圆中的重要模型之四点共圆模型

四点共圆是初中数学的常考知识点，近年来，特别是四点共圆判定的题目出现频率较高。相对四点共圆性质的应用，四点共圆的判定往往难度较大，往往是填空题或选择题的压轴题，而计算题或选择中四点共圆模型的应用（特别是最值问题），通常能简化运算或证明的步骤，使问题变得简单。本文主要介绍四点共圆的四种重要模型。

目录导航

例题讲模型

模型 1. 定点定长共圆模型（圆的定义）.....1
模型 2. 定边对双直角共圆模型.....5
模型 3. 定边对定角共圆模型.....8
模型 4. 对角互补共圆模型.....11

习题练模型

例题讲模型

【知识储备】

四点共圆：若在同一平面内，有四个点在同一个圆上，则称这四个点共圆，一般简称为“四点共圆”。

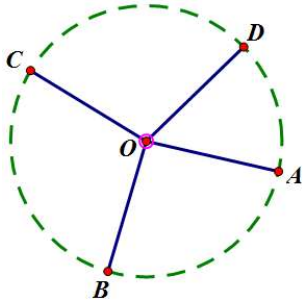
四点共圆模型是一种解题思想，但任何题目里都不会告诉你，亲爱的同学，请用四点共圆思想来解题吧。那么，我们头脑里，就要快速迭代平常积累的一些模型。

四点共圆有三个性质：(1) 共圆的四个点所连成同侧共底的两个三角形的顶角相等；(2) 圆内接四边形的对角互补；(3) 圆内接四边形的外角等于内对角。

模型 1. 定点定长共圆模型（圆的定义）

模型解读

若四个点到一定点的距离相等，则这四个点共圆。这也是圆的基本定义，到定点的距离等于定长点的集合。



模型证明

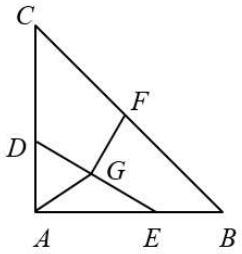
条件：如图，平面内有五个点 O、A、B、C、D，使得 $OA=OB=OC=OD$。

结论：A、B、C、D 四点共圆（其中圆心为 O）。

证明：$\because OA=OB=OC=OD$

$\therefore$ 根据圆的定义：到定点的距离等于定长点的集合为圆，确定 A、B、C、D 四点共圆。

1. (2021·浙江嘉兴·中考真题) 如图，在 ΔABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=5$，点 D 在 AC 上，且 $AD=2$，点 E 是 AB 上的动点，连结 DE，点 F，G 分别是 BC，DE 的中点，连接 AG，FG，当 $AG=FG$ 时，线段 DE 长为（　　）



A. $\sqrt{13}$　　B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$　　D. 4

【答案】A

【分析】连接 DF，EF，过点 F 作 $FN\perp AC$，$FM\perp AB$，结合直角三角形斜边中线等于斜边的一半求得点 A，D，F，E 四点共圆，$\angle DFE=90^\circ$，然后根据勾股定理及正方形的判定和性质求得 AE 的长度，从而求解.

【详解】解：连接 DF，EF，过点 F 作 $FN\perp AC$，$FM\perp AB$

$\because$ 在 ΔABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，点 G 是 DE 的中点，$\therefore AG=DG=EG$

又 $\because AG=FG$ $\therefore$ 点 A，D，F，E 四点共圆，且 DE 是圆的直径 $\therefore \angle DFE=90^\circ$

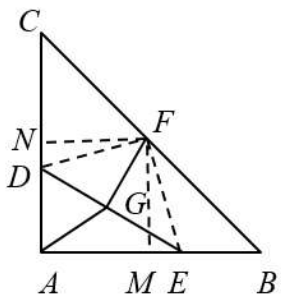
$\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，点 F 是 BC 的中点，$\therefore CF=BF=\frac{1}{2}BC=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$FN=FM=\frac{5}{2}$

又 $\because FN\perp AC$，$FM\perp AB$，$\angle BAC=90^\circ$ $\therefore$ 四边形 $NAMF$ 是正方形 $\therefore AN=AM=FN=\frac{5}{2}$

又 $\because \angle NFD+\angle DFM=90^\circ$，$\angle DFM+\angle MFE=90^\circ$ $\therefore \angle NFD=\angle MFE$

$\therefore \triangle NFD\cong\triangle MFE$ $\therefore ME=DN=AN-AD=\frac{1}{2}$ $\therefore AE=AM+ME=3$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DAE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{13}$ 故选：A.

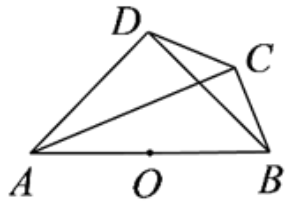


【点睛】本题考查直径所对的圆周角是 90°，四点共圆及正方形的判定和性质和用勾股定理解直角三角形，掌握相关性质定理正确推理计算是解题关键.

2. (2023·江西赣州·九年级校联考期中) 如图，点 O 为线段 AB 的中点，点 B，C，D 到点 O 的距离相等，连接

AC，BD．则下面结论不一定成立的是（　　）

A．$\angle ACB=90^\circ$　　B．$\angle BDC=\angle BAC$　　C．AC平分$\angle BAD$　　D．$\angle BCD+\angle BAD=180^\circ$

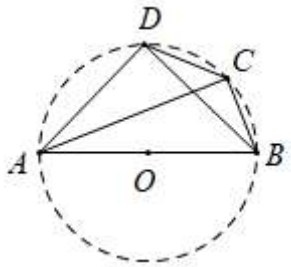


【答案】C

【分析】以点O为圆心，OA长为半径作圆．再根据圆周角定理及其推论逐项判断即可．

【详解】如图，以点O为圆心，OA长为半径作圆．由题意可知：

$OA=OB=OC=OD$．即点A、B、C、D都在圆O上．



A．由图可知AB为经过圆心O的直径，根据圆周角定理推论可知$\angle ACB=90^\circ$．故A不符合题意．

B．$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}$，所以根据圆周角定理可知$\angle BAC=\angle BDC$．故$B$不符合题意．

C．当$\overset{\frown}{BC}\neq\overset{\frown}{CD}$时，$\angle BAC\neq\angle DAC$，所以此时$AC$不平分$\angle BAD$．故$C$符合题意．

D．根据圆周角定理推论可知，$\angle BCD+\angle BAD=180^\circ$．故$D$不符合题意．故选：$C$．

【点睛】本题考查圆周角定理及其推论，充分理解圆周角定理是解答本题的关键．

3．(2023·湖北·三模) 问题背景：如图1，等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，作$AD\perp BC$于点D，则D为BC的中点，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=60^\circ$，于是$\frac{BC}{AB}=\frac{2BD}{AB}=\sqrt{3}$；

