十年（2014－2023）高考真题分项汇编—数列解答题

目录

题型一：数列的概念和通项公式

1．(2021 年新高考I卷·第 17 题) 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n为奇数,\\ a_n+2, n为偶数.\end{cases}$

(1)记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求$\{a_n\}$的前 20 项和．

【答案】$b_1=2,b_2=5$；300．

解析:(1)由题设可得$b_1=a_2=a_1+1=2,b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$

又$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2$，故$a_{2k+2}=a_{2k}+3$即$b_{n+1}=b_n+3$即$b_{n+1}-b_n=3$

所以$\{b_n\}$为等差数列，故$b_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$．

(2)设$\{a_n\}$的前20项和为S_{20}，则$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$，

因为 $a_1=a_2-1,a_3=a_4-1,\cdots,a_{19}=a_{20}-1$，

所以 $S_{20}=2\left(a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20}\right)-10$

$=2\left(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10}\right)-10=2\times\left(10\times2+\dfrac{9\times10}{2}\times3\right)-10=300$.

2．(2014 高考数学湖南理科·第 20 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,|a_{n+1}-a_n|=p^n,n\in N^*$，

(I)若 $\{a_n\}$ 是递增数列，且 $a_1,2a_2,3a_3$ 成等差数列，求 p 的值；

(II)若 $p=\dfrac{1}{2}$，且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列，$\{a_{2n}\}$ 是递减数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $p=\dfrac{1}{3}$　　(2) $a_n=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

解析: (I)因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_{n+1}-a_n=|a_{n+1}-a_n|=p^n$。而 $a_1=1$，因此又 $a_1,2a_2,3a_3$ 成等差数列，

$4a_2=a_1+3a_3\Rightarrow4(1+p)=1+3(p^2+p+1)\Rightarrow3p^2-p=0$ 解得 $p=\dfrac{1}{3},p=0$，但当 $p=0$ 时，$a_{n+1}=a_n$，

这与 $\{a_n\}$ 是递增数列矛盾。故 $p=\dfrac{1}{3}$.

(II)由于 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列，因而 $a_{2n+1}-a_{2n-1}>0$，于是

$$(a_{2n+1}-a_{2n})+(a_{2n}-a_{2n-1})>0 \qquad ①$$

但 $\dfrac{1}{2^{2n}}<\dfrac{1}{2^{2n-1}}$，所以

$$|a_{2n+1}-a_{2n}|<|a_{2n}-a_{2n-1}|. \qquad ②$$

又①，②知，$a_{2n}-a_{2n-1}>0$，因此

$$a_{2n}-a_{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-1}=\frac{(-1)^{2n}}{2^{2n-1}} \qquad ③$$

因为 $\{a_{2n}\}$ 是递减数列，同理可得，$a_{2n+1}-a_{2n}<0$ 故

$$a_{2n+1}-a_{2n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n}} \qquad ④$$

由③，④即知，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$。

于是

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\quad=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}\quad=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

3．(2019·全国II·理·第 19 题) 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1)证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

【答案】(1)见解析；(2) $a_n=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，$b_n=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

【官方解析】

(1)由题设得$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$.

又因为$a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

由题设得$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

又因为$a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列.

(2)由(1)知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$.

所以$a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$,

$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

【分析】(1)可通过题意中的$4a_{n+1}=3b_n-a_n+4$以及$4b_{n+1}=3a_n-b_n-4$对两式进行相加和相减即可推导出数列$\{a_n+b_n\}$是等比数列以及数列$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2)可通过(1)中的结果推导出数列$\{a_n+b_n\}$以及数列$\{a_n-b_n\}$的通项公式，然后利用数列$\{a_n+b_n\}$以及数列$\{a_n-b_n\}$的通项公式即可得出结果.

【解析】(1) 由题意可知 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$，$a_1+b_1=1$，$a_1-b_1=1$，

所以 $4a_{n+1}+4b_{n+1}=3a_n-b_n+4+3b_n-a_n-4=2a_n+2b_n$，即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，

所以数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 1、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，$a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

因为 $4a_{n+1}-4b_{n+1}=3a_n-b_n+4-(3b_n-a_n-4)=4a_n-4b_n+8$，

所以 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$，数列 $\{a_n-b_n\}$ 是首项 1、公差为 2 的等差数列，$a_n-b_n=2n-1$.

(2) 由 (1) 可知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$，

所以 $a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了数列的相关性质，主要考查了等差数列以及等比数列的相关证明，证明数列是等差数列或者等比数列一定要结合等差数列或者等比数列的定义，考查推理能力，考查化归与转化思想，是中档题.

4．(2014 高考数学广东理科·第 19 题) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和为 S_n,满足 $S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n,n\in N^*$，且 $S_3=15$.

(1)求 a_1,a_2,a_3 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=2a_2-7$ ①

当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=4a_3-20$ ②

$S_3=a_1+a_2+a_3=15$ ③

由①②③解得 $a_1=3,a_2=5,a_3=7$

(2)当 $n>1$ 时，$S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n$ ①

$S_{n-1}=2(n-1)a_n-3(n-1)^2-4(n-1)$ ②

①—②化简得 $2na_{n+1}=(2n-1)a_n+6n+1$ (当 $n=1$ 时也成立)

方法 1：(凑配)

令 $2n\left[a_{n+1}+A\left(n+1\right)+\mathrm{B}\right]=\left(2n-1\right)\left[a_n+An+B\right]$，求得 $A=-2$，$B=-1$ 即

$2n\left[a_{n+1}-2\left(n+1\right)-1\right]=\left(2n-1\right)\left[a_n-2n-1\right]$

令 $b_n=a_n-2n-1$，则 $2nb_{n+1}=\left(2n-1\right)b_n$，即 $b_{n+1}=\dfrac{2n-1}{2n}b_n$

因为 $b_1=0,b_2=0,b_3=0$，故必有 $b_n=0$，即 $a_n=2n+1$

方法 2：(数学归纳法)由(1) $a_1=3,a_2=5,a_3=7$，猜想 $a_n=2n+1$，

下面用数学归纳法证明对 $\forall x\in N^+,a_n=2n+1$：

当 $n=1,n=2,n=3$ 时，成立

假设当 $n=k$ 时成立，即有 $a_k=2k+1$，$2ka_{k+1}=\left(2k-1\right)a_k+6k+1$

当 $n=k+1$ 时， $2ka_{k+1}=\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)+6k+1=4k^2+6k$

所以 $a_{k+1}=\dfrac{4k^2+6k}{2k}=2k+3=2\left(k+1\right)+1$，成立

综上所述，对 $\forall x\in N^+,a_n=2n+1$

5．(2014 高考数学湖北理科·第 18 题) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，且 a_1、a_2、a_5 成等比数列．

(I)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(II)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， 是否存在正整数 n，使得 $S_n>60n+800$？若存在， 求 n 的最小值；若不存在，说明理由．

【答案】(1) $a_n=2$ 或 $a_n=4n-2$；(2)详见解析．

解析：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依题意， $2,2+d,2+4d$ 成等比数列，所以 $(2+d)^2=2(2+4d)$，解得 $d=0$ 或 $d=4$，当 $d=0$ 是， $a_n=2$；当 $d=4$ 时， $a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2$ 或 $a_n=4n-2$．

(2)当 $a_n=2$ 时， $S_n=2n$，显然 $2n<60n+800$，不存在正整数 n，使得．

当 $a_n=4n-2$ 时， $S_n=\dfrac{n[2+(4n-2)]}{2}=2n^2$，令 $2n^2>60n+800$，即 $n^2-30n-400>0$，解得 $n>40$ 或 $n<-10$(舍去)，此时存在正整数 n，使得 $S_n>60n+800$ 成立， n 的最小值为 41．

综上所述，当 $a_n=2$ 时，不存在正整数 n；

当 $a_n=4n-2$ 时，存在正整数 n，使得 $S_n>60n+800$ 成立，n 的最小值为 41.

6．(2021 年高考全国乙卷理科·第 19 题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1)证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1)证明见解析；(2) $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}$.

解析：(1)由已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 得 $S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}$,且 $b_n\neq 0$，$b_n\neq\frac{1}{2}$,

取 $n=1$,由 $S_1=b_1$ 得 $b_1=\frac{3}{2}$,

由于 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,

所以 $\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$,

所以 $\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=b_{n+1}$,

所以 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$,

由于 $b_{n+1}\neq 0$

所以 $\frac{2}{2b_{n+1}-1}=\frac{1}{b_n}$，即 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$,其中 $n\in N^*$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\frac{3}{2}$ 为首项，以 $d=\frac{1}{2}$ 为公差等差数列;

(2)由(1)可得，数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=\frac{3}{2}$ 为首项，以 $d=\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列,

$\therefore b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$,

$S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}=\frac{2+n}{1+n}$,

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$,

当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2+n}{1+n}-\frac{1+n}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$,显然对于 $n=1$ 不成立,

$$\therefore a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}.$$

【点睛】本题考查等差数列的证明，考查数列的前 n 项和与项的关系，数列的前 n 项积与项的关系，其中由 $\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$,得到 $\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=b_{n+1}$，进而得到 $\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 是关键一步；要熟练掌握前 n 项和，积与数列的项的关系，消和(积)得到项(或项的递推关系)，或者消项得到和(积)的递推关系是常用的重要的思想方法.

7．(2018 年高考数学浙江卷·第 20 题) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$，且 $a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项．数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，数列 $\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$ 的前项和为 $2n^2+n$．

(1)求 q 的值；

(2)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

【答案】(1) $q>2$；(2) $b_n=15-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$．

【解析】(1)由题知 $\begin{cases}a_3+a_4+a_5=28\\a_3+a_5=2(a_4+2)\end{cases}$,

$\therefore\begin{cases}a_3+a_5=20\\a_4=8\end{cases}$，$\therefore 8\left(q+\frac{1}{q}\right)=20$，解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$，

$\because q>1$，$\therefore q=2$.

