专题 01 集合

【考点预测】

1、元素与集合

（1）集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性.

（2）元素与集合的关系：属于 或 不属于，数学符号分别记为：$\in$和$\notin$.

（3）集合的表示方法：列举法、描述法、韦恩图（$venn$图）.

（4）常见数集和数学符号

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	N^*或N_+	Z	Q	R

说明：

①**确定性：**给定的集合，它的元素必须**是确定的**；也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.给定集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，可知$1\in A$,在该集合中，$6\notin A$,不在该集合中；

②**互异性：**一个给定集合中的元素是互不相同的；也就是说，集合中的元素是不重复出现的.集合$A=\{a,b,c\}$应满足$a\neq b\neq c$.

③**无序性：**组成集合的元素间没有顺序之分。集合$A=\{1,2,3,4,5\}$和$B=\{1,3,5,2,4\}$是同一个集合.

④**列举法**

把集合的元素一一列举出来，并用花括号“$\{\quad\}$”括起来表示集合的方法叫做列举法.

⑤**描述法**

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

2、集合间的基本关系

（1）子集（$subset$）：一般地，对于两个集合A、B，如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合A为集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$），读作“A包含于B”（或“B包含A”）.

（2）真子集（$proper\ subset$）：如果集合$A\subseteq B$，但存在元素$x\in B$，且$x\notin A$，我们称集合A是集合B的真子集，记作$A\ddot{U}B$（或$B\supsetneqq A$）.读作“A真包含于B”或“B真包含A”.

（3）相等：如果集合A是集合B的子集（$A\subseteq B$，且集合B是集合A的子集（$B\subseteq A$），此时，集合A与集合B中的元素是一样的，因此，集合A与集合B相等，记作$A=B$.

（4）空集的性质： 我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$；$\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

3、集合的基本运算

（1）交集：一般地，由属于集合A且属于集合B的所有元素组成的集合，称为A与B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}$.

（2）并集：一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为A与B的并集，记作$A\cup B$，即$A\cup B=\{x\mid x\in A,或x\in B\}$.

（3）补集:对于一个集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的补集，简称为集合A的补集，记作$C_U A$，即

$C_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$.

4、集合的运算性质

（1）$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

（3）$A\cap(C_U A)=\varnothing$，$A\cup(C_U A)=U$，$C_U(C_U A)=A$.

【方法技巧与总结】

（1）若有限集A中有n个元素，则A的子集有2^n个，真子集有2^n-1个，非空子集有2^n-1个，非空真子集有2^n-2个.

（2）空集是任何集合A的子集，是任何非空集合B的真子集.

（3）$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow C_U B\subseteq C_U A$.

（4）$C_U(A\cap B)=(C_U A)\cup(C_U B),C_U(A\cup B)=(C_U A)\cap(C_U B)$.

【题型归纳目录】

【题型一】集合的表示

【典例例题】

例1．（2023·安徽·芜湖一中三模(理)）已知集合$A=\left\{x\left|x^2\le 4\right.\right\}$，集合$B=\left\{x\left|x\in N^*\text{ 且}x-1\in A\right.\right\}$，则$B=$（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

【方法技巧与总结】

1.列举法，注意元素互异性和无序性

2.描述法，注意准确理解集合元素，能理解不同符号的元素

例2．（2023·山东聊城·二模）已知集合$A=\{0,1,2\}$，$B=\left\{ab\left|a\in A,b\in A\right.\right\}$，则集合$B$中元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

例3．（2023·安徽·寿县第一中学高三阶段练习（理））设集合$A=\left\{x\mid x^2-x-6<0,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{y\mid y=\ln\left(x^2+1\right),\ x\in A\right\}$，则集合$B$中元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．无数个

