2024~2025学年第一学期期中调研试卷

高二数学

（满分150分，考试时间120分钟）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 直线$x-\sqrt{3}y+1=0$的倾斜角为（）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】求出斜率即可求解.

由$x-\sqrt{3}y+1=0$，可知直线斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\theta\in[0,\pi)$，

所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，

故选：A

2. 圆$x^2+y^2+10x+10y=0$与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=18$的位置关系为（）

A. 外离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，求出两圆的圆心距，再结合圆与圆位置关系的判断方法，即可求解.

因为圆$C_1:x^2+y^2+10x+10y=0$的圆心为$C_1(-5,-5)$，半径为$r_1=5\sqrt{2}$，

圆$C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=18$的圆心为$C_2(3,3)$，半径为$r_2=3\sqrt{2}$，

$\therefore|C_1C_2|=\sqrt{(3+5)^2+(3+5)^2}=8\sqrt{2}=r_1+r_2$，

所以两圆外切.

故选：B.

3. 已知点$A(2,3)$与点$B(-1,4)$关于直线对称，则直线的方程为（）

A. $3x-y+2=0$　　B. $x+3y+2=0$

C. $x+3y-2=0$　　D. $3x-y-2=0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据对称关系得出直线斜率及直线所过的点即可得解.

因为$k_{AB}=\frac{4-3}{-1-2}=-\frac{1}{3}$，所以$k_l=3$，

又A,B的中点$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$在直线$l$上，

所以直线l的方程为$y-\frac{7}{2}=3\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$3x-y+2=0$，

故选：A

4. 设a为实数，若直线$ax-4y+3=0$与$x-2y+1=0$平行，则它们之间的距离为（）

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两直线平行的充要条件求出a，再根据两平行间的距离公式求解.

由题意，$\frac{a}{1}=\frac{-4}{-2}\neq\frac{3}{1}$，解得$a=2$，

所以直线$2x-4y+3=0$，即$x-2y+\frac{3}{2}=0$与直线$x-2y+1=0$间的距离为$\frac{\left|\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

故选：A.

5. 已知椭圆的两个焦点分别为$(0,3)$，$(0,-3)$，点$\left(\frac{7}{4},-3\right)$在该椭圆上，则该椭圆的离心率为（）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据椭圆的定义求出$2a$，再由焦点坐标求出c，求出离心率即可.

设椭圆的两个焦点为$F_1\left(0,-3\right)$，$F_2\left(0,3\right)$，点$P\left(\frac{7}{4},-3\right)$，

则$c=3$，$2a=\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{4}-0\right)^2+\left(-3+3\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{7}{4}-0\right)^2+\left(-3-3\right)^2}=8$，

$\therefore a=4$，所以椭圆的离心率为$e=\frac{3}{4}$.

故选：C.

6. 椭圆C以双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点为长轴的端点，以双曲线的顶点为焦点，则椭圆C的方程为（）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

【答案】C

【解析】

【分析】由双曲线方程确定焦点坐标及顶点坐标，进而可求解.

由$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

可得其焦点坐标为：$\left(\pm5,0\right)$，顶点坐标$\left(\pm4,0\right)$

所以椭圆长轴端点坐标：$\left(\pm5,0\right)$，焦点坐标为$\left(\pm4,0\right)$，

所以椭圆方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，

故选：C

7. 过抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点F的弦AB，其中点A在第一象限，若$AF=4BF$，则直线AB的斜率为（）

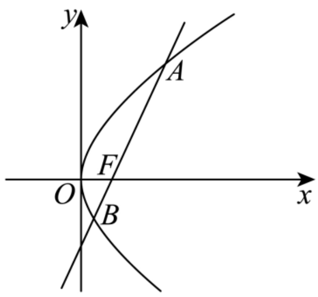
A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)(x_1>0,y_1>0)$，根据$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$可得$y_1=-4y_2$，设直线方程联立抛物线，由根与系数关系得出$y_2$，即而求出B点，根据斜率公式求解即可.