迁移应用：如图2，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰三角形，$\angle BAC=\angle DAE=120^\circ$，$D$，$E$，$C$三点在同一条直线上，连接$BD$．①求证：$\triangle ADB\cong\triangle AEC$；②请直接写出线段$AD$，$BD$，$CD$之间的等量关系式；

拓展延伸：如图3，在菱形$ABCD$中，$\angle ABC=120^\circ$，在$\angle ABC$内作射线BM，作点C关于BM的对称点E，连接AE并延长交BM于点F，连接CE，CF．证明$\triangle CEF$是等边三角形；

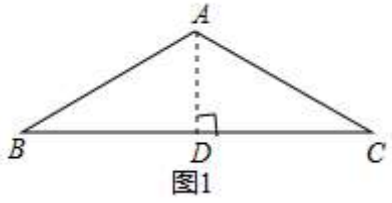


图1

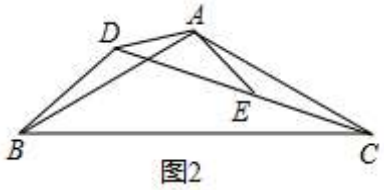


图2

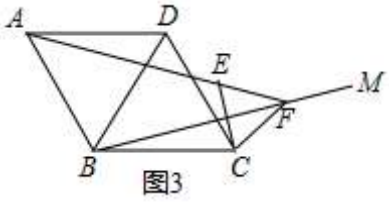


图3

【答案】迁移应用：①详见解析；②结论：$CD=\sqrt{3}AD+BD$；拓展延伸：详见解析；

【分析】迁移应用：①如图2中，只要证明$\angle DAB=\angle CAE$，即可根据SAS解决问题；

②结论：$CD=\sqrt{3}AD+BD$．由$\Delta DAB\cong\Delta EAC$，可知$BD=CE$，在$Rt\Delta ADH$中，$DH=AD\cdot\cos30^\circ=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}AD$，由 $AD=AE$，$AH\perp DE$，推出 $DH=HE$，由 $CD=DE+EC=2DH+BD=\sqrt{3}AD+BD$，即可解决问题；

拓展延伸：如图 3 中，作 $BH\perp AE$ 于 H，连接 BE．由 $BC=BE=BD=BA$，$FE=FC$，推出 A、D、E、C 四点共圆，推出 $\angle ADC=\angle AEC=120°$，推出 $\angle FEC=60°$，推出 ΔEFC 是等边三角形；

【详解】迁移应用：①证明：如图 2 $\because\angle BAC=\angle DAE=120°$，$\therefore\angle DAB=\angle CAE$，

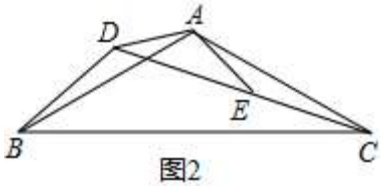


图2

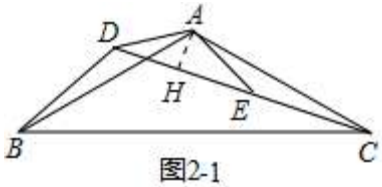


图2-1

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle EAC$ 中，$\begin{cases}DA=EA\\\angle DAB=\angle EAC\\AB=AC\end{cases}$，$\therefore\triangle DAB\cong\triangle EAC$，

②解：结论：$CD=\sqrt{3}AD+BD$．理由：如图 2－1 中，作 $AH\perp CD$ 于 H．

$\because\Delta DAB\cong\Delta EAC$，$\therefore BD=CE$，在 $Rt\Delta ADH$ 中，$DH=AD\cdot\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$，

$\because AD=AE$，$AH\perp DE$，$\therefore DH=HE$，$\therefore CD=DE+EC=2DH+BD=\sqrt{3}AD+BD$；

拓展延伸：证明：如图 3 中，连接 BE，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=120°$，

$\therefore\triangle ABD,\triangle BDC$ 是等边三角形，$\therefore BA=BD=BC$，

$\because E$、C 关于 BM 对称，$\therefore BC=BE=BD=BA,FE=FC$，

$\therefore A$、D、E、C 四点共圆，$\therefore\angle ADC=\angle AEC=120°$，

$\therefore\angle FEC=60°$，$\therefore\triangle EFC$ 是等边三角形；

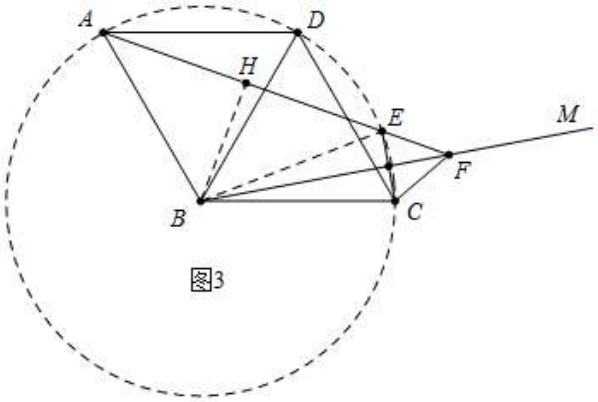


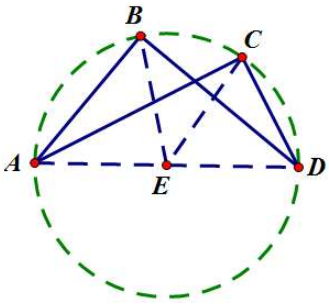
图3

【点睛】本题考查全等三角形的判定和性质、等腰三角形的性质、四点共圆、等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活应用所学知识解决问题，学会添加辅助圆解决问题，属于中考压轴题．

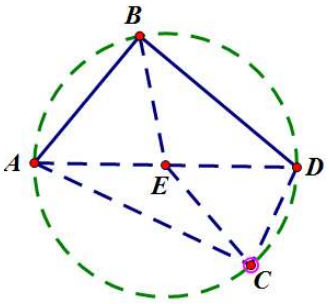
模型 2. 定边对双直角共圆模型

模型解读

定边对双直角模型：一定边所对的角为两个直角，分同侧型和异侧型两种情况进行讨论。



同侧型



异侧型

模型证明

1) 定边对双直角模型 (同侧型)

条件: 若平面上 A、B、C、D 四个点满足 $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$,

结论: A、B、C、D 四点共圆,其中 AD 为直径。

2) 定边对双直角模型 (异侧型)