例4．（2023·湖南·岳阳一中一模）定义集合A,B的一种运算：$A\otimes B=\{x\mid x=a^2-b,a\in A,b\in B\}$，若$A=\{-1,0\}$，$B=\{1,2\}$，则$A\otimes B$中的元素个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例5．（2023·山东济南·二模）已知集合$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\left\{z\left|z=x^y,x\in A,y\in B\right.\right\}$，则$C$中元素的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例6．（2023·全国·高三专题练习）用$C(A)$表示非空集合A中元素的个数，定义$A*B=\begin{cases}C(A)-C(B),C(A)\ge C(B)\\C(B)-C(A),C(A)<C(B)\end{cases}$，已知集合$A=\left\{x\mid x^2+x=0\right\}$，$B=\left\{x\mid\left(x^2+ax\right)\left(x^2+ax+1\right)=0\right\}$，且$A*B=1$，设实数$a$的所有可能取值构成集合$S$，则$C(S)=$（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【题型二】 集合元素的特征

【典例例题】

例 7．（2023·重庆南开中学模拟预测）已知集合 $A=\{-1,0,1\}$， $B=\{a+b|a\in A,b\in A\}$，则集合 $B=$（　　）

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{-2,-1,1,2\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

【方法技巧与总结】

1.研究集合问题，一定要抓住元素，看元素应满足的属性。

2.研究两（多个）集合的关系时，关键是将两集合的关系转化为元素间的关系。

例 8．（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3,x\in \mathrm{Z},y\in \mathrm{Z}\}$，则 A 中元素的个数为（　　）

A．9　　B．8　　C．5　　D．4

例 9．（2023··模拟预测(理)）已知集合 $A=\{x|x^2-5x\le 0\}$， $B=\{x|x=2k-1,k\in Z\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

例 10．（2023·福建·模拟预测）设集合 $A=\{-2,-1,1,2,3\}$， $B=\{y\,|\,y=\log_2|x|,x\in A\}$ ，则集合 B 元素的个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

例 11．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le 0\\4\sin x,0<x\le\pi\end{cases}$，则集合 $\{x\,|\,f[f(x)]=0\}$ 元素的个数有（　　）

A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

例 12．（2023·上海民办南模中学高三阶段练习）若 $a\in\{-1,3,a^3\}$，则实数 a 的取值集合为______.

【题型三】 集合的关系

【典例例题】

例 13．（2023·江苏南京·高三开学考试）已知集合 $A=\{x\,|\,2^x\le 12\}$，则 $A\cap \mathrm{N}$ 的子集个数为（　　）

A．4　　B．8　　C．16　　D．32

【方法技巧与总结】

1.注意子集和真子集的区别和练习

2.判断集合之间的关系：

（1）定义判断

（2）数形结合判断

例 14．（2023·四川攀枝花·三模（理））设集合 $A=\left\{x\middle|x>a\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-3x+2>0\right\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,1\right]$

C．$\left(2,+\infty\right)$　　D．$\left[2,+\infty\right)$

例 15．（2023·全国·高三专题练习）若集合 $A=\left\{x\in N\middle|x\le\sqrt{2022}\right\}$，实数 a 满足 $\left\{a\middle|2^{a^2-4\sqrt{3}a+12}=1\right\}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\left\{a\right\}\subseteq A$　　B．$a\subseteq A$　　C．$\left\{a\right\}\in A$　　D．$a\notin A$

例 16．（2023·浙江·高三专题练习）已知 $a\in R$，$b\in R$，若集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\left\{a^2,a+b,0\right\}$，则 $a^{2019}+b^{2019}$ 的值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

（多选题）例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\left\{x|\ ax^2+2x+a=0,a\in R\right\}$，若集合 A 有且仅有 2 个子集，则 a 的取值有（　　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

例 18．（2023·浙江·高三专题练习）设集合 A=$\{x|-3\le x\le 2\}$，B=$\{x|k-1\le x\le 2k+1\}$，且 $A\supseteq B$，则实数 k 的取值范围是______________(写成集合形式).