(2)方法一：错位相减法

设 $c_n=\left(b_{n+1}-b_n\right)a_n$，数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n，由 $c_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，解得 $c_n=4n-1$.

由(1)知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{4n-1}{2^{n-1}}$，故 $b_n-b_{n-1}=\dfrac{4n-5}{2^{n-2}}(n\geq 2)$，

$$\therefore b_n=\left(b_n-b_{n-1}\right)+\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)+\cdots+\left(b_3-b_2\right)+\left(b_2-b_1\right)+b_1$$

$$=\frac{4n-5}{2^{n-2}}+\frac{4n-9}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{7}{2}+3+1$$

设 $T_n=3+\dfrac{7}{2}+\cdots+\dfrac{4n-9}{2^{n-3}}+\dfrac{4n-5}{2^{n-2}}(n\geq 2)$，

$$\frac{1}{2}T_n=\quad\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\cdots+\frac{4n-9}{2^{n-2}}+\frac{4n-5}{2^{n-1}}$$

$\therefore\dfrac{1}{2}T_n=3-\dfrac{4n-5}{2^{n-1}}+\left(\dfrac{4}{2}+\dfrac{4}{2^2}+\cdots+\dfrac{4}{2^{n-2}}\right)$，$\therefore T_n=14-\dfrac{4n+3}{2^{n-2}}(n\geq 2)$，$\because b_1=1,\therefore b_n=15-\dfrac{4n+3}{2^{n-2}}$

方法二：构造常数列

设 $c_n=\left(b_{n+1}-b_n\right)a_n$，数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n，由 $c_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，解得 $c_n=4n-1$.

由(1)知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{4n-1}{2^{n-1}}$，

而 $(4n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n+7)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n+7)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow b_{n+1}+(4n+7)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=b_n+(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，

所以数列 $\left\{b_n+(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$ 是一个常数列。即 $b_n+(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=b_1+14=15$，

所以 $b_n=15-\dfrac{4n+3}{2^{n-2}}$.

说明：其中 $(4n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(4n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n+7)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 是采用待定系数法求出的

可设 $(4n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(\lambda n+\mu)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-[\lambda(n-1)+\mu]\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ 待定求出 $\lambda=-4,\mu=-7$.

题型二：等差数列的定义与性质

1．(2023年新课标全国Ⅰ卷·第20题) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d>1$．令$b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记S_n,T_n分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项和.

(1)若$3a_2=3a_1+a_3,S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求d.

【答案】(1) $a_n=3n$

(2) $d=\frac{51}{50}$

解析：(1)$\because 3a_2=3a_1+a_3$，$\therefore 3d=a_1+2d$，解得$a_1=d$，

$\therefore S_3=3a_2=3(a_1+d)=6d$，

又$T_3=b_1+b_2+b_3=\frac{2}{d}+\frac{6}{2d}+\frac{12}{3d}=\frac{9}{d}$，

$\therefore S_3+T_3=6d+\frac{9}{d}=21$，

即$2d^2-7d+3=0$，解得$d=3$或$d=\frac{1}{2}$(舍去)，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)\cdot d=3n$.

(2)$\because \{b_n\}$为等差数列，

$\therefore 2b_2=b_1+b_3$，即$\frac{12}{a_2}=\frac{2}{a_1}+\frac{12}{a_3}$，

$\therefore 6(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})=\frac{6d}{a_2a_3}=\frac{1}{a_1}$，即$a_1^2-3a_1d+2d^2=0$，解得$a_1=d$或$a_1=2d$，

$\because d>1$，$\therefore a_n>0$，

又$S_{99}-T_{99}=99$，由等差数列性质知，$99a_{50}-99b_{50}=99$，即$a_{50}-b_{50}=1$，

$\therefore a_{50}-\frac{2550}{a_{50}}=1$，即$a_{50}^2-a_{50}-2550=0$，解得$a_{50}=51$或$a_{50}=-50$(舍去)

当$a_1=2d$时，$a_{50}=a_1+49d=51d=51$，解得$d=1$，与$d>1$矛盾，无解;

当 $a_1=d$ 时，$a_{50}=a_1+49d=50d=51$，解得 $d=\dfrac{51}{50}$.

综上，$d=\dfrac{51}{50}$.

2．(2015 高考数学四川理科·第 16 题) 设数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的前 n 项和 $S_n=2a_n-a_1$，且 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n，求得 $|T_n-1|<\dfrac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值.

【答案】(1) $a_n=2^n$；(2)10.

解析：(1)由已知 $S_n=2a_n-a_1$，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n>1)$，

即 $a_n=2a_{n-1}(n>1)$.

从而 $a_2=2a_1,a_3=4a_1$.

又因为 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列，即 $a_1+a_3=2(a_2+1)$.

所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$，解得 $a_1=2$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

故 $a_n=2^n$.

(2)由(1)得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^n}$.

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$.

由 $|T_n-1|<\dfrac{1}{1000}$，得 $|1-\dfrac{1}{2^n}-1|<\dfrac{1}{1000}$，即 $2^n>1000$.

因为 $2^9=512<1000<1024=2^{10}$，

所以 $n\geq 10$.

于是，使 $|T_n-1|<\dfrac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为 10.

考点：本题考查等差数列与等比数列的概念、等比数列通项公式与前 n 项和公式等基础知识，考查运算求解能力.

3．(2022 年高考全国甲卷数学（理）·第 17 题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 是等差数列;

(2)若 a_4,a_7,a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值.

【答案】(1)证明见解析；　　(2) -78 .

【解析】(1)解：因为 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，即 $2S_n+n^2=2na_n+n$ ①，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$ ②，

①−②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\geq 2$ 且 $n\in \mathrm{N}^*$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

(2)解：由(1)可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又 a_4，a_7，a_9 成等比数列，所以 $a_7{}^2=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，

所以 $a_n=n-13$，所以 $S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$，

所以，当 $n=12$ 或 $n=13$ 时 $(S_n)_{\min}=-78$.

4．(2021 年新高考全国II卷·第 17 题) 记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若

$a_3=S_5,a_2a_4=S_4$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

(2)求使 $S_n>a_n$ 成立的 n 的最小值.

【答案】解析:(1)由等差数列的性质可得：$S_5=5a_3$，则：$a_3=5a_3,\therefore a_3=0$，

设等差数列的公差为 d，从而有：$a_2a_4=(a_3-d)(a_3+d)=-d^2$，

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_3-2d)+(a_3-d)+a_3+(a_3-d)=-2d$，

从而：$-d^2=-2d$，由于公差不为零，故：$d=2$，数列的通项公式为：$a_n=a_3+(n-3)d=2n-6$.

(2)由数列的通项公式可得：$a_1=2-6=-4$，则：$S_n=n\times(-4)+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-6n$，

则不等式 $S_n>a_n$ 即：$n^2-5n>2n-6$，整理可得：$(n-1)(n-6)>0$，解得：$n<1$ 或 $n>6$，又 n 为正整数，故 n 的最小值为 7.

题型三：等比数列的定义与性质

1．(2018 年高考数学课标III卷（理）·第 17 题) (12 分)等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_m=63$，求 m .

【答案】(1) $a_n=2^{n-1}$ 或 $a_n=(-2)^{n-1}$；(2) $m=6$

【官方解析】(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，由题设得 $a_n=q^{n-1}$

由已知得 $q^4=4q^2$，解得 $q=0$ (舍去)，$q=-2$ 或 $q=2$

故 $a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$

(2)若 $a_n=(-2)^{n-1}$，则 $S_m=\dfrac{1-(-2)^m}{3}$，由 $S_m=63$，得 $(-2)^m=-188$，此方和没有正整数解

若 $a_n=2^{n-1}$，则 $S_m=2^m-1$，由 $S_m=63$，得 $2^m=64$，解得 $m=6$

综上，$m=6$.

【民间解析】(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_1=1$，$a_5=4a_3$ 可得 $1\times q^4=4\times 1\times q^2$，所以 $q^2=4$

所以 $q=\pm 2$

当 $q=2$ 时，$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$；当 $q=-2$ 时，$a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$

(2)由(1)可知 $q=\pm 2$

当 $q=2$ 时，由 $S_m=63 \Rightarrow \frac{a_1\left(1-q^m\right)}{1-q}=63$ 即 $\frac{1-2^m}{1-2}=63$，即 $2^m=64=2^6$，所以 $m=6$；

当 $q=-2$ 时，由 $S_m=63 \Rightarrow \frac{a_1\left(1-q^m\right)}{1-q}=63$ 即 $\frac{1-(-2)^m}{1+2}=63$，即 $(-2)^m=-188$，无解

综上可知 $m=6$.

2．(2016 高考数学课标III卷理科·第 17 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$,其中 $\lambda \neq 0$.

(I)证明 $\{a_n\}$ 是等比数列,并求其通项公式;

(II)若 $S_5=\frac{31}{32}$,求 λ.

【答案】(I) $a_n=\frac{1}{1-\lambda}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$;(II) $\lambda=-1$.

【解析】(I)由题意得 $a_1=S_1=1+\lambda a_1$,故 $\lambda \neq 1$, $a_1=\frac{1}{1-\lambda}$, $a_1 \neq 0$.

由 $S_n=1+\lambda a_n$, $S_{n+1}=1+\lambda a_{n+1}$ 得 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}-\lambda a_n$,即 $a_{n+1}(\lambda-1)=\lambda a_n$.