条件: 若平面上 A、B、C、D 四个点满足 $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$,

结论: A、B、C、D 四点共圆,其中 AD 为直径。

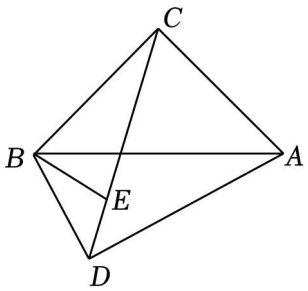
注意: 由于同侧型与异侧型证明相同,故下面证明一次即可。

证明: 取 AD 的中点为 E,连结 BE, CE。 $\because \angle ABD=\angle ACD=90^\circ$, $BE=CE=\frac{1}{2}AD=AE=ED$,

$\therefore$ 根据圆的定义:到定点的距离等于定长点的集合为圆,确定 A、B、C、D 四点共圆。

模型运用

4. (2024·陕西西安·模拟预测) 如图,线段 $AB=10$,以 AB 为斜边构造等腰直角 $\triangle ABC$ 和直角 $\triangle ABD$, C、D 在 AB 两侧, BE 平分 $\angle ABD$ 交 CD 于点 E,则 $\frac{CE}{CD}$ 的最小值为 _____.



【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$/$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】本题考查了三角形的内心、等腰直角三角形的性质、四点共圆、圆周角定理、等腰三角形的判定等知识;证出 A, C, B, D 共圆, E 为 $\triangle ABD$ 的内心,则 $CB=CE=CA=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=5\sqrt{2}$,故当 CD 为该圆直径时, CD 最大 $=AB=10$,即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 以 AB 为斜边构造等腰直角 $\triangle ABC$ 和直角 $\triangle ABD$,

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=90^\circ$, $\angle BAC=\angle ABC=45^\circ$, $\therefore \angle ACB+\angle ADB=180^\circ$, $\therefore A$, C, B, D 共圆,

$\therefore \angle ADC=\angle ABC=45^\circ$, $\angle BDC=\angle BAC=45^\circ$, $\therefore \angle ADC=\angle BDC$, $\therefore CD$ 平分 $\angle ADB$,

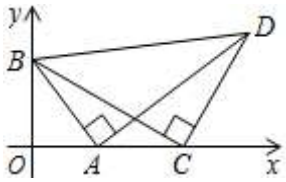
$\because BE$ 平分 $\angle ABD$, $\therefore E$ 为 $\triangle ABD$ 的内心, $\therefore \angle ABE=\angle DBE$,

$\therefore \angle CBE=\angle ABC+\angle ABE=45^\circ+\angle ABE$, $\angle CEB=\angle BDC+\angle DBE=45^\circ+\angle DBE$,

$\therefore \angle CBE=\angle CEB$，$\therefore CB=CE=CA=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=5\sqrt{2}$，$\therefore$ 当 CD 为该圆直径时，CD 最大 $=AB=10$，

$\therefore \frac{CE}{CD}$ 的最小值为 $\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. (2023·山东烟台·九年级统考期中) 如图，平面直角坐标系中，点 A、B 坐标分别为 $(3,0)$、$(0,4)$，点 C 是 x 轴正半轴上一点，连接 BC. 过点 A 垂直于 AB 的直线与过点 C 垂直于 BC 的直线交于点 D，连接 BD，则 $\frac{BO}{AB}$ 的值是 _____.

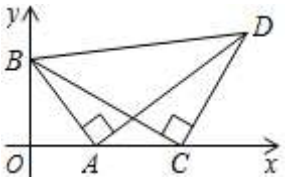


【答案】$\frac{4}{5}$

【分析】根据图形的特点证明 $\angle BDC=\angle BAO$，故可出 $\frac{BO}{AB}$ 的值.

【详解】$\because BA\perp AD$，$BC\perp CD$ $\therefore \angle BAD=\angle BCD=90^\circ$

$\therefore A$、B、C、D 四点共圆 $\therefore \angle BDA=\angle BCA$



$\because \angle BDA+\angle DBA=\angle BCA+\angle CBO=90^\circ$ $\therefore \angle DBA=\angle CBO$

$\therefore \angle DBA-\angle CBA=\angle CBO-\angle CBA$ 即 $\angle DBC=\angle ABO$

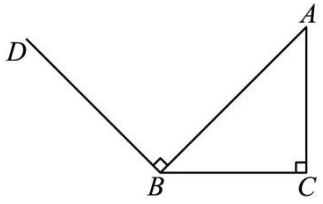
又 $\angle DBC+\angle BDC=\angle ABO+\angle BAO=90^\circ$ $\therefore \angle BDC=\angle BAO$

$\because$ 点 A、B 坐标分别为 $(3,0)$、$(0,4)$，

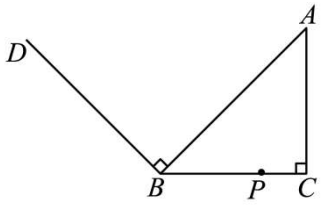
$\therefore BO=4$，$OA=3$，$AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$ $\therefore \frac{BO}{AB}=\frac{4}{5}$ 故答案为：$\frac{4}{5}$.

【点睛】此题考查三角函数的求解，解题的关键是熟知四点共圆的性质、勾股定理及三角函数的求解方法.

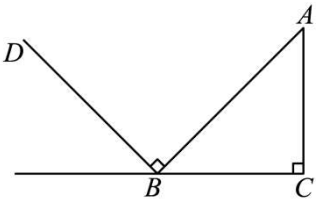
6. (2023·贵州·统考中考真题) 如图①，小红在学习了三角形相关知识后，对等腰直角三角形进行了探究，在等腰直角三角形 ABC 中，$CA=CB$，$\angle C=90^\circ$，过点 B 作射线 $BD\perp AB$，垂足为 B，点 P 在 CB 上.



图①



图②



图③

(1)【动手操作】如图②，若点 P 在线段 CB 上，画出射线 PA，并将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E，根据题意在图中画出图形，图中 $\angle PBE$ 的度数为 _____ 度；

(2)【问题探究】根据 (1) 所画图形，探究线段 PA 与 PE 的数量关系，并说明理由；

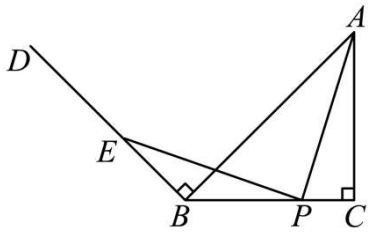
(3)【拓展延伸】如图③，若点 P 在射线 CB 上移动，将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E，探究线段 BA，BP，BE 之间的数量关系，并说明理由.