【题型四】 集合的运算-

【典例例题】

（多选题）例 19．（2023·全国·高三专题练习）已知 M、N 均为实数集 R 的子集，且 $N\cap C_RM=\varnothing$，则下列结论中正确的是（　　）

A．$M\cap C_RN=\varnothing$　　B．$M\cup C_RN=R$

C．$C_RM\cup C_RN=C_RM$　　D．$C_RM\cap C_RN=C_RM$

【方法技巧与总结】

1.注意并集与交集的大小关系

2.补集和全集是不可分割的两个概念

例 20．（2023·河南·汝州市第一高级中学模拟预测（文））已知集合

$A=\left\{x\left|\frac{4-x}{x+1}\geq 0\right.\right\},B=\left\{x\left|x^2-(a+1)^2x+2a\left(a^2+1\right)<0\right.\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$\{1\}\cup(2,+\infty)$

C．$\{1\}\cup[2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

例 21．（2023·天津和平·二模）已知全集为 R，集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，集合 $B=\left\{x|-x^2+x<0\right\}$，则 $A\cup\left(\complement_{R}B\right)=$（　　）

A．$(-2,1]$　　B．$(-1,1]$

C．$(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

例 22．（2023·湖北·荆门市龙泉中学二模）已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{x}<1\right.\right\},B=\left\{x\left|\log_3 x\leq 1\right.\right\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$（　　）

A．$\{x|1\leq x\leq 3\}$　　B．$\{x|0<x<1\}$　　C．$\{x|0<x\leq 1\}$　　D．$\{x|1<x\leq 3\}$

例 23．（2023·湖南·长沙一中高三阶段练习）如图，已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\in N_+|1<2^x\leq 8\}$，则图中的阴影部分表示的集合为（　　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{-1,0,3\}$　　C．$\{-1,3\}$　　D．$\{0,1,2\}$

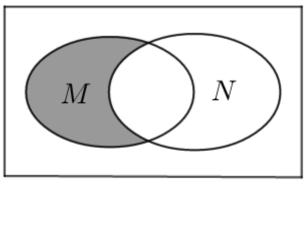
（多选题）例 24．（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $M=\left\{x\left|x^2-3x+2\leq 0\right.\right\}$，$N=\{x|x>-1\}$，则（　　）

A．$N\subseteq M$　　B．$M\subseteq N$

C．$M\cap N\neq\varnothing$　　D．$M\cup\complement_R N=R$

例 25．（2023·江苏·高三专题练习）已知集合 $A=\{x|x<1\},B=\{x\in N|\ln x<1\}$，则 $(C_R A)\cap B=$ ____________

例 26．（2023·浙江·高三专题练习）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\in Z||x-1|<3\}$，$N=\{-4,-2,0,1,5\}$，则下列 Venn 图中阴影部分的集合为__________.



【题型五】 集合与排列组合

【典例例题】

例 27．（2023·浙江温州·三模）设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\subseteq\mathbf{N}^*$，定义：集合 $Y=\left\{a_i+a_j\left|a_i,a_j\in X,i,j\in N^*,i\neq j\right.\right\}$，集合 $S=\{x\cdot y|x,y\in Y,x\neq y\}$，集合 $T=\left\{\dfrac{x}{y}\middle|x,y\in Y,x\neq y\right\}$，分别用 $|S|$，$|T|$ 表示集合 S，T 中元素的个数，则下列结论可能成立的是（　　）

A．$|S|=6$　　B．$|S|=16$　　C．$|T|=9$　　D．$|T|=16$

【方法技巧与总结】

利用排列组合思想求集合或者集合中元素的个数，需要运用逻辑分析和转化化归的思想

例 28．（2023·全国·高三专题练习（理））设 A 是集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 的子集，只含有 3 个元素，且不含相邻的整数，则这种子集 A 的个数为（　　）

A．32　　B．56　　C．72　　D．84

例 29．（2023·安徽蚌埠·三模（理））设集合 $M=\left\{x\left|x=C_5^m,m\in N^*,m\leq 5\right.\right\}$，则 M 的子集个数为（　　）

A．8　　B．16　　C．32　　D．64

例 30．（2023·全国·高三专题练习）$A_n=\left\{x\,|\,2^n<x<2^{n+1},x=3m,m\in N\right\}$，若 $|A_n|$ 表示集合 A_n 中元素的个数，则 $|A_5|=$_______，则 $|A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_{10}|=$_______.