由 $a_1 \neq 0$, $\lambda \neq 0$ 得 $a_n \neq 0$,所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

因此 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{1-\lambda}$,公比为 $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ 的等比数列,于是 $a_n=\frac{1}{1-\lambda}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$.

(II)由(I)得 $S_n=1-(\frac{\lambda}{\lambda-1})^n$,由 $S_5=\frac{31}{32}$ 得 $1-(\frac{\lambda}{\lambda-1})^5=\frac{31}{32}$,即 $(\frac{\lambda}{\lambda-1})^5=\frac{1}{32}$,解得 $\lambda=-1$.

题型四：数列的求和

1.(2018年高考数学课标II卷(理)·第17题) (12分)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $a_1=-7$， $S_3=-15$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求 S_n，并求 S_n 的最小值.

【答案】解析：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意得 $3a_1+3d=-15$.

由 $a_1=7$ 得 $d=2$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-9$.

(2)由(1)得 $S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$.

所以当 $n=4$ 时， S_n 取得最小值，最小值为 -16.

2．(2016 高考数学课标II卷理科·第 17 题) (本题满分 12 分) S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 a_1=1， $S_7=28$.

记 $b_n=[\lg a_n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0$, $[\lg 99]=1$.

(I)求b_1，b_{11}，b_{101}；(II)求数列$\{b_n\}$的前 1 000 项和.

【答案】(1) $b_1=[\lg 1]=0$，$b_{11}=[\lg 11]=1$，$b_{101}=[\lg 101]=2$；(2) 1893.

【解析】(1)设$\{a_n\}$的公差为d，据已知有$7+21d=28$，解得$d=1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$.

$b_1=[\lg 1]=0$，$b_{11}=[\lg 11]=1$，$b_{101}=[\lg 101]=2$.

(2)因为$b_n=\begin{cases}0, & 1\le n<10,\\ 1, & 10\le n<100,\\ 2, & 100\le n<1000,\\ 3, & n=1000,\end{cases}$

所以数列$\{b_n\}$的前1000项和为$1\times 90+2\times 900+3\times 1=1893$.

3．(2020 年新高考全国I卷（山东）·第 18 题）已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20, a_3=8$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记b_m为$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in \mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

【答案】(1) $a_n=2^n$；(2) $S_{100}=480$.

解析: (1)由于数列$\{a_n\}$是公比大于1的等比数列，设首项为a_1，公比为q，依题意有$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20\\ a_1q^2=8\end{cases}$，解得解得$a_1=2,q=2$，或$a_1=32,q=\dfrac{1}{2}$(舍),

所以$a_n=2^n$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

(2)由于$2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128$，所以

b_1对应的区间为：$(0,1]$，则$b_1=0$；

b_2,b_3对应的区间分别为：$(0,2],(0,3]$，则$b_2=b_3=1$，即有2个1；

b_4,b_5,b_6,b_7对应的区间分别为：$(0,4],(0,5],(0,6],(0,7]$，则$b_4=b_5=b_6=b_7=2$，即有2^2个2；

$b_8,b_9,\cdots,b_{15}$对应的区间分别为：$(0,8],(0,9],\cdots,(0,15]$，则$b_8=b_9=\cdots=b_{15}=3$，即有$2^3$个$3$；

$b_{16},b_{17},\cdots,b_{31}$对应的区间分别为：$(0,16],(0,17],\cdots,(0,31]$，则$b_{16}=b_{17}=\cdots=b_{31}=4$，即有$2^4$个$4$；

$b_{32},b_{33},\cdots,b_{63}$ 对应的区间分别为：$(0,32],(0,33],\cdots,(0,63]$，则 $b_{32}=b_{33}=\cdots=b_{63}=5$，即有 2^5 个 5；

$b_{64},b_{65},\cdots,b_{100}$ 对应的区间分别为：$(0,64],(0,65],\cdots,(0,100]$，则 $b_{64}=b_{65}=\cdots=b_{100}=6$，即有 37 个 6.

所以 $S_{100}=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times37=480$.

4．(2020 年新高考全国卷II数学（海南）·第 18 题) 已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_2+a_4=20,a_3=8$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $a_1a_2-a_2a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$.

【答案】(1) $a_n=2^n$；(2) $\frac{8}{5}-(-1)^n\frac{2^{2n+3}}{5}$

解析：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q(q>1)，则 $\begin{cases}a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=20\\ a_3=a_1q^2=8\end{cases}$，

整理可得：$2q^2-5q+2=0$，

$\because q>1,q=2,a_1=2$，

数列的通项公式为：$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

(2)由于：$(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}\times2^n\times2^{n+1}=(-1)^{n-1}2^{2n+1}$，故：

$a_1a_2-a_2a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$

$=2^3-2^5+2^7-2^9+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot2^{2n+1}$

$=\frac{2^3\left[1-\left(-2^2\right)^n\right]}{1-\left(-2^2\right)}=\frac{8}{5}-(-1)^n\frac{2^{2n+3}}{5}$.

5．(2023 年全国甲卷理科·第 17 题) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=1,2S_n=na_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(1) $a_n=n-1$

(2) $T_n=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

解析：(1)因为 $2S_n=na_n$，

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，即 $a_1=0$；

当 $n=3$ 时，$2(1+a_3)=3a_3$，即 $a_3=2$，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}=2a_n$，

化简得：$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，当 $n\geq 3$ 时，$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\frac{a_3}{2}=1$，即 $a_n=n-1$，

当 $n=1,2,3$ 时都满足上式，所以 $a_n=n-1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

(2)因为 $\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，所以 $T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

两式相减得，

$$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$=1-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，即 $T_n=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathrm{N}^*$.

6.(2020 天津高考·第 19 题) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，

$a_1=b_1=1,a_5=5(a_4-a_3),b_5=4(b_4-b_3)$.

(I)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II)记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

(III)对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

【答案】(I) $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$；(II)证明见解析；(III) $\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times4^n}-\dfrac{4}{9}$.

【解析】(I)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q．由$a_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，可得

$d\neq1$.

从而$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$．由$b_1=1,b_5=4(b_4-b_3)$，又$q\neq0$，可得$q^2-4q+4=0$，解得$q=2$，

从而$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(II)证明：由(I)可得$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

故$S_nS_{n+2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，$S_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$，

从而$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)<0$，所以$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$.

(III)当n为奇数时，$c_n=\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$，

当n为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$，

对任意的正整数n，有$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2^{2k}}{2k+1}-\dfrac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\dfrac{2^{2n}}{2n+1}-1$，

和$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{4^k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{4^n}$ ①

由①得$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{5}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{4^n}+\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$ ②

由①②得$\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4^2}+\cdots+\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$，

由于$\dfrac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4^n}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^n}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{6n+5}{3\times4^{n+1}}$，

从而得：$\sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{5}{9} - \frac{6n+5}{9\times 4^n}$.

因此，$\sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} c_{2k} = \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9\times 4^n} - \frac{4}{9}$. 所以，数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9\times 4^n} - \frac{4}{9}$.

7．(2014 高考数学山东理科·第 19 题) 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前n项和为S_n，且S_1, S_2, S_4成等比数列.

(I)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II)令$b_n = (-1)^{n-1}\frac{4n}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【答案】(1) $a_n = 2n+1$；(2) $T_n = \begin{cases} \frac{2n+2}{2n+1}, n\text{为奇数}, \\ \frac{2n}{2n+1}, n\text{为偶数}. \end{cases}$ (或$T_n = \frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{2n+1}$)

解析：(1)因为$S_1 = a_1$，$S_2 = 2a_1 + \frac{2\times 1}{2}\times 2 = 2a_1 + 2$，

$S_4 = 4a_1 + \frac{4\times 3}{2}\times 2 = 4a_1 + 12$，

由题意得$\left(2a_1+2\right)^2 = a_1\left(4a_1+12\right)$，解得$a_1 = 1$，

所以$a_n = 2n-1$.

(2) $b_n = \left(-1\right)^{n-1}\frac{4n}{a_n a_{n+1}} = \left(-1\right)^{n-1}\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = \left(-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$.

当n为偶数时，$T_n = \left(1+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$.

当n为奇数时，$T_n = \left(1+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots - \left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$.

所以$T_n=\begin{cases}\dfrac{2n+2}{2n+1},n为奇数,\\ \dfrac{2n}{2n+1},n为偶数.\end{cases}$(或$T_n=\dfrac{2n+1+(-1)^{n-1}}{2n+1}$)

8．(2014 高考数学江西理科·第 18 题) 已知首项都是 1 的两个数列$\{a_n\}\{b_n\}(b_n\neq 0,\ n\in N^+)$,满足$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$.

(1)令$c_n=\frac{a_n}{b_n}$,求数列$\{c_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=3^{n-1}$,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n

【答案】(1)$c_n=2n-1$.(2)$S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

分析:(1)已知数列$c_n=\frac{a_n}{b_n}$,因此对$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$变形为$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_n}{b_n}=2,c_{n+1}-c_n=2$所以数列$\{c_n\}$是以首项$c_1=1$,公差$d=2$的等差数列,故$c_n=2n-1$.

(2) 由 $b_n=3^{n-1}$知 $a_n=c_nb_n=(2n-1)3^{n-1}$, 是 等 差 乘 等 比 型 , 所 以 求 和 用 错 位 相 减 法. $S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$, $3S_n=1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

相减得$-2S_n=1+2\cdot(3^1+3^2\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=2-(2n-2)\cdot 3^n$

所以$S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

解析:(1)因为$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$,$b_n\neq 0,\ n\in N^+$

所以$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_n}{b_n}=2,c_{n+1}-c_n=2$

所以数列$\{c_n\}$是以首项$c_1=1$,公差$d=2$的等差数列,故$c_n=2n-1$.