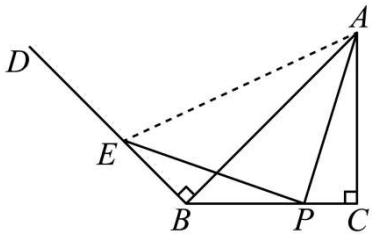
【答案】(1) 作图见解析；135 (2)$PA=PE$；理由见解析 (3)$BA-BE=\sqrt{2}BP$ 或 $BE=BA+\sqrt{2}BP$；理由见解析

【分析】(1) 根据题意画图即可；先求出 $\angle ABC=\angle BAC=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$，根据 $\angle ABD=90^\circ$，求出 $\angle CBE=\angle ABC+\angle ABE=45^\circ+90^\circ=135^\circ$；(2) 根据 $\angle APE=90^\circ$，$\angle ABE=90^\circ$，证明 A、P、B、E 四点共圆，得出 $\angle AEP=\angle ABP=45^\circ$，求出 $\angle AEP=\angle EAP$，根据等腰三角形的判定即可得出结论；

(3) 分两种情况，当点 P 在线段 BC 上时，当点 P 在线段 BC 延长线上时，分别画出图形，求出 BA,BP,BE 之间的数量关系即可.

【详解】(1) 解：如图所示：$\because CA=CB,\angle C=90^\circ$，$\therefore \angle ABC=\angle BAC=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$，





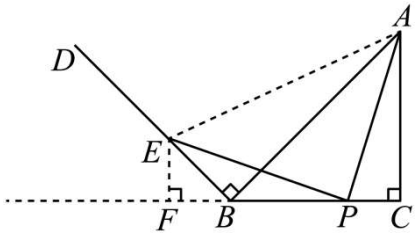
$\because BD\perp AB$，$\therefore \angle ABD=90^\circ$，$\therefore \angle CBE=\angle ABC+\angle ABE=45^\circ+90^\circ=135^\circ$；故答案为：135.

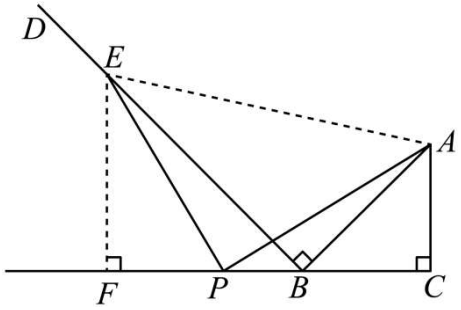
(2) 解：$PA=PE$；理由如下：连接 AE，如图所示：

根据旋转可知，$\angle APE=90^\circ$，$\because \angle ABE=90^\circ$，$\therefore A$、$P$、$B$、$E$ 四点共圆，

$\therefore \angle AEP=\angle ABP=45^\circ$，$\therefore \angle EAP=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle AEP=\angle EAP$，$\therefore PA=PE$.

(3) 解：当点 P 在线段 BC 上时，连接 AE，延长 CB，作 $EF\perp CB$ 于点 F，如图所示：





根据解析 (2) 可知，$PA=PE$，$\because \angle EFP=\angle APE=90^\circ$，

$\therefore \angle EPF+\angle PEF=\angle EPF+\angle APC=90^\circ$，$\therefore \angle PEF=\angle APC$，

$\because \angle EFP=\angle ACP=90^\circ$，$\therefore \triangle PEF\cong\triangle APC$，$\therefore EF=PC$，

$\because \angle EBF=180^\circ-\angle CBE=45^\circ$，$\angle EFB=90^\circ$，$\therefore \triangle EBF$ 为等腰直角三角形，$\therefore BE=\sqrt{2}EF$，

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore BA=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}(BP+PC)=\sqrt{2}BP+\sqrt{2}PC=\sqrt{2}BP+\sqrt{2}EF=\sqrt{2}BP+BE$，即 $BA-BE=\sqrt{2}BP$；

当点 P 在线段 BC 延长线上时，连接 AE，作 $EF\perp CB$ 于点 F，如图所示：

根据旋转可知，$\angle APE=90^\circ$，$\because \angle ABE=90^\circ$，$\therefore A$、$B$、$P$、$E$ 四点共圆，

$\therefore \angle EAP=\angle EBP=45^\circ$，$\therefore \angle AEP=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle AEP=\angle EAP$，$\therefore PA=PE$，

$\because \angle EFP=\angle APE=90^\circ$，$\therefore \angle EPF+\angle PEF=\angle EPF+\angle APC=90^\circ$，$\therefore \angle PEF=\angle APC$，

$\because \angle EFP=\angle ACP=90^\circ$，$\therefore \triangle PEF\cong\triangle APC$，$\therefore PF=AC$，

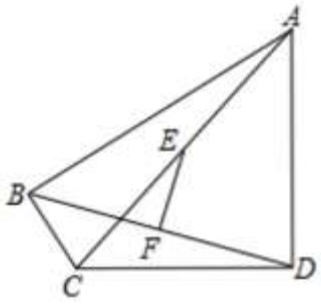
$\because BC=AC$，$\therefore PF=BC$，$\because \angle EBF=45^\circ$，$\angle EFB=90^\circ$，$\therefore \triangle EBF$ 为等腰直角三角形，

$\therefore BE=\sqrt{2}BF=\sqrt{2}(PF+BP)=\sqrt{2}(BC+BP)$，即 $BE=BA+\sqrt{2}BP$；

综上分析可知，$BA-BE=\sqrt{2}BP$ 或 $BE=BA+\sqrt{2}BP$.

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的判定和性质，三角形全等的判定和性质，圆周角定理，四点共圆，等腰直角三角形的性质，解题的关键是作出图形和相关的辅助线，数形结合，并注意分类讨论.

7. (2023·广东梅州·九年级校考阶段练习) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$E$ 是 AC 的中点，F 是 BD 的中点，若 $\angle BAC=15°$，$\angle DAC=45°$，$CD=4$，则 EF 的长为（　　）

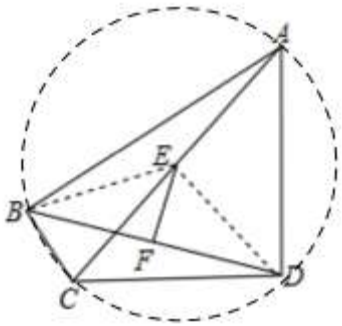


A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】连接 BE，ED，根据 $\angle ABC=\angle ADC=90°$ 且 E 为 AC 中点，求证 $\triangle BED$ 是等腰三角形，再利用等腰三角形的高，中线，角平分线三线合一的性质得到 $EF\perp BD$，根据圆周角定理得到 $\angle DEF=60°$，求得 $EF=\frac{1}{2}DE$，$CD=\sqrt{2}DE$，于是得出结论.