例 31．（2023·全国·高三专题练习）已知有限集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，定义集合 $B=\left\{a_i+a_j\left|1\leq i<j\leq n,i,j\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$ 中的元素的个数为集合 A 的“容量”，记为 $L(A)$．若集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\left|1\leq x\leq 3\right.\right\}$，则 $L(A)=$______；若集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\left|1\leq x\leq n\right.\right\}$，且 $L(A)=4041$，则正整数 n 的值是______.

【题型六】 新定义

【典例例题】

例 32．（2023·上海市进才中学高三期中）设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集，如果任意的 $a,b\in S$，有 $ab\in S$，则称 S 关于数的乘法是封闭的.若 T、V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个没有公共元素的非空子集，$T\cup V=\mathbf{Z}$．若任意的 $a,b,c\in T$，有 $abc\in T$，同时，任意的 $x,y,z\in V$，有 $xyz\in V$，则下列结论恒成立的是(　　)

A．T、V 中至少有一个关于乘法是封闭的

B．T、V 中至多有一个关于乘法是封闭的

C．T 、V 中有且只有一个关于乘法是封闭的

D．T、V 中每一个关于乘法都是封闭的

【方法技巧与总结】

1.新定义题核心在于读懂题意。读懂里边的数学知识，一般情况下，它所涉及到的知识和方法并不难，难在“翻译”

2.新定义题，主要是在题干中定义“新的概念，新的计算公式，新的运算法则，新的定理”，要根据这些新定义去解决问题，有时为了有助于理解，还可以用类比的方法理解。

例 33．（2023·上海市松江二中高三开学考试）设集合$S,T,S\subseteq N^{*},T\subseteq N^{*},S,T$中，至少有两个元素，且$S,T$满足：①对于任意$x,y\in S$，若$x\neq y$，都有$xy\in T$；②对于任意$x,y\in T$，若$x<y$，则$\frac{y}{x}\in S$.若S有4个元素，则$S\cup T$有__________个元素.

例 34．（2023·全国·高三专题练习）在整数集中，被4除所得余数为k的所有整数组成一个“类”，记为$[k]$，即$[k]=\{4n+k|n\in Z\},k=0,1,2,3$.给出下列四个结论.

①$2021\in[1]$；②$-1\in[1]$；③$Z=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$；④“整数$a,b$属于同一“类””的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中正确的结论是__________（填所有正确的结论的序号）.

例 35．（2023·全国·高三专题练习）若一个集合是另一个集合的子集，则称两个集合构成“鲸吞”；若两个集合有公共元素，且互不为对方子集，则称两个集合构成“蚕食”，对于集合$A=\{-1,2\}$，$B=\{x|ax^2=2,a\geq 0\}$，若这两个集合构成“鲸吞”或“蚕食”，则a的取值集合为_____.

例 36．（2023·全国·高三专题练习）已知数集$A=[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$．若存在$\lambda\in R$，使得对任意$a\in A$都有$\frac{\lambda}{a}\in A$，则称A为完美集，给出下列四个结论：

①存在$t\in(0,+\infty)$，使得A为完美集；

②存在$t\in(-\infty,0)$，使得A为完美集；

③如果$t\notin Z$，那么A一定不为完美集；

④使得A为完美集的所有t的值之和为-2.