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)(x_1>0,y_1>0,x_2>0,y_2<0)$，



由 $AF=4BF$，可得 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，即 $\left(\dfrac{p}{2}-x_1,-y_1\right)=4\left(x_2-\dfrac{p}{2},y_2\right)$

$\therefore y_1=-4y_2$，

设直线方程为：$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，

$\begin{cases}y^2=2px\\ y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\end{cases}$，$y^2-\dfrac{2p}{k}y-p^2=0$，

$\therefore y_1\cdot y_2=-p^2$，

$\therefore y_2=-\dfrac{p}{2}$，$x_2=\dfrac{p}{8}$

$\therefore k_{AB}=\dfrac{-\dfrac{p}{2}-0}{\dfrac{p}{8}-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{4}{3}$

故选：D

8. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的上顶点为A，过椭圆左焦点 F 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线交椭圆于 B，C 两点，则∨ABC 的周长为（）

A. 10　　B. 8　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】取椭圆的右焦点 F_2，易证直线 BC 是线段 AF_2 的垂直平分线，可得 $\left|AC\right|=\left|CF_2\right|$，$\left|AB\right|=\left|BF_2\right|$，结合椭圆的定义求得答案.

由椭圆方程可得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，则 $c=1$，

如图，取椭圆的右焦点F_2，连接AF, AF_2, CF_2, BF_2，

则$|AF| = |AF_2| = |FF_2| = 2$，即$\triangle AFF_2$为正三角形，

又直线BC的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则直线BC的倾斜角为30°，即$\angle CFF_2 = 30^{\circ}$，

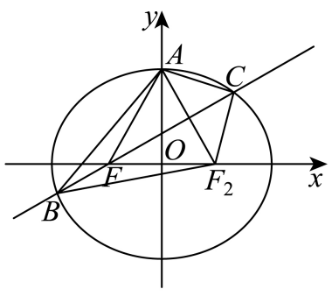
所以直线BC是线段AF_2的垂直平分线，

所以$|AC| = |CF_2|$，$|AB| = |BF_2|$，

所以$\triangle ABC$的周长为$l = |AB| + |AC| + |BC| = |BF_2| + |BC| + |CF_2|$

$= |BF_2| + |BF| + |CF| + |CF_2| = 4a = 8$.

故选：B.



二、选择题：本题共 3 小题．每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 设m为实数，直线：$x + my - 2m - 1 = 0$，点$M(2,3)$，$N(4,-5)$，则下列说法正确的有（）

A. 直线过定点$(1,2)$

B. 若点M，N到直线的距离相等，则$m = \dfrac{2}{3}$

C. 直线与x轴一定相交

D. 若直线不过第二象限，则$-\dfrac{1}{2} \le m < 0$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据直线过定点的求法判断 A，由特殊情况直线与两点连线平行判断 B，分析直线不能写成$y = b$的形式判断 C，取特例$m = 0$判断 D.

由直线：$x + my - 2m - 1 = 0$，可得$x - 1 + m(y - 2) = 0$，

当 $x-1=0, y-2=0$，即 $x=1, y=2$ 时，方程恒成立，

即直线过定点 $\left(1,2\right)$，故 A 正确；

当直线与 MN 平行（或重合）或直线过 MN 的中点时，点 M，N 到直线的距离相等，

由 $k_{MN}=\dfrac{-5-3}{4-2}=-4$，可知 $m=\dfrac{1}{4}$ 时，直线为 $4x+y-6=0$，与 MN 平行，符合题意，故 B 错误；

由直线：$x+my-2m-1=0$ 可知，直线倾斜角不可能为 0，所以一定与 x 轴相交，故 C 正确；

直线不过第二象限，当 $m=0$ 时，直线方程为 $x=1$，满足题意，故 D 错误.

故选：AC

10. 设 m 为实数，方程 $x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$ 表示圆，则下列说法正确的有（）

A. $m>-1$

B. 若 $m=\pm\dfrac{1}{2}$，则圆和两坐标轴均相切

C. 若圆关于直线 $2x-y+5=0$ 对称，则 $m=1$

D. 无论 m 取任何实数，总存在一条定直线与圆相交

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据二次方程表示圆的条件判断 A，假设与 y 轴相切求出 m 判断 B，由直线过圆心判断 C，根据圆心在直线 $y=1$ 上判断 D.