【详解】连接 BE，ED，如图，



$\because\angle ABC=\angle ADC=90°$ 且 E 为 AC 中点，$\therefore BE=\frac{1}{2}AC$，$DE=\frac{1}{2}AC$，$\therefore BE=DE$，

$\because F$ 为 BD 中点，$\therefore EF\perp BD$，$\because\angle ABC=\angle ADC=90°$，$\therefore A$，$B$，$C$，$D$ 四点共圆，

$\because\angle BAC=15°$，$\angle DAC=45°$，$\therefore\angle BAD=60°$，$\therefore\angle BED=120°$，

$\therefore\angle FDE=\angle FBE=30°$，$\therefore EF=\frac{1}{2}DE$，在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=45°$，$\angle ADC=90°$，

$\therefore\angle DAC=\angle DCA=45°$，$\therefore CD=AD=4$，由勾股定理得：$AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=\sqrt{4+4^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，$\therefore EF=\frac{1}{2}DE=\sqrt{2}$，故选：$A$.

【点睛】此题主要考查圆内接四边形，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半和等腰三角形的性质等知识点，解答此题的关键是添加辅助线构造特殊三角形，求出线段.

模型 3. 定边对定角共圆模型

模型解读

定边对定角模型：一定边同侧所对的角为两个相等 (为定值)。

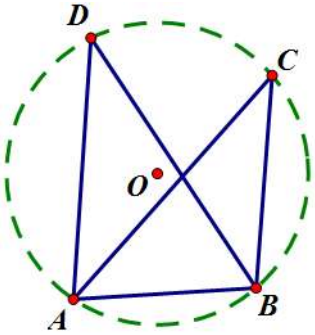


图1

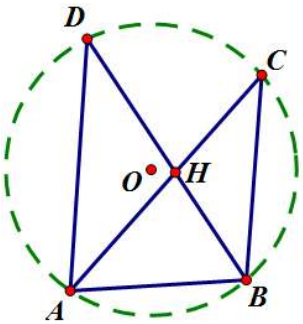


图2

模型证明

条件：如图1，平面上 A、B、C、D 四个点满足 $\angle ADB=\angle ACB$，**结论：** A、B、C、D 四点共圆。

条件：如图2，AC、BD 交于 H，$AH\cdot CH=BH\cdot DH$，**结论：** A、B、C、D 四点共圆。

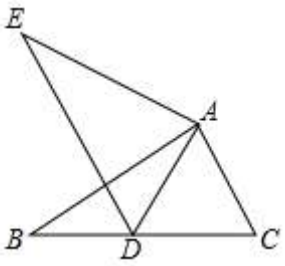
证明：$\because AH\cdot CH=BH\cdot DH$，$\therefore \dfrac{AH}{BH}=\dfrac{DH}{CH}$，

又 $\because \angle AHD=\angle BHC$，$\therefore \Delta AHD\sim\Delta BHC$。$\therefore \angle ADB=\angle ACB$，

$\therefore A$、B、C、D 四点共圆。

模型运用

8. (23－24九年级·福建福州·期中) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ABC=40^\circ$，将 $\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转得到 $\triangle ADE$，使 D 点落在 BC 边上．(1) 求 $\angle BAD$ 的度数；(2) 求证：A、D、B、E 四点共圆．



【答案】(1)10°；(2) 见解析

【分析】(1) 由三角形内角和定理和已知条件求得 $\angle C$ 的度数，由旋转的性质得出 $AC=AD$，即可得出 $\angle ADC=\angle C$，最后由外角定理求得 $\angle BAD$ 的度数；

(2) 由旋转的性质得到 $\angle ABC=\angle AED$，由四点共圆的判定得出结论．

【详解】解：(1) $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ABC=40^\circ$，$\therefore \angle C=50^\circ$，

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转得到 $\triangle ADE$，使 D 点落在 BC 边上，

$\therefore AC=AD$，$\therefore \angle ADC=\angle C=50^\circ$，$\therefore \angle ADC=\angle ABC+\angle BAD=50^\circ$，

$\therefore \angle BAD=50^\circ-40^\circ=10^\circ$

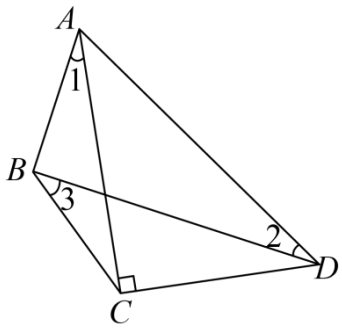
证明 (2) $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转得到 $\triangle ADE$，

$\therefore \angle ABC=\angle AED$，$\therefore A$、$D$、$B$、$E$ 四点共圆．

【点睛】本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、外角定理以及四点共圆的判定，解题的关键是理解旋转后的图形与原图形对应边相等，对应角相等．

9. (23－24九年级上·陕西西安·阶段练习) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，对角线 BD 平分 $\angle ADC$，

$AC \perp CD$，且 $\angle BAC = \angle ADB$．(1) 证明：$\angle BAD + \angle BCD = 180°$；(2) 若 $\angle ADB = 30°$，$AD + CD = 4\sqrt{3}$，求 BD 的长．



【答案】(1) 见解析 (2)$BD = 4$

【分析】(1) 由题意推出 $\angle BCA = \angle ADB$，从而得到 A、B、C、D 四点共圆，进而得出结论即可；

(2) 首先根据已知信息求出 AD，再结合四点共圆的结论，在 $Rt\triangle ABD$ 中求解 BD 即可．

【详解】(1) 证：$\because AB = BC$，$\therefore \angle BAC = \angle BCA$，

$\because \angle BAC = \angle ADB$，$\therefore \angle BCA = \angle ADB$，

$\therefore A$、B、C、D 四点共圆，$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180°$；

(2) 解：$\because AC \perp CD$，$\therefore \angle ACD = 90°$，

$\because \angle ADB = 30°$，$BD$ 平分 $\angle ADC$，$\therefore \angle ADC = 60°$，$\angle CAD = 30°$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AD = 2CD$，

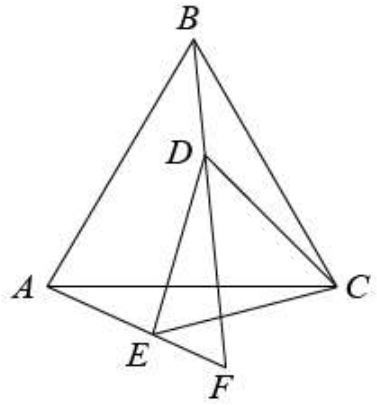
$\because AD + CD = 4\sqrt{3}$，$\therefore AD = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，$CD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\because A$、B、C、D 四点共圆，$\therefore \angle ACD = \angle ABD = 90°$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中，$BD = AD \cdot \cos\angle ADB = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times \cos 30° = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4$，$\therefore BD = 4$．