其中，所有正确结论的序号是______.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·河北·模拟预测）已知全集$I=\{1,2,3,4,5\},M=\{2,3\},N=\{3,4,5\}$，则$M\cup(\complement_I N)=$（　　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3,5\}$　　D．$\{2,3,4,5\}$

2．（2023·陕西·模拟预测（理））已知集合$A=\{a|y=a+1,y>2\}$，集合

$B=\{b|b=x+1,x>2\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$（　　）

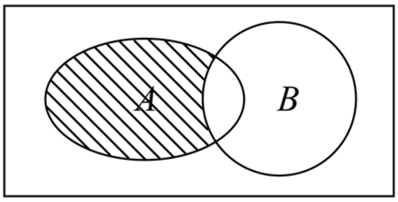
A．$(1,3]$　　　　B．$(-\infty,3]$

C．$(1,+\infty)$　　　　D．$(1,3)$

3．（2023·江苏盐城·三模）已知集合$U=\{x|1<x<6,x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{2,3\}$，$B=\{2,4,5\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A．$\{4,5\}$　　B．$\{2,3,4,5\}$　　C．$\{2\}$　　D．$\{2,4,5\}$

4．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））若全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid y=\sqrt{5-x},x\in\mathrm{N}\},B=\{x\mid x\le 3\}$，则图中阴影部分表示的集合为（　　）



A．$\{4,5\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{0,1,2,3\}$　　D．$\{3,4,5\}$

5．（2023·江苏连云港·模拟预测）已知集合$A=\{x|-1<x<5\}$，$B=\{x\in\mathrm{Z}|1<x<8\}$，则$A\cap B$的子集个数为（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．9

6．（2023·河南·模拟预测（文））设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,3\}$，则（　　）

A．$U=A\cup B$　　B．$U=(\complement_U A)\cup B$　　C．$U=A\cup(\complement_U B)$　　D．$U=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

7．（2023·陕西·模拟预测（理））已知集合$A=\{x\mid x^2-3x-4=0\}$，$B=\{x\mid a<x<a^2\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[4,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)\cup(2,4)$　　D．$[-1,2]\cup[4,+\infty)$

8．（2023·四川攀枝花·三模（理））设集合$A=\{x|x>a\}$，$B=\{x|x^2-3x+2>0\}$，若$A\subseteq B$，则实数a的取值范围是（　　）．

A．$(-\infty,1)$　　　　B．$(-\infty,1]$

C．$(2,+\infty)$　　　　D．$[2,+\infty)$

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）已知集合A，B满足$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\mathbf{Q}$，全集$U=\mathbf{R}$，则下列说法中可能正确的有（　　）

A．$\complement_U A$没有最大元素，$\complement_U B$有一个最小元素　B．A有一个最大元素，B没有最小元素

C．A 有一个最大元素，B 有一个最小元素　D．A 没有最大元素，B 也没有最小元素

10．（2023·全国·高三专题练习）设$[x]$表示不大于x的最大整数，已知集合

$M=\{x|-2<[x]<2\}$，$N=\{x|x^2-5x<0\}$，则（　　）

A．$[\lg 200]=2$　　B．$M\cap N=\{x|0<x<2\}$

C．$[\lg 2-\lg 3+\lg 5]=1$　　D．$M\cup N=\{x|-1\le x<5\}$

11．（2023·全国·高三专题练习）设$A=\{x|x^2-8x+12=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若$A\cap B=B$，则实数a的值可以是（　　）

A．0　　B．$\dfrac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

12．（2023·全国·高三专题练习）对任意 A，$B\subseteq R$，记$A\oplus B=\{x\,|\,x\in A\cup B，x\notin A\cap B\}$，则称$A\oplus B$为集合 A，B 的对称差．例如，若$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则$A\oplus B=\{1,4\}$，下列命题中，为真命题的是（　　）

A．若 A，$B\subseteq R$ 且 $A\oplus B=B$，则$A=\varnothing$

B．若 A，$B\subseteq R$ 且 $A\oplus B=\varnothing$，则$A=B$

C．若 A，$B\subseteq R$ 且 $A\oplus B\subseteq A$，则$A\subseteq B$

D．存在 A，$B\subseteq R$，使得$A\oplus B=\complement_R A\oplus\complement_R B$

三、填空题

13．（2023·全国·高三专题练习）已知 A＝{x∈R|2a≤x≤a＋3},B＝{x∈R|x<－1 或 x>4}，若$A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________．