(2)由$b_n=3^{n-1}$知$a_n=c_nb_n=(2n-1)3^{n-1}$

于是数列$\{a_n\}$前 n 项和$S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$3S_n=1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

相减得$-2S_n=1+2\cdot(3^1+3^2\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=2-(2n-2)\cdot 3^n$

所以$S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

考点:等差数列定义,错位相减求和

9．(2014 高考数学大纲理科·第 18 题) 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知$a_1=10$，a_2为整数，且$S_n\le S_4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n$.

【答案】(1) $a_n=13-3n$；(2) $T_n=\dfrac{n}{10(10-3n)}$

解析：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，而$a_1=10$，从而有$a_n=10+(n-1)d$

若$d=0$，$S_n=10n$，此时$S_n\le S_4$不成立

若$d>0$，数列$\{a_n\}$是一个单调递增数列，S_n随着n的增大而增大，也不满足$S_n\le S_4$

当 $d<0$时，数列$\{a_n\}$是一个单调递减数列，要使$S_n\le S_4$，则须满足$\begin{cases}a_5\le 0\\ a_4\ge 0\end{cases}$即

$\begin{cases}10+4d\le 0\\ 10+3d\ge 0\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{10}{3}\le d\le -\dfrac{5}{2}$，又因为$a_2=a_1+d$为整数，所以$d\in Z$，所以$d=-3$

此时$a_n=10-3(n-1)=13-3n$

(2)由(1)可得$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(13-3n)(10-3n)}=\dfrac{1}{(3n-13)(3n-10)}=(\dfrac{1}{3n-13}-\dfrac{1}{3n-10})\times\dfrac{1}{3}$

所以$T_n=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{10}-(-\dfrac{1}{7}))+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{7}-(-\dfrac{1}{4}))+\cdots+(\dfrac{1}{3n-13}-\dfrac{1}{3n-10})\times\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{10}-(-\dfrac{1}{7})+(-\dfrac{1}{7})-(-\dfrac{1}{4})+\cdots+\dfrac{1}{3n-13}-\dfrac{1}{3n-10})=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{3n-10})=-\dfrac{n}{10(3n-10)}$.

10．(2015 高考数学新课标 1 理科·第 17 题) (本小题满分 12 分) S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$a_n>0,a_n{}^2+2a_n=4S_n+3$.

(I)求$\{a_n\}$的通项公式:

(II)设$b_n=\dfrac{1}{2a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前$n$项和

【答案】(I) $2n+1$ (II) $\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}$

分析：(I)先用数列第 n 项与前 n 项和的关系求出数列{ a_n }的递推公式，可以判断数列{ a_n }是等差数列，利用等差数列的通项公式即可写出数列{ a_n }的通项公式；(II)根据(I)数列{ b_n }的通项公式，再用拆项消去法求其前 n 项和.

解析：(I)当 $n=1$ 时，$a_1^2+2a_1=4S_1+3=4a_1+3$，因为 $a_n>0$，所以 $a_1=3$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}=4S_n+3-4S_{n-1}-3=4a_n$，即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$，因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，

所以数列{ a_n }是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n+1$；

(II)由(I)知，$b_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$，

所以数列{ b_n }前 n 项和为 $b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})]$ $=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}$.

11．(2015 高考数学天津理科·第 18 题)(本小题满分 13 分)已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_{n+2}=qa_n(q为实数，且q\neq 1)，n\in \mathrm{N}^*$,

$a_1=1,a_2=2$，且 a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_5 成等差数列.

(I)求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)设 $b_n=\frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}},n\in \mathbf{N}^*$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(I) $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n为奇数,\\ 2^{\frac{n}{2}},n为偶数.\end{cases}$; (II) $S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

解析：(I) 由已知，有 $(a_3+a_4)-(a_2+a_3)=(a_4+a_5)-(a_3+a_4)$，即 $a_4-a_2=a_5-a_3$，

所以 $a_2(q-1)=a_3(q-1)$，又因为 $q\neq 1$，故 $a_3=a_2=2$，由 $a_3=a_1q$，得 $q=2$，

当 $n=2k-1(n\in N^*)$ 时，$a_n=a_{2k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$，

当 $n=2k(n\in N^*)$ 时，$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n\text{为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}},n\text{为偶数}.\end{cases}$

(II) 由(I)得 $b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=1\times\frac{1}{2^0}+2\times\frac{1}{2^1}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2^1}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n},$$

整理得 $S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}},n\in N^*$.

12．(2015 高考数学山东理科·第 18 题) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $2S_n=3^n+3$.

(I)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_nb_n=\log_3 a_n$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(I) $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n>1,\end{cases}$; (II) $T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{6n+3}{4\times3^n}$.

分析：(I)利用数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系求解;

(II)结合第(I)问的结果，利用关系式 $a_nb_n=\log_3 a_n$ 求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，并结合其通项的结构特征，采用错位相减法求其前 n 项和 T_n.

解析：

(I)因为 $2S_n=3^n+3$

所以，$2a_1=3+3$，故 $a_1=3$,

当 $n>1$ 时，$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$,

此时，$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}$，

所以，$a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n>1,\end{cases}$

(II)因为 $a_nb_n=\log_3 a_n$ ，所以 $b_1=\dfrac{1}{3}$

当 $n>1$ 时，$b_n=3^{1-n}\log_3 3^{n-1}=(n-1)\cdot 3^{1-n}$

所以 $T_1=b_1=\dfrac{1}{3}$

当 $n>1$ 时，

$T_n=b_1+b_2+b_3++b_n=\dfrac{1}{3}+\left(1\times 3^{-1}+2\times 3^{-2}+\cdots+(n-1)3^{1-n}\right)$

所以 $3T_n=1+\left(1\times 3^{0}+2\times 3^{-1}+\cdots+(n-1)3^{2-n}\right)$

两式相减，得

$2T_n=\dfrac{2}{3}+\left(3^0+3^{-1}+\cdots+3^{2-n}\right)-(n-1)\cdot 3^{1-n}\quad=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\cdot 3^{1-n}$

$=\dfrac{13}{6}-\dfrac{6n+3}{2\times 3^n}$

所以 $T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{6n+3}{4\times 3^n}$

经检验，$n=1$ 时也适合，

综上可得：$T_n=\dfrac{13}{12}-\dfrac{6n+3}{4\times 3^n}$

13．(2015 高考数学湖北理科·第 18 题) (本小题满分 12 分)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$．

(I)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(II)当 $d>1$ 时，记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

【答案】解析：(I)由题意有，$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\ a_1d=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+9d=20,\\ a_1d=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ d=\dfrac{2}{9}.\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\dfrac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$

(II)由 $d>1$，知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，故 $c_n=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，

于是$T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$, ①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$. ②

①-②可得$\frac{1}{2}T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$,

故$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

14．(2017 年高考数学天津理科·第 18 题) 已知$\{a_n\}$为等差数列,前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,$\{b_n\}$是首项为2的等比数列,且公比大于0,$b_2+b_3=12$,$b_3=a_4-2a_1$,$S_{11}=11b_4$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和$(n\in\mathbf{N}^*)$.

【答案】(1)$b_n=2^n$ (2)$\frac{3n-2}{3}\times4^{n+1}+\frac{8}{3}$

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

由已知$b_2+b_3=12$,得$b_1(q+q^2)=12$,而$b_1=2$,所以$q^2+q-6=0$.

又因为$q>0$,解得$q=2$. 所以,$b_n=2^n$.

由$b_3=a_4-2a_1$,可得$3d-a_1=8$①.

由S_{11}=$11b_4$,可得$a_1+5d=16$②,

联立①②,解得$a_1=1$,$d=3$,由此可得$a_n=3n-2$.

所以,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$,数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^n$.

(2)解:设数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和为T_n,

由$a_{2n}=6n-2$,$b_{2n-1}=2\times4^{n-1}$,有$a_{2n}b_{2n-1}=(3n-1)\times4^n$,

故$T_n=2\times4+5\times4^2+8\times4^3+\cdots+(3n-1)\times4^n$,

$4T_n=2\times4^2+5\times4^3+8\times4^4+\cdots+(3n-4)\times4^n+(3n-1)\times4^{n+1}$,

上述两式相减,得$-3T_n=2\times4+3\times4^2+3\times4^3+\cdots+3\times4^n-(3n-1)\times4^{n+1}$

$=\dfrac{12\times(1-4^n)}{1-4}-4-(3n-1)\times 4^{n+1}$

$=-(3n-2)\times 4^{n+1}-8.$

得 $T_n=\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\dfrac{8}{3}$.

所以,数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\dfrac{8}{3}$.

15．(2016 高考数学山东理科·第 18 题) (本小题满分 12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=b_n+b_{n+1}$.

(I)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II)令 $c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(I) $b_n=3n+1$；(II) $T_n=3n\cdot 2^{n+2}$.

【解析】(I)由题意知当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=11$，

所以 $a_n=6n+5$. 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $\begin{cases}a_1=b_1+b_2\\a_2=b_2+b_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}11=2b_1+d\\17=2b_1+3d\end{cases}$，

可解得 $b_1=4,d=3$,所以 $b_n=3n+1$.

(II)由(I)知 $c_n=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)\cdot 2^{n+1}$，又 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$，

得 $T_n=3\times[2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}]$，

$2T_n=3\times[2\times 2^3+3\times 2^4+4\times 2^5+\cdots+(n+1)\times 2^{n+2}]$，

两式作差，得 $-T_n=3\times[2\times 2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\times 2^{n+2}]$

$=3\times[4+\dfrac{4(2^n-1)}{2-1}-(n+1)\times 2^{n+2}]=-3n\cdot 2^{n+2}$

所以 $T_n=3n\cdot 2^{n+2}$

16．(2020 年高考课标I卷理科·第 17 题) 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，a_1 为 a_2，a_3 的等差中项.