【点睛】本题考查四点共圆的证明、圆的内接四边形的性质，以及解直角三角形等，掌握圆当中的重要结论，准确求解直角三角形是解题关键．

10. (2022·江苏无锡·中考真题)$\triangle ABC$ 是边长为 5 的等边三角形，$\triangle DCE$ 是边长为 3 的等边三角形，直线 BD 与直线 AE 交于点 F．如图，若点 D 在 $\triangle ABC$ 内，$\angle DBC = 20°$，则 $\angle BAF =$ _____°；现将 $\triangle DCE$ 绕点 C 旋转 1 周，在这个旋转过程中，线段 AF 长度的最小值是 _____．



【答案】 80 $4-\sqrt{3}$##$-\sqrt{3}+4$

【分析】利用 SAS 证明 $\triangle BDC \cong \triangle AEC$，得到 $\angle DBC = \angle EAC = 20°$，据此可求得 $\angle BAF$ 的度数；利用全等三角形的性质可求得 $\angle AFB = 60°$，推出 A、B、C、F 四个点在同一个圆上，当 BF 是圆 C 的切线时，即当 $CD \perp$

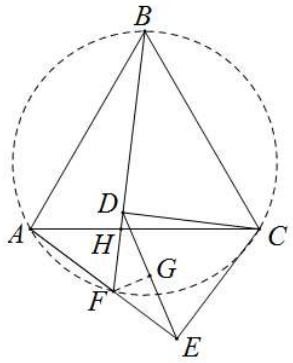
BF时，$\angle FBC$最大，则$\angle FBA$最小，此时线段AF长度有最小值，据此求解即可.

【详解】解：$\because \triangle ABC$和$\triangle DCE$都是等边三角形，$\therefore AC=BC$，$DC=EC$，$\angle BAC=\angle ACB=\angle DCE=60°$，

$\therefore \angle DCB+\angle ACD=\angle ECA+\angle ACD=60°$，即$\angle DCB=\angle ECA$，

在$\triangle BCD$和$\triangle ACE$中，$\begin{cases}CD=CE\\ \angle BCD=\angle ACE\\ BC=AC\end{cases}$，$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD(SAS)$，$\therefore \angle EAC=\angle DBC$，

$\because \angle DBC=20°$，$\therefore \angle EAC=20°$，$\therefore \angle BAF=\angle BAC+\angle EAC=80°$；设$BF$与$AC$相交于点$H$，如图：



$\because \triangle ACE\cong\triangle BCD$ $\therefore AE=BD$，$\angle EAC=\angle DBC$，且$\angle AHF=\angle BHC$，

$\therefore \angle AFB=\angle ACB=60°$，$\therefore A$、$B$、$C$、$F$四个点在同一个圆上，

$\because$点D在以C为圆心，3为半径的圆上，当BF是圆C的切线时，即当$CD\perp BF$时，$\angle FBC$最大，则$\angle FBA$最小，$\therefore$此时线段AF长度有最小值，在$Rt\triangle BCD$中，$BC=5$，$CD=3$，

$\therefore BD=\sqrt{5^2-3^2}=4$，即$AE=4$，$\therefore \angle FDE=180°-90°-60°=30°$，

$\because \angle AFB=60°$，$\therefore \angle FDE=\angle FED=30°$，$\therefore FD=FE$，

过点F作$FG\perp DE$于点G，$\therefore DG=GE=\frac{3}{2}$，$\therefore FE=DF=\frac{DG}{\cos 30°}=\sqrt{3}$，

$\therefore AF=AE-FE=4-\sqrt{3}$，故答案为：80；$4-\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，圆周角定理，切线的性质，解直角三角形，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

模型4. 对角互补共圆模型

模型解读

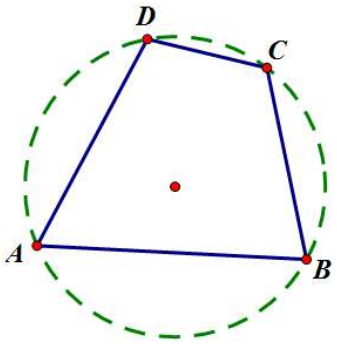


图1

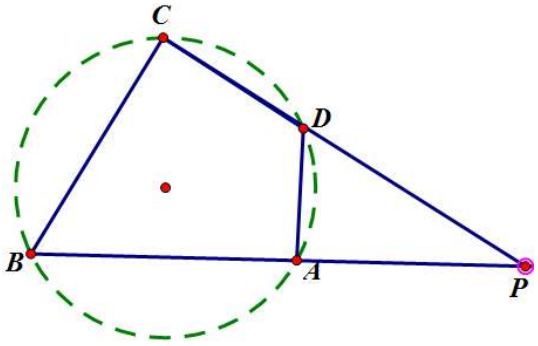


图2

模型证明

条件：如图1，平面上A、B、C、D四个点满足$\angle ABC+\angle ADC=180°$，**结论：**$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆.

条件：如图2，BA、CD的延长线交于P，$PA\cdot PB=PD\cdot PC$，　　**结论**：A、B、C、D四点共圆.

证明：$\because PA\cdot PB=PD\cdot PC$，$\therefore \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PD}{PB}$，

又$\because \angle P=\angle P$，$\therefore \Delta PAD\sim\Delta PCB$。$\therefore \angle ADP=\angle B$，$\because \angle ADP+\angle ADC=180^\circ$，$\therefore \angle B+\angle ADC=180^\circ$

$\therefore A$、B、C、D四点共圆。

模型运用

11. (23－24九年级上·云南昆明·期中) 综合与实践："善思"小组开展"探究四点共圆的条件"活动，得出结论：对角互补的四边形四个顶点共圆. 该小组继续利用上述结论进行探究.

提出问题：如图1所示，在线段AC同侧有两点B，D，连接AD，AB，BC，CD，如果$\angle B=\angle D$，那么A，B，C，D四点在同一个圆上.