当方程 $x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$ 表示圆时，$\left(4m\right)^2+4-4\left(4m^2-m\right)>0$，解得 $m>-1$，故 A 正确；

若圆与 y 轴相切，令 $x=0$，可得 $y^2-2y+4m^2-m=0$，由 $\Delta=4-4\left(4m^2-m\right)=0$

解得 $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}>-1$，故 B 错误；

若圆关于直线 $2x-y+5=0$ 对称，则直线过圆心，由 $x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$ 可得

$\left(x+2m\right)^2+\left(y-1\right)^2=m+1$，

圆心 $\left(-2m,1\right)$ 代入直线方程，可得 $m=1$，且此时满足 $m>-1$，故 C 正确；

由 C 知，圆心为 $\left(-2m,1\right)$，即圆心在直线 $y=1$ 上，所以不论 m 取何值，$y=1$ 都过圆心，与圆相交，故 D 正确.

故选：ACD.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，过抛物线 $y^2 = 2px\left(p>0\right)$ 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，直线 AO，BO 分别交抛物线准线于 C，D 两点，则下列说法正确的有（）

A. $BC // x$ 轴

B. CF ^ DF

C. 以 AB 为直径的圆与抛物线准线恒相交

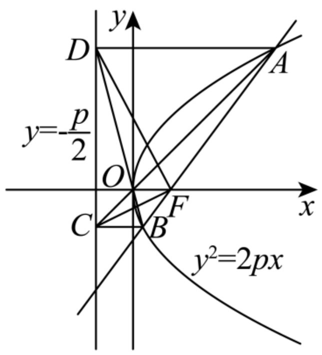
D. $\triangle OAB$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}p^2$

【答案】ABD

【解析】

【分析】设直线 $AB: x = my + \frac{p}{2}, A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$，联立方程可得韦达定理.对于 A：求点 C 的坐标，结合韦达定理分析判断；对于 B:：求点 D 的坐标，结合数量积分析判断；对于 C：根据抛物线的定义分析判断；对于 D：结合韦达定理就面积，即可判断.

由题意可知：抛物线 的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线 $x = -\frac{p}{2}$，



显然直线 AB 的斜率可以不存在，但不为 0，此时直线 AB 与抛物线必相交，

设直线 $AB: x = my + \frac{p}{2}, A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$，

联立方程 $\begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$，消去 x 可得 $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$，

可得 $y_1 + y_2 = 2pm, y_1 y_2 = -p^2$.

对于选项 A：可知直线 $OA: y = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}} x = \frac{2p}{y_1} x$，

令 $x=-\frac{p}{2}$，可得 $y=\frac{2p}{y_1}\times\left(-\frac{p}{2}\right)=-\frac{p^2}{y_1}=\frac{y_1y_2}{y_1}=y_2$，即 $C\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，

所以 $BC//x$ 轴，故 A 正确；

对于选项 B：同理可得：$D\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$，$AD//x$ 轴，

则 $\overrightarrow{FC}=\left(-p,-y_2\right),\overrightarrow{FD}=\left(-p,y_1\right)$，可得 $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=p^2+y_1y_2=p^2-p^2=0$，

所以 $CF\perp DF$，故 B 正确；

对于选项 C：因为 $|AB|=|AF|+|BF|=|AD|+|BC|$，

由梯形中位线可知：以 AB 为直径的圆的圆心到准线的距离为 $\frac{|AD|+|BC|}{2}=\frac{1}{2}|AB|$，

即圆心到准线的距离等于半径，所以以 AB 为直径的圆与抛物线准线恒相切，故 C 错误；

对于选项 D：因为 $|y_1-y_2|=\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4p^2m^2+4p^2}=2p\sqrt{m^2+1}$，

可得 $\triangle OAB$ 面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times 2p\sqrt{m^2+1}=\frac{p^2}{2}\sqrt{m^2+1}\geq\frac{1}{2}p^2$，

当且仅当 $m=0$ 时，等号成立，

所以 $\triangle OAB$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}p^2$.

故选：ABD.

【点睛】方法点睛：与圆锥曲线有关的最值问题的两种解法

（1）数形结合法：根据待求值的几何意义，充分利用平面图形的几何性质求解.

（2）构建函数法：先引入变量，构建以待求量为因变量的函数，再求其最值，常用基本不等式或导数法求最值（注意：有时需先换元后再求最值）.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设 a 为实数，直线 l_1：$ax+3y-2=0$，l_2：$x+\left(a-2\right)y+2=0$，若 $l_1\perp l_2$，则 a 的值为______.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】当两条直线垂直时，若直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直，则满足 $A_1A_2+B_1B_2=0$.我们可以根据这个定理来求解 a 的值.