(1)求 $\{a_n\}$ 的公比；

(2)若 $a_1=1$，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) -2；(2) $S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【解析】(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，a_1 为 a_2,a_3 的等差中项，

$\because 2a_1=a_2+a_3,a_1\neq 0,\therefore q^2+q-2=0$，

$\because q\neq 1,\therefore q=-2$；

(2)设 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1,a_n=(-2)^{n-1}$，

$S_n=1\times 1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$，①

$-2S_n=1\times(-2)+2\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n$，②

①−②得，$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{3}$，

$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

17．(2020 年高考课标III卷理科·第 17 题) 设数列$\{a_n\}$满足 a_1=3，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1)计算 a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明；

(2)求数列$\{2^na_n\}$的前 n 项和 S_n.

【答案】(1) $a_2=5$，$a_3=7$，$a_n=2n+1$，证明见解析；(2) $S_n=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

解析：(1)由题意可得 $a_2=3a_1-4=9-4=5$，$a_3=3a_2-8=15-8=7$，

由数列$\{a_n\}$的前三项可猜想数列$\{a_n\}$是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，即 $a_n=2n+1$，

证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=3$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$a_k=2k+1$ 成立.

那么 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2k+3=2(k+1)+1$ 也成立.

则对任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n=2n+1$ 成立；

(2)由(1)可知，$a_n\cdot 2^n=(2n+1)\cdot 2^n$

$S_n=3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}+(2n+1)\cdot 2^n$，①

$2S_n=3\times 2^2+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)\cdot 2^{n+1}$，②

由①−②得：$-S_n=6+2\times\left(2^2+2^3+\cdots+2^n\right)-(2n+1)\cdot 2^{n+1}$

$=6+2\times\dfrac{2^2\times\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}-(2n+1)\cdot 2^{n+1}=(1-2n)\cdot 2^{n+1}-2$，

即 $S_n=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

【点睛】本题主要考查了求等差数列的通项公式以及利用错位相减法求数列的和，属于中档题.

18．(2014高考数学浙江理科·第19题) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=\left(\sqrt{2}\right)^{b_n}\left(n\in N^*\right)$. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1=2,b_3=6+b_2$.

(1)求 a_n 与 b_n；

(2)设 $c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n}\left(n\in N^*\right)$。记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(i)求 S_n；

(ii)求正整数 k，使得对任意 $n\in N^*$，均有 $S_k\geq S_n$.

【答案】解析：(I)由题意，$a_1a_2\cdots a_n=\left(\sqrt{2}\right)^{b_n}\left(n\in N^*\right)$，$b_3-b_2=6$，知 $a_3=\left(\sqrt{2}\right)^{b_3-b_2}=8$，又有 $a_1=2$，得公比 $q=2$（$q=-2$ 舍去），所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n(n\in N^*)$，所以 $a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^{n(n+1)}$，故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为，$b_n=n\left(n+1\right)(n\in N^*)$；

(II)(i)由(I)知，$c_n=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(n\in N^*)$，所以 $S_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n}(n\in N^*)$；

(ii) 因为 $c_1=0,c_2>0,c_3>0,c_4>0$； 当 $n\ge 5$ 时， $c_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n(n+1)}{2^n}-1\right]$， 而 $\frac{n(n+1)}{2^n}-\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}}>0$，得 $\frac{n(n+1)}{2^n}\le\frac{5(5+1)}{2^5}<1$，所以当 $n\ge 5$ 时，$c_n<0$，综上对任意 $n\in N^*$ 恒有 $S_4\ge S_n$，故 $k=4$.

19．(2014 高考数学上海理科·第 23 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n\le a_{n+1}\le 3a_n,n\in\mathbf{N}^*,a_1=1$.

(1)若 $a_2=2,a_3=x,a_4=9$，求 x 的取值范围;

(2)若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $\frac{1}{3}S_n\le S_{n+1}\le 3S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 q 的取值范围;

(3)若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 成等差数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k=1000$，求正整数 k 的最大值，以及 k 取最大值时相应数列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的公差.

【答案】

解析:(1)由条件得 $\frac{2}{3}\le x\le 6$ 且 $\frac{x}{3}\le 9\le 3x$，解得 $3\le x\le 6$.

所以 x 的取值范围是[3,6]. ……3 分

(2)由 $\frac{1}{3}a_n\le 3a_n$，且 $a_n=a_1q^{n-1}\ne 0$，得 $a_n>0$，所以 $\frac{1}{3}S_n\le S_{n+1}$……4 分

又 $\frac{1}{3}a_n\le a_{n+1}\le 3a_n$，所以 $\frac{1}{3}\le q\le 3$. ……5 分

当 $q=1$ 时，$S_n=n$，$S_{n+1}=n+1$，由 $n+1\le 3n$ 得 $S_{n+1}\le 3S_n$ 成立. ……6 分

当 $q\ne 1$ 时，$S_{n+1}\le 3S_n$ 即 $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\le 3\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$.

①若 $1<q\le 3$，则 $(3-q)q^n\ge 2$

由 $q^n\ge q,n\in\mathbf{N}^*$，得 $(3-q)q\ge 2$，所以 $1<q\le 2$……8 分

②若 $\frac{1}{3}\le q<1$，则 $(3-q)q^n\le 2$.

由 $q^n \le q, n \in \mathbf{N}^*$, 得 $(3-q)q \le 2$，所以 $\frac{1}{3} \le q < 1$

综上，q 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$. ……10 分

(3)设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公差为 d．由 $\frac{1}{3}a_n \le a_{n+1} \le 3a_n$，且 $a_1 = 1$，

得 $\frac{1}{3}\left[1+(n-1)d\right] \le 1+nd \le 3\left[1+(n-1)d\right], n = 1, 2, \cdots, k-1$.

即 $\begin{cases}(2n-3)d \ge -2, \\ (2n+1)d \ge -2,\end{cases} n = 1, 2, \cdots, k-1$.

当 $n=1$ 时，$-\frac{2}{3} \le d \le 2$，

当 $n = 2, \cdots k-1$ 时，由 $\frac{-2}{2n+1} > \frac{-2}{2n-3}$, 得 $d \ge \frac{-2}{2n+1}$,

所以 $d \ge \frac{-2}{2k-1} \ge -\frac{2}{3}$. ……14 分

所以 $1000 = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d \ge k + \frac{k(k-1)}{2}\frac{-2}{2k-1}$，即 $k^2 - 2000k + 1000 \le 0$，

得 $k \le 1999$．……17 分

所以 k 的最大值为 1999，$k = 1999$ 时，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公差为 $-\frac{1}{1999}$．……18 分.

题型五：数列中的新定义问题

1．(2017 年高考数学江苏文理科 · 第 19 题) 对于给定的正整数 k, 若数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k-1} + a_{n+k}$

$= 2ka_n$ 对任意正整数 $n(n > k)$ 总成立,则称数列 $\{a_n\}$ 是“$P(k)$ 数列”.

(1)证明:等差数列 $\{a_n\}$ 是“$P(3)$ 数列”;

(2)若数列 $\{a_n\}$ 既是“$P(2)$ 数列”,又是“$P(3)$ 数列”,证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

【答案】(1)见解析(2)见解析

解析:证明:(1)因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,设公差为 d,则 $a_n = a_1 + (n-1)d$，

从而,当 $n\geqslant4$ 时, $a_{n-k}+a_{n+k}=a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d$

$=2a_1+2(n-1)d=2a_n,k=1,2,3$

所以 $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$,

因此等差数列 $\{a_n\}$ 是“ $P(3)$ 数列”;

(2)数列 $\{a_n\}$ 既是“ $P(2)$ 数列”,又是“ $P(3)$ 数列”,因此,

当 $n\geq3$ 时, $a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}=4a_n$,①

当 $n\geq4$ 时, $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$. ②

由①知, $a_{n-3}+a_{n-2}=4a_{n-1}-(a_n+a_{n+1})$,③

$a_{n+2}+a_{n+3}=4a_{n+1}-(a_{n-1}+a_n)$,④

将③④代入②,得 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n,n\geqslant4$,

所以 $a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是等差数列,设其公差为 d'

在①中,取 $n=4$,则 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$,所以 $a_2=a_3-d'$,

在①中,取 $n=3$,则 $a_1+a_2+a_4+a_5=4a_3$,所以 $a_1=a_2-2d'$,

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

2.(2023 年北京卷·第 21 题) 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的项数均为 $m\,(m>2)$,且 $a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$, $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n ,并规定 $A_0=B_0=0$. 对于 $k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$,定义 $r_k=\max\{i\,|\,B_i\leq A_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$,其中, $\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

(1)若 $a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$,求 r_0,r_1,r_2,r_3 的值;

(2)若 $a_1\geq b_1$,且 $2r_j\leq r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1,$,求 r_n ;

(3)证明:存在 $p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$,满足 $p>q,s>t$,使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