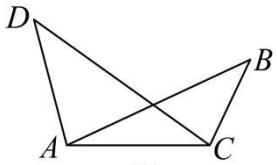


图1

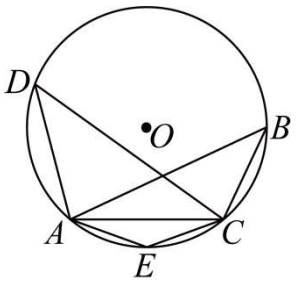


图2

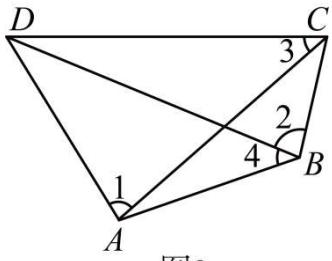


图3

探究展示：如图2所示，作经过点A，C，D的$\odot O$，在劣弧AC上取一点E(不与A，C重合)，

连接AE，CE，则$\angle AEC+\angle D=180^\circ$，(依据1)

$\because \angle B=\angle D$，$\therefore \angle AEC+\angle B=180^\circ$，

$\therefore$点A，B，C，E四点在同一个圆上，(对角互补的四边形四个顶点共圆)

$\therefore$点B，D在点A，C，E所确定的$\odot O$上，(依据2)

$\therefore$点A，B，C，D四点在同一个圆上；

反思归纳：(1) 上述探究过程中的"依据1"、"依据2"分别是指什么？

依据1：_____；(从右边框内选一个选项，直接填序号)

依据2：_____. (从右边框内选一个选项，直接填序号)

①圆内接四边形对角互补；
②对角互补的四边形四个顶点共圆；
③过不在同一直线上的三个点有且只有一个圆；
④经过两点的圆的圆心在这两点所连线段的垂直平分线上；

(2) 如图3所示，在四边形$ABCD$中，$\angle 1=\angle 2=80^\circ$，$\angle 3=42^\circ$，则$\angle 4$的度数为_____.

【答案】(1) ①，③ (2)42°

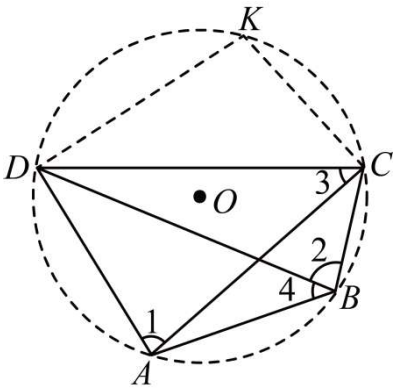
【分析】(1) 根据探究展示过程和圆的性质，确定圆的条件填空即可；(2) 作过A，C，D的$\odot O$，在劣弧CD上取点K，连接DK，CK，由$\angle 1=80^\circ$，可得$\angle K=180^\circ-\angle 1=100^\circ$，故$\angle K+\angle 2=180^\circ$，有$B$，$C$，$D$，$K$共圆，即$B$在过$C$，$D$，$K$的$\odot O$上，即知$A$，$B$，$C$，$K$，$D$共圆，从而$\angle 4=\angle 3=42^\circ$.

【详解】解：(1) 由探究展示过程可知，$\angle AEC+\angle D=180^\circ$的依据是：①圆内接四边形对角互补；

点B,D在点A,C,E所确定的$\odot O$上的依据是:③过不在同一直线上的三个点有且只有一个圆;

故答案为:①,③;

(2) 作过A,C,D的$\odot O$,在劣弧CD上取点K,连接DK,CK,如图:



$\because \angle 1=80^\circ$,$\therefore \angle K=180^\circ-\angle 1=100^\circ$,$\because \angle 2=80^\circ$,$\therefore \angle K+\angle 2=180^\circ$,

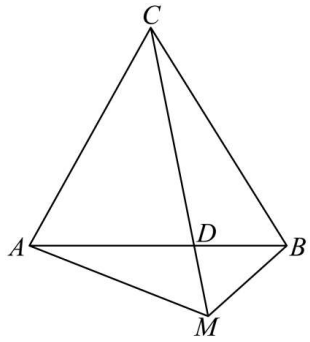
$\therefore B$,C,D,K共圆,即B在过C,D,K的$\odot O$上,

$\because A$在过C,D,K的$\odot O$上,$\therefore A$,B,C,K,D共圆,

$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$,$\therefore \angle 4=\angle 3=42^\circ$,故答案为:$42^\circ$.

【点睛】本题考查四点共圆,解题的关键是读懂阅读材料,掌握圆的相关性质并能灵活运用.

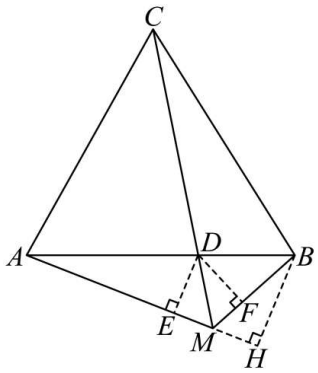
12. (2023·河南周口·校考三模) 在$\triangle ABC$中,$CA=CB$,M是$\triangle ABC$外一动点,满足$\angle CAM+\angle CBM=180^\circ$,若$\angle CMA=60^\circ$,$MA=4$,$MB=2$,则$MD$的长度为 _____.



【答案】$\frac{4}{3}$/$1\frac{1}{3}$

【分析】过点B作$BH\perp AM$交AM的延长线于点H,过点D作$DE\perp AM$于点E,过点D作$DF\perp MB$于点F,点A,M,B,C四点共圆,得$\angle AMC=\angle BMC=60^\circ$,解直角三角形$DE=DF=\frac{\sqrt{3}}{2}MD$,$BH=\frac{\sqrt{3}}{2}MB$,面积法求解,$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AM\cdot DE+\frac{1}{2}BM\cdot DF=\frac{1}{2}AM\cdot BH$,得$MD=\frac{4}{3}$.

【详解】解析:过点B作$BH\perp AM$交AM的延长线于点H,过点D作$DE\perp AM$于点E,过点D作$DF\perp MB$于点F,如图所示:



$\because \angle CAM+\angle CBM=180^\circ \therefore$ 点 A,M,B,C 四点共圆

$\because CA=CB \therefore \angle AMC=\angle BMC=60^\circ \therefore DE=DF=MD\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}MD$，$\angle AMB=120^\circ$

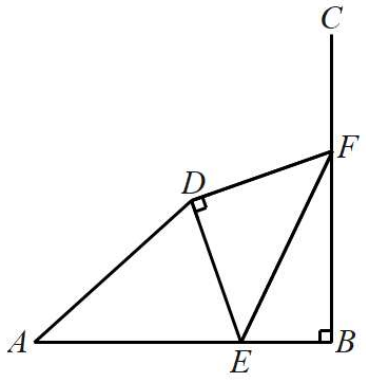
$\therefore \angle BMH=60^\circ$，$\therefore BH=MB\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}MB$，

$\because MA=4$，$MB=2 \therefore S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AM\cdot DE+\frac{1}{2}BM\cdot DF=\frac{1}{2}AM\cdot BH$，

$\therefore 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}MD+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}MD=4\times\sqrt{3}$，$\therefore MD=\frac{4}{3}$

【点睛】本题考查四点共圆，圆周角定理，解直角三角形，角平分线性质定理，添加辅助构造直角三角形是解题的关键.

