

7. 已知函数 $f(x) = \frac{e \ln x}{x^2}$ ，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{3}{4})$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

8. 随着人民生活水平的提高，对城市空气质量的关注度也逐步增大，下图是某城市 1 月至 8 月的空气质量检测情况，图中一、二、三、四级是空气质量等级，一级空气质量最好，一级和二级都是质量合格天气，下面叙述不正确的是 ()



- A. 1 月至 8 月空气合格天数超过 20 天的月份有 5 个
 B. 第二季度与第一季度相比，空气达标天数的比重下降了
 C. 8 月是空气质量最好的一个月
 D. 6 月份的空气质量最差.

9. 命题 p : 存在实数 x_0 ，对任意实数 x ，使得 $\sin(x + x_0) = -\sin x$ 恒成立; q : $\forall a > 0$ ， $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$ 为奇函数，则下列命题是真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \vee (\neg q)$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge q$

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

(Ⅱ) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的值域 (其中 e 为自然对数的底数).

20. (12 分) 随着科技的发展, 网络已逐渐融入了人们的生活. 网购是非常方便的购物方式, 为了了解网购在我市的普及情况, 某调查机构进行了有关网购的调查问卷, 并从参与调查的市民中随机抽取了男女各 100 人进行分析, 从而得到表 (单位: 人)

	经常网购	偶尔或不用网购	合计
男性	50		100
女性	70		100
合计			

(1) 完成上表, 并根据以上数据判断能否在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为我市市民网购与性别有关?

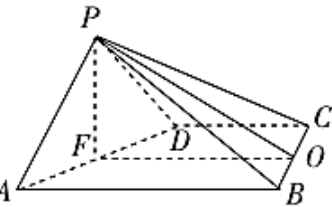
(2) ①现从所抽取的女市民中利用分层抽样的方法抽取 10 人, 再从这 10 人中随机选取 3 人赠送优惠券, 求选取的 3 人中至少有 2 人经常网购的概率;

②将频率视为概率, 从我市所有参与调查的市民中随机抽取 10 人赠送礼品, 记其中经常网购的人数为 X , 求随机变量 X 的数学期望和方差.

参考公式:
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq K_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

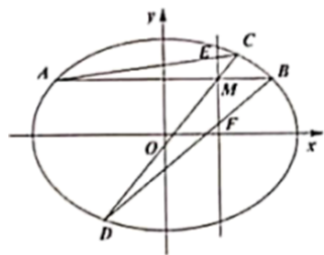
21. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \perp BC$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $BC = CD = 2$, $PA = PD$, 点 F 、 O 分别为 AD , BC 的中点, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 求证: $BC \perp$ 平面 POF .

(2) 若 $PF = \sqrt{3}$, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 如图, 过点 $M(2,2)$ 且平行与 x 轴的直线交椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = m (m > 0)$ 于 A 、 B 两点, 且 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 M 且斜率为正的直线交椭圆于点 C 、 D , 直线 AC 、 BD 分别交直线 $x=2$ 于点 E 、 F , 求证: $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

首先求得 $z = -1 + 2i$, 然后根据复数乘法运算、共轭复数、复数的模、复数除法运算对选项逐一分析, 由此确定正确选项.

【详解】

由题意知复数 $z = -1 + 2i$, 则 $z \cdot i = (-1 + 2i) \cdot i = -2 - i$, 所以 A 选项不正确; 复数 z 的共轭复数是 $-1 - 2i$, 所以 B 选项不正确; $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 所以 C 选项不正确; $\frac{z}{1+i} = \frac{-1+2i}{1+i} = \frac{(-1+2i) \cdot (1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 所以 D 选项正确.

故选: D

【点睛】

本小题考查复数的几何意义, 共轭复数, 复数的模, 复数的乘法和除法运算等基础知识; 考查运算求解能力, 推理论证能力, 数形结合思想.

2、D

【解析】

利用 $f(x)$ 是偶函数化简 $f(\log_3 0.3)$, 结合 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 比较出三者的大小关系.

【详解】

Q $f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(\log_3 0.3) = f(-\log_3 \frac{10}{3}) = f(\log_3 \frac{10}{3})$,

而 $\log_3 \frac{10}{3} > 1 > 2^{-0.3} > 2^{-0.4} > 0$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减,

$\therefore f(\log_3 \frac{10}{3}) < f(2^{-0.3}) < f(2^{-0.4})$,

即 $f(\log_3 0.3) < f(2^{-0.3}) < f(2^{-0.4})$.

故选:D

【点睛】

本小题主要考查利用函数的奇偶性和单调性比较大小, 属于基础题.

3、A

【解析】

确定函数的奇偶性, 排除两个选项, 再求 $x = \pi$ 时的函数值, 再排除一个, 得正确选项.

【详解】

分析知, 函数 $y = \frac{\sin(-x)}{x}$ ($x \in [-\pi, 0)$ 或 $x \in (0, \pi]$) 为偶函数, 所以图象关于 y 轴对称, 排除 B, C,

当 $x = \pi$ 时, $\frac{\sin x}{x} = 0$, 排除 D,

故选: A.

【点睛】

本题考查由函数解析式选择函数图象, 解题时可通过研究函数的性质, 如奇偶性、单调性、对称性等, 研究特殊的函数的值、函数值的正负, 以及函数值的变化趋势, 排除错误选项, 得正确结论.

4、C

【解析】

设 B_1B 的中点为 H , 利用正方形和正方体的性质, 结合线面垂直的判定定理可以证明出 $BM \perp$ 平面 DCH , 这样可以确定动点 P 的轨迹, 最后求出动点 P 的轨迹的长度.