【答案】(1) $r_0=0$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$

(2) $r_n=n,n\in\mathbf{N}$

(3)证明见详解

解析：(1)由题意可知：$A_0=0, A_1=2, A_2=3, A_3=6, B_0=0, B_1=1, B_2=4, B_3=7$，

当$k=0$时，则$B_0=A_0=0, B_i>A_0, i=1,2,3$，故$r_0=0$；

当$k=1$时，则$B_0<A_1, B_1<A_1, B_i>A_1, i=2,3$，故$r_1=1$；

当$k=2$时，则$B_i\le A_2, i=0,1, B_2>A_2, B_3>A_2$，故$r_2=1$；

当$k=3$时，则$B_i\le A_3, i=0,1,2, B_3>A_3$，故$r_3=2$；

综上所述：$r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$。

(2)由题意可知：$r_n\le m$，且$r_n\in\mathbf{N}$，

因为$a_n\ge 1, b_n\ge 1$，则$A_n\ge a_1=1, B_n\ge b_1=1$，当且仅当$n=1$时，等号成立，

所以$r_0=0, r_1=1$，

又因为$2r_i\le r_{i-1}+r_{i+1}$，则$r_{i+1}-r_i\ge r_i-r_{i-1}$，即$r_m-r_{m-1}\ge r_{m-1}-r_{m-2}\ge\cdots\ge r_1-r_0=1$，

可得$r_{i+1}-r_i\ge 1$，

反证：假设满足$r_{n+1}-r_n>1$的最小正整数为$1\le j\le m-1$，

当$i\ge j$时，则$r_{i+1}-r_i\ge 2$；当$i\le j-1$时，则$r_{i+1}-r_i=1$，

则$r_m=\left(r_m-r_{m-1}\right)+\left(r_{m-1}-r_{m-2}\right)+\cdots+\left(r_1-r\right)_0+r_0\ge 2\left(m-j\right)+j=2m-j$，

又因为$1\le j\le m-1$，则$r_m\ge 2m-j\ge 2m-\left(m-1\right)=m+1>m$，

假设不成立，故$r_{n+1}-r_n=1$，

即数列$\left\{r_n\right\}$是以首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以$r_n=0+1\times n=n, n\in\mathbf{N}$。

(3)

(i)若$A_m\ge B_m$，构建$S_n=A_n-B_{r_n}, 1\le n\le m$，由题意可得：$S_n\ge 0$，且$S_n$为整数，

反证，假设存在正整数K，使得$S_K\ge m$，

则$A_K-B_{r_K}\ge m, A_K-B_{r_K+1}<0$，可得$b_{r_K+1}=B_{r_K+1}-B_{r_K}=\left(A_K-B_{r_K}\right)-\left(A_K-B_{r_K+1}\right)>m$，

这与$b_{r_K+1}\in\left\{1,2,\cdots,m\right\}$相矛盾，故对任意$1\le n\le m, n\in\mathbf{N}$，均有$S_n\le m-1$.

①若存在正整数N，使得$S_N=A_N-B_{r_N}=0$，即$A_N=B_{r_N}$，

可取$r=p=0, q=N, s=r_N$，使得$A_p+B_s=A_q+B_r$；

②若不存在正整数N，使得$S_N=0$，

因为 $S_n \in \{1,2m\cdots,m-1\}$，且 $1 \le n \le m$，

所以必存在 $1 \le X < Y \le m$，使得 $S_X = S_Y$，

即 $A_X - B_{r_X} = A_Y - B_{r_Y}$，可得 $A_X + B_{r_Y} = A_Y + B_{r_X}$，

可取 $p = X, s = r_Y, q = Y, r = r_X$，使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$；

(ii)若 $A_m < B_m$，构建 $S_n = B_{r_n} - A_n, 1 \le n \le m$，由题意可得：$S_n \le 0$，且 S_n 为整数，

反证，假设存在正整数 K，使得 $S_K \le -m$，

则 $B_{r_K} - A_K \le -m, B_{r_K+1} - A_K > 0$，可得 $b_{r_K+1} = B_{r_K+1} - B_{r_K} = \left(B_{r_K+1} - A_K\right) - \left(B_{r_K} - A_K\right) > m$，

这与 $b_{r_K+1} \in \{1,2,\cdots,m\}$ 相矛盾，故对任意 $1 \le n \le m, n \in \mathbf{N}$，均有 $S_n \ge 1 - m$．

①若存在正整数 N，使得 $S_N = B_{r_N} - A_N = 0$，即 $A_N = B_{r_N}$，

可取 $r = p = 0, q = N, s = r_N$，使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$；

②若不存在正整数 N，使得 $S_N = 0$，

因为 $S_n \in \{-1,-2,\cdots,1-m\}$，且 $1 \le n \le m$，

所以必存在 $1 \le X < Y \le m$，使得 $S_X = S_Y$，

即 $B_{r_X} - A_X = B_{r_Y} - A_Y$，可得 $A_X + B_{r_Y} = A_Y + B_{r_X}$，

可取 $p = X, s = r_Y, q = Y, r = r_X$，使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$；

综上所述：存在 $0 \le p < q \le m, 0 \le r < s \le m$ 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$．

3．(2019·上海·第21题) 数列 $\{a_n\}$ 有 100 项，$a_1 = a$，对任意 $n \in [2,100]$，存在 $a_n = a_i + d, i \in [1, n-1]$，若 a_k 与前 n 项中某一项相等，则称 a_k 具有性质 P．

(1)若 $a_1 = 1$，求 a_4 可能的值；

(2)若 $\{a_n\}$ 不为等差数列，求证：$\{a_n\}$ 中存在满足性质 P；

(3)若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P，这三项和为 C，使用 a,d,c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$．

【答案】(1)3,5,7；(2);(3) $97a + 4656d + c$

【解析】(1)由题意，$a_2 = a_1 + d$=3

①若 a_3、a_4 具有性质 P，则 $a_4=a_3=a_2=3$

②若 a_3、a_4 具有性质 P 而 a_4 不具有性质 P，则 $a_3=a_2=a_1+d=3, a_4=a_2+d=a_3+d\neq a_1+d$, 即 $a_4=5$；

③若 a_3 不具有性质 P，则必有 $a_3=a_2+d\neq a_1+d$, 即 a_3=5；

此时若 a_4 具有性质 P，则 a_4=5；若 a_4 不具有性质 P，则 $a_4=a_3+d=7$

综上所述，a_4 可能的值为 3、5、7

（2）假设 $\{a_n\}$ 中不存在满足性质 P 的项，即对任意 $i,j\in[1,100]$, 均有 $a_i\neq a_j$；

下面数学归纳法证明，$\{a_n\}$ 是等差数列；

①当 $n=2$ 时，$a_2=a_1+d$, 成立；

②设当 $n\le k, k\in[2,99]$ 且 $k\in N^*$ 时，$a_k=a_{k-1}+d$；

则当 $n=k+1$ 时，因为 a_{k+1} 不具有性质 P，故 $a_{k+1}\neq a_i=a_{i-1}+d(i=1,2...,k)$

而又存在 $a_{k+1}=a_i+d(i=1,2,...,k)$ 故，$i=k$，即 $a_{k+1}=a_k+d$；

综上所述，当 $\{a_n\}$ 中不存在满足性质 P 的项时，$\{a_n\}$ 时等差数列成立；

故其逆否命题：当 $\{a_n\}$ 不是等差数列时，$\{a_n\}$ 中存在满足性质 P 的项成立.

（3）由题意，不妨设这三项为 a_p,a_q,a_m，其中 $2\le p<q<m\le 100$;且 $a_p+a_q+a_m=C$

故数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,...,p-1)$ 为等差数列；$\{a_n\}$ $(n=p,p+1,…，q-1)$ 为等差数列；

$\{a_n\}$ $(n=q,q+1,…，\mathrm{m}-1)$ 为等差数列，$\{a_n\}$ $(n=m,...,100)$ 为等差数列；

若存在 $q=p+1$ 或 $m=q+1$ 或 $m=99$ 的情况

则去掉相应的 $\{a_n\}$ $(n=p,p+1,…，q-1)$、$\{a_n\}$ $(n=q,q+1,…，\mathrm{m}-1)$、$\{a_n\}$ $(n=m,...,100)$ 每组等差数列的公差均为 d；

且 $a_{p+1}=a_p+d=a_{p-1}+d$、$a_{q+1}=a_q+d=a_{q-1}+d$、$a_{m+1}=a_m+d=a_{m-1}+d$

故当数列去掉 a_p,a_q,a_m 这三项后，构成首项为 a，公差为 d，项数 97 项的等差数列；

故这 97 项的和 $S_1=97a+\frac{97\times(97-1)}{2}d=97a+4656d$；

故这 100 个数的和 $S=S_1+a_p+a_q+a_m=97a+4656d+C$

4．(2019·江苏·第 20 题) 定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“M 一数列”.

(1)已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5, a_3-4a_2+4a_4=0$，求证:数列 $\{a_n\}$ 为“M 一数列”；

(2)已知数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1=1,\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在"M—数列"$\{c_n\}$$(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数$k$，当$k\leqslant m$时，都有$c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$成立，求$m$的最大值．

【答案】见解析

【解析】(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，所以$a_1\neq 0$，$q\neq 0$

由$\begin{cases}a_2a_4=a_5\\a_3-4a_2+4a_1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}a_1^2q^4=a_1q^4\\a_1q^2-4a_1q+4a_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$.

因此数列$\{a_n\}$为"M—数列".

(2)①因为$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，所以$b_n\neq 0$

由$b_1=1,S_1=b_1$得$\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{b_2}$，则$b_2=2$

由$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，得$S_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$

当$n\geqslant 2$时，由$b_n=S_n-S_{n-1}$，得$b_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}-\dfrac{b_{n-1}b_n}{2\left(b_n-b_{n-1}\right)}$

整理得$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$.

所以数列$\{b_n\}$是首项和公差均为1的等差数列.

因此，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

②由①知，$b_k=k$，$k\in\mathbf{N}^*$.

因为数列$\{c_n\}$为"M–数列"，设公比为q，所以$c_1=1$，$q>0$.