对于直线$l_1: ax+3y-2=0$和$l_2: x+(a-2)y+2=0$，根据两直线垂直的定理$A_1A_2+B_1B_2=0$，则可得方程$a\times1+3\times(a-2)=0$.

对$a\times1+3\times(a-2)=0$进行求解.

$a+3a-6=0,4a=6, a=\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$.

13. 圆$x^2+y^2=r^2$上有且只有2个点到直线$x-\sqrt{3}y+2=0$的距离等于1，则半径r的取值范围为______.

【答案】$\left(0,2\right)$

【解析】

【分析】计算圆心到直线的距离为1，根据条件得到$\left|r-d\right|<1$，解得答案.

圆心$x^2+y^2=r^2$的圆心为$\left(0,0\right)$，半径为r，

圆心$\left(0,0\right)$到直线$x-\sqrt{3}y+2=0$的距离为$d=\dfrac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1$，

因为圆$x^2+y^2=r^2$上只有两个点到直线$x-\sqrt{3}y+2=0$的距离等于1，

所以$\left|r-d\right|<1$，即$\left|r-1\right|<1$，解得$0<r<2$.

故答案为：$\left(0,2\right)$.

14. 如图1所示，双曲线具有光学性质：从双曲线右焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射关线的反向延长线经过双曲线的左焦点．设$a>0$，若双曲线E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{8}=1$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，从$F_2$发出的光线经过图2中的A，$B$两点反射后，分别经过点$C$，$D$，$\cos\angle BAC=-\dfrac{3}{5}$，$AB\perp BD$，则$a$的值为______.

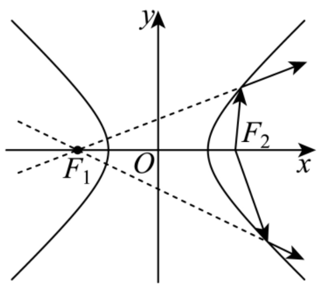


图1

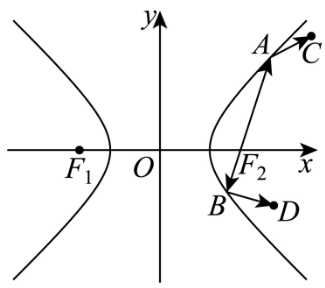


图2

【答案】3

【解析】

【分析】由双曲线的性质，结合双曲线的定义及勾股定理求解即可.

由$\cos\angle BAC=-\dfrac{3}{5}$，$AB\perp BD$，则$\cos\angle BAF_1=\dfrac{3}{5}$，$\angle ABF_1=\dfrac{\pi}{2}$，

设$\left|AF_1\right|=5t$，$t>0$，则$\left|AB\right|=3t$，$\left|BF_1\right|=4t$，

由双曲线定义得$\left|AF_2\right|=5t-2a$，$\left|BF_2\right|=4t-2a$，

$\therefore 5t-2a+4t-2a=3t$，解得$t=\dfrac{2}{3}a$，

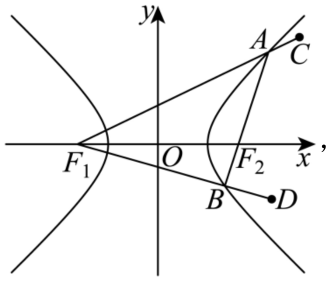
所以$\left|BF_1\right|=\dfrac{8}{3}a$，$\left|BF_2\right|=\dfrac{2}{3}a$，

在直角三角形BF_1F_2中，$\left|BF_1\right|^2+\left|BF_2\right|^2=\left|F_1F_2\right|^2$，

则$\dfrac{64}{9}a^2+\dfrac{4}{9}a^2=4c^2$，即$17a^2=9c^2$，又$b^2=8$，

$\therefore 17a^2=9\left(a^2+8\right)$，解得$a=3$.

故答案为：3.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知$\triangle ABC$的顶点$B\left(3,1\right)$，直线AC的方程为$x-y+1=0$，BC边上的中线AM所在的直线方程为$2x-3y+1=0$.

（1）求顶点A，C的坐标；

（2）求$\triangle ABC$的面积.