【详解】

设 B_1B 的中点为 H , 连接 CH, DH , 因此有 $CH \perp BM$, 而 $DC \perp MB$, 而 $DC, CH \subset$ 平面 CDH ,

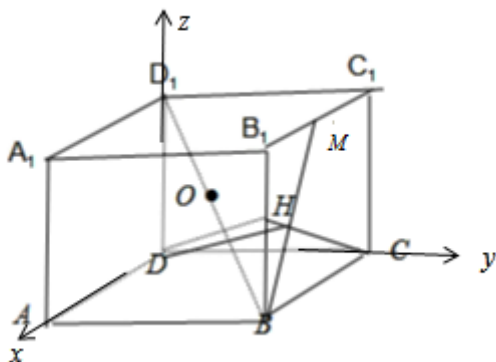
$DC \cap CH = C$, 因此有 $BM \perp$ 平面 DCH , 所以动点 P 的轨迹平面 DCH 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的交线. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 所以内切球 O 的半径为 $R = 1$, 建立如下图所示的以 D 为坐标原点的空间直角坐标系:

因此有 $O(1,1,1), C(0,2,0), H(2,2,1)$ ，设平面 DCH 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，所以有

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \vec{DC} \\ \vec{m} \perp \vec{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, -2), \text{ 因此 } O \text{ 到平面 } DCH \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OD}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以截面圆的半径为: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，因此动点 P 的轨迹的长度为 $2\pi r = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$ 。

故选: C



【点睛】

本题考查了线面垂直的判定定理的应用，考查了立体几何中轨迹问题，考查了球截面的性质，考查了空间想象能力和数学运算能力.

5、A

【解析】

根据 $|OF| = 1$ 可知 $y^2 = 4x$ ，再利用抛物线的焦半径公式以及三角形面积公式求解即可.

【详解】

由题意可知抛物线方程为 $y^2 = 4x$ ，设点 $M(x_1, y_1)$ 点 $N(x_2, y_2)$ ，则由抛物线定义知， $|MN| = |MF| + |NF| = x_1 + x_2 + 2$ ，

$|MN| = 8$ 则 $x_1 + x_2 = 6$ 。

由 $y^2 = 4x$ 得 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$ 则 $y_1^2 + y_2^2 = 24$ 。

又 MN 为过焦点的弦，所以 $y_1 y_2 = -4$ ，则 $|y_2 - y_1| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} = 4\sqrt{2}$ ，所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_2 - y_1| = 2\sqrt{2}$ 。

故选: A

【点睛】

本题考查抛物线的方程应用，同时也考查了焦半径公式等.属于中档题.

6、C

【解析】

由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$ ， 在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程可解得 x ， 然后由

$$P = \frac{x}{x+2} \text{ 得出答案.}$$

【详解】

解： 由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$

在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程得： $5^2 + x^2 = (x+2)^2$ ， 解得 $x = \frac{21}{4}$

$$\text{所以从该葭上随机取一点， 则该点取自水下的概率为 } P = \frac{x}{x+2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}+2} = \frac{21}{29}$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何概型中的长度型， 属于基础题.

7、 C

【解析】

求导， 先求出 $f(x)$ 在 $x \in (0, \sqrt{e})$ 单增， 在 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 单减， 且 $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ 知设 $f(x) = t$ ， 则方程

$$[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0 \text{ 有 4 个不同的实数根等价于方程}$$

$t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根， 再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

$$\text{依题意, } f'(x) = \frac{\frac{e}{x} \cdot x^2 - 2xe \ln x}{x^4} = \frac{e(1 - 2 \ln x)}{x^3},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } \ln x = \frac{1}{2}, \quad x = \sqrt{e}, \text{ 故当 } x \in (0, \sqrt{e}) \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{当 } x \in (\sqrt{e}, +\infty), \quad f'(x) < 0, \text{ 且 } f(\sqrt{e}) = \frac{e \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2},$$

故方程 $t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根，

$$\text{故} \begin{cases} \Delta > 0 \\ (t_1 - \frac{1}{2})(t_2 - \frac{1}{2}) > 0 \\ 0 < t_1 + t_2 < 1 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}, \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{8} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

解得 $m \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$.

故选：C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法：

- (1)构造法：构造函数 $g(x)$ ($g'(x)$ 易求， $g'(x)=0$ 可解)，转化为确定 $g(x)$ 的零点个数问题求解，利用导数研究该函数的单调性、极值，并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等，画出 $g(x)$ 的图象草图，数形结合求解；
- (2)定理法：先用零点存在性定理判断函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

8、D

【解析】

由图表可知5月空气质量合格天气只有13天，5月份的空气质量最差. 故本题答案选D.

9、A

【解析】

分别判断命题 p 和 q 的真假性，然后根据含有逻辑联结词命题的真假性判断出正确选项.

【详解】

对于命题 p ，由于 $\sin(x+\pi)=-\sin x$ ，所以命题 p 为真命题.对于命题 q ，由于 $a>0$ ，由 $\frac{a+x}{a-x}>0$ 解得

$-a<x<a$ ，且 $f(-x)=\ln\frac{a-x}{a+x}=\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{a+x}{a-x}=-f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数，故 q 为真命题.所以 $p\wedge q$

为真命题. $(\neg p)\vee(\neg q)$ 、 $p\wedge(\neg q)$ 、 $(\neg p)\wedge q$ 都是假命题.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查诱导公式，考查函数的奇偶性，考查含有逻辑联结词命题真假性的判断，属于基础题.

10、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/967115103164006063>