因为$c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$，所以$q^{k-1}\leqslant k\leqslant q^k$，其中$k=1,2,3,\cdots,m$.

当$k=1$时，有$q\geqslant 1$；

当$k=2,3,\cdots,m$时，有$\dfrac{\ln k}{k}\leqslant\ln q\leqslant\dfrac{\ln k}{k-1}$.

设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，得$x=e$.列表如下：

x	(1，e)	e	(e，$+\infty$)
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

因为 $\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 8}{6}<\frac{\ln 9}{6}=\frac{\ln 3}{3}$，所以 $f(k)_{\max}=f(3)=\frac{\ln 3}{3}$.

取 $q=\sqrt[3]{3}$，当 $k=1,2,3,4,5$ 时，$\frac{\ln k}{k}\leqslant\ln q$，即 $k\leqslant q^k$，

经检验知 $q^{k-1}\leqslant k$ 也成立.

因此所求 m 的最大值不小于5.

若 $m\geqslant 6$，分别取 $k=3,6$，得 $3\leqslant q^3$，且 $q^5\leqslant 6$，从而 $q^{15}\geqslant 243$，且 $q^{15}\leqslant 216$，

所以 q 不存在.因此所求 m 的最大值小于6.

5．(2019·北京·理·第 20 题) 已知数列 $\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项($i_1<i_2<\ldots<i_m$)，若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 a_{i_1}，$a_{i_2},\cdots$，a_{i_m} 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列．

(I)写出数列 1，8，3，7，5，6，9 的一个长度为 4 的递增子列；

(II)已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}，长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}．若 $p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

(III)设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 $2s-1$ 个($s=1,2,\cdots$)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

【答案】【解析】(I)满足题意的一个长度为 4 的递增子列为：1，3，5，6.

(II)对于每一个长度为 q 的递增子列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_q}$，都能从其中找到若干个长度为 p 的递增子列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_p}$，此时 $a_{i_p}<a_{i_q}$，

设所有长度为 q 的子列的末项分别为：$\left\{a_{iq_1},a_{iq_2},a_{iq_3},\cdots\right\}$，

所有长度为 p 的子列的末项分别为：$\left\{a_{ip_1},a_{ip_2},a_{ip_3},\cdots\right\}$，则 $a_{n_0}=\min\left\{a_{iq_1},a_{iq_2},a_{iq_3},\cdots\right\}$，

注意到长度为 p 的子列可能无法进一步找到长度为 q 的子列，故 $a_{m_0}\le\min\left\{a_{ip_1},a_{ip_2},a_{ip_3},\cdots\right\}$，

据此可得：$a_{m_0}<a_{n_0}$．

(III)满足题意的一个数列的通项公式可以是 $a_n=\begin{cases}n-1,n\text{为偶数}\\n+1,n\text{为奇数}\end{cases}=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots$，

下面说明此数列满足题意.

很明显数列为无穷数列，且各项均为正整数，任意两项均不相等.

长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，

下面用数学归纳法证明长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 $\left(s=1,2,\cdots\right)$：

当 $n=1$ 时命题显然成立，

假设当 $n=k$ 时命题成立，即长度为 k 末项为 $2k-1$ 的递增子列恰有 2^{k-1} 个，

则当 $n=k+1$ 时，对于 $n=k$ 时得到的每一个子列 $a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k-1$，

可构造：$a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k-1,2\left(k+1\right)-1$ 和 $a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k,2\left(k+1\right)-1$ 两个满足题意的递增子列，则长度为 k+1 末项为 2k+1 的递增子列恰有 $2\times2^{k-1}=2^k=2^{(k+1)-1}$ 个，

综上可得，数列 $a_n=\begin{cases}n-1,n\text{为偶数}\\n+1,n\text{为奇数}\end{cases}=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots$ 是一个满足题意的数列的通项公式.

注：当 $s=3$ 时，所有满足题意的数列为：$\left\{2,3,5\right\},\left\{1,3,5\right\},\left\{2,4,5\right\},\left\{1,4,5\right\}$，

当 $s=4$ 时，数列 $\left\{2,3,5\right\}$ 对应的两个递增子列为：$\left\{2,3,5,7\right\}$ 和 $\left\{2,3,6,7\right\}$.

6．(2018 年高考数学江苏卷·第 26 题) (本小题满分 10 分)设 $n\in\mathbf{N}^*$，对 1，2，…，n 的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，如果当 $s<t$ 时，有 $i_s>i_t$，则称 (i_s,i_t) 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数．例如：对 1，2，3 的一个排列 231，只有两个逆序(2，1)，(3，1)，则排列 231 的逆序数为 2．记 $f_n(k)$ 为 1，2，…，n 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数．

(1)求 $f_3(2),f_4(2)$ 的值；

(2)求 $f_n(2)(n\geq5)$ 的表达式(用 n 表示).

【答案】(1)2　5；(2)n≥5 时，$f_n(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$.

解析：(1)记 $\tau(abc)$ 为排列 abc 的逆序数，对 1，2，3 的所有排列，有

$\tau(123)=0$，$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，$\tau(321)=3$，

所以 $f_3(0)=1$，$f_3(1)=f_3(2)=2$.

对 1，2，3，4 的排列，利用已有的 1，2，3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_4(2)=f_3(2)+f_3(1)+f_3(0)=5$．

(2)对一般的 $n(n\geq4)$的情形，逆序数为 0 的排列只有一个：12…n，所以 $f_n(0)=1$．

逆序数为 1 的排列只能是将排列 12…n 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以 $f_n(1)=n-1$．

为计算 $f_{n+1}(2)$，当 1，2，…，n 的排列及其逆序数确定后，将 n+1 添加进原排列，n+1 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$．

当 $n\geq5$ 时，

$$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\ldots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$$

$$=(n-1)+(n-2)+\ldots+4+f_4(2)=\frac{n^2-n-2}{2},$$

因此，$n\geq5$ 时，$f_n(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$．

7．(2018 年高考数学上海·第 21 题) (本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分)

给定无穷数列 $\{a_n\}$，若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|b_n-a_n|\leqslant1$，则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.

(1)设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，$b_n=a_{n+1}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近，并说明理由；

(2)设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列，记集合 $M=\left\{x\,|\,x=b_i,i=1,2,3,4\right\}$，求 M 中元素的个数 m；

(3)已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，若存在数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，且在 b_2-b_1，b_3-b_2，…，$b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数，求 d 的取值范围.

【答案】(1)接近；(2)3 或 4；(3) $d>-2$．

解析：(1)易得 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1$．所以 $|b_n-a_n|=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left|1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right|$．

因为$0<\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}<1$，所以$\frac{1}{2}\leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$．则对任意$n\in N^*$，都有$|b_n-a_n|<1$．

所以$\{b_n\}$与$\{a_n\}$“接近”.

(2)由题设知$0\leqslant b_1\leqslant 2$，$1\leqslant b_2\leqslant 3$，$3\leqslant b_3\leqslant 5$，$7\leqslant b_4\leqslant 9$．

注意观察$[0,2]\cap[1,3]\neq\varnothing$，$[1,3]\cap[3,5]=\{3\}$，$[3,5]\cap[7,9]=\varnothing$．

再考虑集合M的特点以及“元素的互异性”知：

①b_1,b_2,b_3,b_4各不相同时，$m=4$；②$b_1=b_2$时，此时必有b_3,b_4与它们不同，则$m=3$；

③$b_2=b_3=3$时，此时必有b_1,b_4与它们不同，则$m=3$．

综上所述，$m=3$或4.

(3)由题意知：$|b_{k+1}-a_{k+1}|\leqslant 1$，则$a_{k+1}-1\leqslant b_{k+1}\leqslant a_{k+1}+1$．同理$a_k-1\leqslant b_k\leqslant a_k+1$．

要使$b_{k+1}-b_k>0$，则$[a_{k+1}-1,a_{k+1}+1]\cap[a_k-1,a_k+1]\neq\varnothing$．($[a_{k+1}-1,a_{k+1}+1]$在$[a_k-1,a_k+1]$左侧相交)．所以$a_{k+1}+1>a_k-1$，即$a_{k+1}-a_k>-2$．因为$\{a_n\}$是公差为$d$的等差数列，所以$d>-2$．

8．(2014高考数学江苏·第20题) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若对任意正整数n，总存在正整数m，使得$S_n=a_m$，则称$\{a_n\}$是“H数列”.

(1)若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n$ ($n\in\mathrm{N}^*$)，证明：$\{a_n\}$是“H数列”；

(2)设$\{a_n\}$是等差数列，其首项$a_1=1$，公差$d<0$．若$\{a_n\}$ 是“H数列”，求d的值；

(3)证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n$

($n\in\mathrm{N}^*$) 成立.

【答案】解析：(1) 证明：由已知，当$n\geq 1$时，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2^{n+1}-2^n=2^n$，于是对任意的正整数$n$，总存在正整数$m=n+1$，使得$S_n=2^n=a_m$，所以$\{a_n\}$是“$H$数列”.

(2) 解法一：由已知，得$S_2=2a_1+d=2+d$，因为$\{a_n\}$是“H数列”，所以存在正整数m，使得$S_2=a_m$，即$2+d=1+(m-1)d$，于是$(m-2)d=1$．

因为$d<0$，所以$m-2<0$，故$m=1$，从而$d=-1$．

当$d=-1$时，$a_n=2-n$，$S_n=\frac{n(3-n)}{2}$是小于2的整数，$n\in\mathbf{N}^*$．

于是对任意的正整数 n，总存在正整数 $m=2-S_n=2-\frac{n(3-n)}{2}$，使得 $S_n=2-m=a_m$，

所以 $\{a_n\}$ 是“H 数列”，因此 d 的值为 -1.