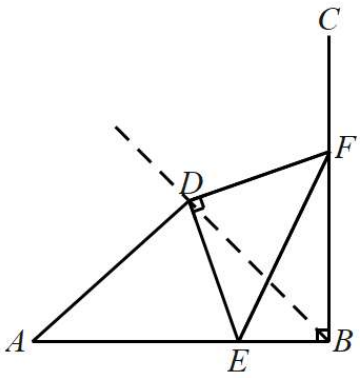
13. (2023·江苏·九年级假期作业) 如图，$AB\perp BC$，$AB=5$，点 E、F 分别是线段 AB、射线 BC 上的动点，以 EF 为斜边向上作等腰 $Rt\triangle DEF$，$\angle D=90^\circ$，连接 AD，则 AD 的最小值为 _____.



【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【分析】连接 BD 并延长，利用四点共圆的判定定理得到 B,E,D,F 四点共圆，再利用等腰直角三角形的性质和圆周角定理得到 $\angle DBF=\angle DEF=45^\circ$，得到点 D 的轨迹，最后利用垂线段最短和等腰直角三角形的性质解答即可得出结论.

【详解】解：连接 BD 并延长，如图，



∵ $AB \perp BC$，∴ $\angle ABC = 90°$，$\angle EDF = 90°$，

∴ $\angle ABC + \angle EDF = 180°$，∴ B, E, D, F 四点共圆，

∵ $\triangle DEF$ 为等腰直角三角形，∴ $\angle DEF = \angle DFE = 45°$，

∴ $\angle DBF = \angle DEF = 45°$，∴ $\angle DBF = \angle DBE = 45°$，∴ 点 D 的轨迹为 $\angle ABC$ 的平分线上，

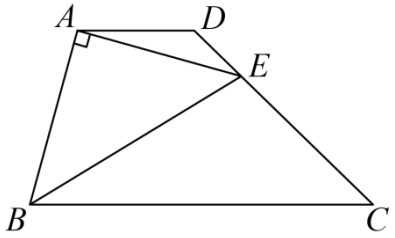
∵ 垂线段最短，∴ 当 $AD \perp BD$ 时，AD 取最小值，

∴ AD 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$，故答案为：$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，等腰直角三角形的性质，四点共圆的判定，圆周角定理，点的轨迹，垂线段的性质，利用已知条件求得点 D 的轨迹是解题的关键.

习题练模型

1. (2023·浙江·统考中考真题) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle C = 45°$，以 AB 为腰作等腰直角三角形 BAE，顶点 E 恰好落在 CD 边上，若 $AD = 1$，则 CE 的长是（　　）



A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. 1

【答案】A

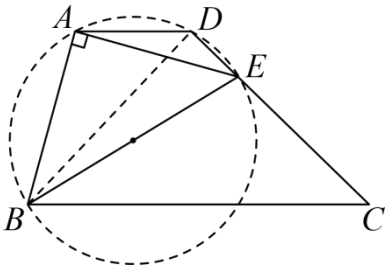
【分析】先根据等腰三角形的性质可得 $BE = \sqrt{2}AB$，$\angle ABE = \angle AEB = 45°$，$\angle BAE = 90°$，再判断出点 A, B, E, D 四点共圆，在以 BE 为直径的圆上，连接 BD，根据圆周角定理可得 $\angle BDE = 90°$，$\angle ADB = \angle AEB = 45°$，然后根据相似三角形的判定可得 $\triangle ABD \sim \triangle EBC$，根据相似三角形的性质即可得.

【详解】解：∵ $\triangle BAE$ 是以 AB 为腰的等腰直角三角形，

∴ $BE = \sqrt{2}AB$，$\angle ABE = \angle AEB = 45°$，$\angle BAE = 90°$，

∵ $AD \parallel BC$，$\angle C = 45°$，∴ $\angle ADE = 180° - \angle C = 135°$，∴ $\angle ADE + \angle ABE = 180°$，

∴ 点 A, B, E, D 四点共圆，在以 BE 为直径的圆上，如图，连接 BD，



由圆周角定理得：$\angle BDE=90^\circ$，$\angle ADB=\angle AEB=45^\circ$，$\therefore\angle ADB=\angle C=\angle CBD=45^\circ$，

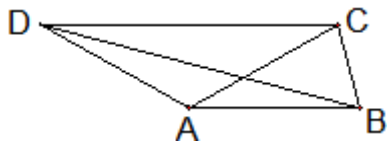
$\therefore\angle ABD+\angle DBE=45^\circ=\angle EBC+\angle DBE$，$\therefore\angle ABD=\angle EBC$，

在$\triangle ABD$和$\triangle EBC$中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle C\\ \angle ABD=\angle EBC\end{cases}$，$\therefore\triangle ABD\sim\triangle EBC$，

$\therefore\dfrac{CE}{AD}=\dfrac{EB}{AB}=\sqrt{2}$，$\therefore CE=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$，故选：$A$.

【点睛】本题考查了圆内接四边形、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识点，正确判断出点A,B,E,D四点共圆，在以BE为直径的圆上是解题关键.

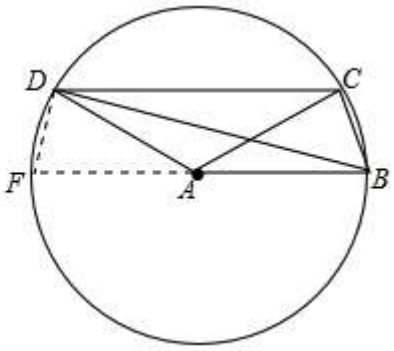
2. (2023·广西·中考模拟) 如图所示，四边形$ABCD$中，$DC\parallel AB$，$BC=1$，$AB=AC=AD=2$. 则BD的长为（　　）



A. $\sqrt{14}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【详解】解：以A为圆心，AB长为半径作圆，延长BA交$\odot A$于F，连接DF.



$\because AB=AC=AD=2$，$\therefore D,C$在圆A上，

$\because DC\parallel AB$，$\therefore$弧$DF=$弧BC，$\therefore DF=CB=1$，$BF=AB+AF=2AB=4$，

$\because FB$是$\odot A$的直径，$\therefore\angle FDB=90^\circ$，$\therefore BD=\sqrt{BF^2-DF^2}=\sqrt{15}$　故选B

3. (2024·湖北武汉·模拟预测) 如图，AB是$\odot O$的直径，点E在$\odot O$上，$CE\perp AB$垂足为C，$AC=4$，$CE=4\sqrt{2}$，点G在$\odot O$上运动(不与E重合)，点F为GE的中点，则CF的最大值为（　　）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/967156031105006146