解法二：由 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，则 $a_m=1+(m-1)d$，$S_n=n+\frac{n^2-n}{2}d$，

又数列是“H 数列”，不妨取 $n=2$ 时，存在满足条件的正整数 m，

使得 $1+(m-1)d=2+d$，即 $(m-2)d=1$，

(i)当 $m\geq 3$ 时，此时 $d>0$，不符合题意，应舍去;

(ii)当 $m=2$ 时，不存在满足条件的 d；

(iii)当 $m=1$ 时，$d=-1$. 此时数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2-n$，

下面我们一起来验证 $\{a_n\}$ 为“H 数列”:

$a_n=2-n$；$S_n=\frac{3n-n^2}{2}$，此时 $m=\frac{4-3n+n^2}{2}$，容易验证 m 为正整数.

解法三：由题意设 $a_m=1+(m-1)d$；又等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n+\frac{n^2-n}{2}d$；

由题意知对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，$1+(m-1)d=n+\frac{n^2-n}{2}d$ (*);

那么 m 随着 n 的变化而变化，可设满足函数关系式 $m=f(n)$.

又 $d<0$，那么要使(*)对任意自然数 n 恒成立，则 $m=f(n)=\frac{1}{2}n^2+Bn+C$；

代入得：$\frac{1}{2}n^2d+Bnd+(1-d+Cd)=n(1-\frac{d}{2})+\frac{n^2}{2}d$，即有 $\begin{cases}Bd=1-\frac{d}{2}\\1-d+Cd=0\end{cases}$；

又当 $n=1$ 时，$m=n=1$，即 $\frac{1}{2}+B+C=1$，由此可以解得 $B=-\frac{3}{2},C=2,d=-1$.

此时 $a_n=2-n$.

解法四：由 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，且数列 $\{a_n\}$ 是“H 数列”，

则 $S_2=1+a_2>a_2$，又 $d<0$，所以 $S_2=1+a_2=a_1=1$，则 $a_2=0$，从而 $d=a_2-a_1=-1$，

此时 $a_n=2-n$，$S_n=-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$，由 $S_n=a_m$ 得，$m=\frac{n^2-3n+4}{2}$ 为正整数，

从而数列 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

(3) 解法一：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $a_n=a_1+(n-1)d=na_1+(n-1)(d-a_1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $b_n=na_1,c_n=(n-1)(d-a_1)$，则 $a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

下证$\{b_n\}$是“H数列”.

设$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}a_1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

于是对任意的正整数n，总存在正整数$m=\dfrac{n(n+1)}{2}$，使得$T_n=b_m$，所以$\{b_n\}$是“H数列”.

同理可证$\{c_n\}$也是“H数列”.

所以，对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}^*)$成立.

解法二：由(2)的解答过程可知：等差数列$\{b_n\}$中若$\dfrac{b_1}{d_1}=-1$时，$\{b_n\}$是“H数列”，

则$b_n=b_1+(n-1)d_1=2b_1-b_1n$．

同理等差数列$\{c_n\}$中若$\dfrac{c_1}{d_2}=1$时，$\{c_n\}$是“H数列”，$c_n=c_1+(n-1)d_2=c_1n$．

任意的等差数列$\{a_n\}$，则可表示为$a_n=An+B$．

令$-b_1+c_1=A$，$2b_1=B$，此时$b_1=\dfrac{B}{2}$，$c_1=A+\dfrac{B}{2}$．

所以对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个等差“H数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，

使得$a_n=b_n+c_n(n\in N^*)$成立.

9．(2014高考数学北京理科·第20题) 对于数对序列$P(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$，记$T_1(P)=a_1+b_1$，

$T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}(2\le k\le n)$

其中$\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$表示$T_{k-1}(P)$和$a_1+a_2+\cdots+a_k$两个数中最大的数,

(1)对于数对序列$P:(2,5),(4,1)$，求$T_1(P),T_2(P)$的值

(2)记m为a、b、c、d四个数中最小的数，对于由两个数对$(a, b), (c, d)$组成的数对序列$P:(a,b),(c,d)$

和$P':(c,d),(a,b)$，试分别对$m=a$和$m=d$时两种情况比较$T_2(P)$和$T_2(P')$的大小

(3)在由5个数对(11, 8), (5, 2), (16, 11), (11, 11), (4, 6)组成的所有数对序列中，写出一个数对序列P使$T_5(P)$最小，并写出$T_5(P)$的值(只需写出结论).

【答案】解析：(I) $T_1(P)=2+5=7$,

$T_2(P)=1+\max\{T_1(P),2+4\}=1+\max\{7,6\}=8.$

(II) $T_2(P)=\max\{a+b+d,a+c+d\}$,

$T_2(P^{'})=\max\{c+d+b,c+a+b\}$.

当 $m=a$ 时, $T_2(P^{'})=\max\{c+d+b,c+a+b\}=c+d+b$.

因为 $a+b+d\le c+b+d$,且 $a+c+d\le c+b+d$, 所以 $T_2(P)\le T_2(P^{'})$.

当 $m=d$ 时, $T_2(P^{'})=\max\{c+d+b,c+a+b\}=c+a+b$.

因为 $a+b+d\le c+a+b$, 且 $a+c+d\le c+a+b$, 所以 $T_2(P)\le T_2(P^{'})$.

所以无论 $m=a$ 还是 $m=d$, $T_2(P)\le T_2(P^{'})$ 都成立.

(III) 数对序列 $P:(4,6),(11,11),(16,11),(11,8),(5,2)$ 的 $T_5(P)$ 值最小,

$T_1(P)=10,\ T_2(P)=26,\ T_3(P)=42,\ T_4(P)=50,\ T_5(P)=52.$

10．(2016 高考数学江苏文理科·第 20 题) 记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$．对数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$和 U 的子集 T，若 $T=\varnothing$，定义 $S_T=0$；

若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$．例如：$T=\{1,3,66\}$ 时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$．

现设 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是公比为3的等比数列，且当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=30$．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)对任意正整数 k ($1\leqslant k\leqslant 100$)，若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

(3)设 $C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\geqslant S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$．

【答案】(1) $a_n=3^{n-1}$；(2)(3)详见解析；

【官方解答】(1)由已知得 $a_n=a_1\cdot 3^{n-1},n\in N^*$.

于是当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=a_2+a_4=3a_1+27a_1=30a_1$.

又 $S_T=30$，故 $30a_1=30$，即 $a_1=1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{n-1},n\in N^*$.

(2)因为 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，$a_n=3^{n-1}>0,n\in N^*$，

所以 $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots a_k=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\dfrac{3^k-1}{2}<3^k$，

因此，$S_T < a_{k+1}$.

(3)下面分三种情况说明.

①若 D 是 C 的子集，则 $S_C + S_{C\cap D} = S_C + S_D \geqslant S_D + S_D \geqslant 2S_D$.

②若 C 是 D 的子集，则 $S_C + S_{C\cap D} = S_C + S_C = 2S_C \geqslant 2S_D$.

③若 D 不是 C 的子集，且 C 不是 D 的子集.

令 $E = C\cap \complement_U D$，$F = D\cap \complement_U C$，则 $E \neq \phi$，$F \neq \phi$，$E\cap F = \phi$.

于是 $S_C = S_E + S_{C\cap D}$，$S_D = S_F + S_{C\cap D}$，进而由 $S_C \geqslant S_D$ 得 $S_E \geqslant S_F$.

设 k 为 E 中的最大数，l 为 F 中的最大数，则 $k \geqslant 1$，$l \geqslant 1$，$k \neq l$.

由(2)知，$S_E < a_{k+1}$. 于是 $3^{l-1} = a_l \leqslant S_F \leqslant S_E < a_{k+1} = 3^k$，所以 $l-1 < k$，即 $l \leqslant k$.

又 $k \neq l$，故 $l \leqslant k-1$. 从而

$$S_F \leqslant a_1 + a_2 + \cdots a_l = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{l-1} = \frac{3^l - 1}{2} \leqslant \frac{3^{k-1} - 1}{2} = \frac{a_k - 1}{2} \leqslant \frac{S_E - 1}{2},$$

故 $S_E \geqslant 2S_F + 1$，所以 $S_C - S_{C\cap D} \geqslant 2(S_D - S_{C\cap D}) + 1$，即 $S_C + S_{C\cap D} \geqslant 2S_D + 1$.

综合①②③得，$S_C + S_{C\cap D} \geqslant 2S_D$.

民间解答：(1)当 $T = \{2,4\}$ 时，$S_T = a_2 + a_4 = a_2 + 9a_2 = 30$

因此 $a_2 = 3$，从而 $a_1 = \frac{a_2}{3} = 1$，$a_n = 3^{n-1}$；

(2) $S_T \leqslant a_1 + a_2 + \cdots a_k = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{k-1} = \dfrac{3^k - 1}{2} < 3^k = a_{k+1}$；

(3)设 $A = \complement_C (C\cap D)$，$B = \complement_D (C\cap D)$

则 $A\cap B = \varnothing$，$S_C = S_A + S_{C\cap D}$，$S_D = S_B + S_{C\cap D}$，$S_C + S_{C\cap D} - 2S_D = S_A - 2S_B$

因此原题就等价于证明 $S_A \geqslant 2S_B$.

由条件 $S_C \geqslant S_D$ 可知 $S_A \geqslant S_B$.

①若 $B = \varnothing$，则 $S_B = 0$，所以 $S_A \geqslant 2S_B$.

②若 $B \neq \varnothing$，由 $S_A \geqslant S_B$ 可知 $A \neq \varnothing$，设 A 中最大元素为 l，B 中最大元素为 m