14．（2023·全国·高三专题练习）已知集合$A=\{y|y=x^2-2x,x\in R\}$，

$B=\{y|y=-x^2+2x+6,x\in R\}$，则$A\cap B=$______．

15．（2023·全国·高三专题练习）2021 年是中国共产党成立 100 周年，电影频道推出“经典频传：看电影，学党史”系列短视频，传扬中国共产党的伟大精神，为广大青年群体带来精神感召.现有《青春之歌》《建党伟业》《开国大典》三支短视频，某大学社团有 50 人，观看了《青春之歌》的有 21 人，观看了《建党伟业》的有 23 人，观看了《开国大典》的有 26 人.其中，只观看了《青春之歌》和《建党伟业》的有 4 人，只观看了《建党伟业》和《开国大典》的有 7 人，只观看了《青春之歌》和《开国大典》的有 6 人，三支短视频全观看了的有 3 人，则没有观看任何一支短视频的人数为________．

16．（2023·全国·高三专题练习）在整数集中，被 4 除所得余数为k的所有整数组成一个“类”，记为$[k]$，即$[k]=\{4n+k|n\in Z\},k=0,1,2,3$.给出下列四个结论.

①$2021\in[1]$；②$-1\in[1]$；③$Z=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$；④“整数$a,b$

属于同一“类””的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中正确的结论是__________（填所有正确的结论的序号）.

四、解答题

17.（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{x|-1<x\leq 5\}$，$B=\{x|a+1\leq x\leq 3a-1\}$.

(1)若 $a=3$，求图中阴影部分 M；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

18.（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{x|x^2-x-12\leq 0\}$，

$B=\{x|x^2-2x+1-m^2\leq 0, m>0\}$.

(1)若 $m=2$，求 $A\cap(\complement_R B)$；

(2) $x\in A$ 是 $x\in B$ 的___________条件，若实数 m 的值存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.（请在①充分不必要；②必要不充分；③充要；中任选一个，补充到空白处）注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分.

19.（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leq 0\}$，$B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$.

(1)若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围;

(2)当 $x\in R$ 时，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围;

20.（2023·全国·高三专题练习）已知全集 $U=R$，集合 $A=[-2,1), B=\{x|2a<x<a+3\}$.

(1)若 $a=-\dfrac{1}{2}$，求 $A\cup(\complement_U B)$.

(2) $p:x\in A, q:x\in B$．若 p 是 q 的充分不必要条件，求 a 的取值范围.

21.（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 的定义域为 A，$g(x)=-x^2+2$ 的值域为 B，记 $M=(A\cap B)\cap Z$，其中 Z 表示整数集.

(1)求集合 M;

(2)若 $C=\{x|ax=1\}$，且 $C\subseteq M$，求实数 a 的所有可能值．

22．（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{x|-2<x<7\}$，$B=\{x|a\le x\le 3a-2\}$．

(1)若 $a=4$，求 $A\cup B$、$\left(\complement_R A\right)\cap B$；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围

专题01 集合

【考点预测】

1、元素与集合

（1）集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性.

（2）元素与集合的关系：属于 或 不属于，数学符号分别记为：$\in$和$\notin$.

（3）集合的表示方法：列举法、描述法、韦恩图（$venn$图）.

（4）常见数集和数学符号

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	N^*或N_+	Z	Q	R

说明：

①**确定性：**给定的集合，它的元素必须**是确定的**；也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.给定集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，可知$1\in A$,在该集合中，$6\notin A$,不在该集合中；

②**互异性：**一个给定集合中的元素是互不相同的；也就是说，集合中的元素是不重复出现的.集合$A=\{a,b,c\}$应满足$a\neq b\neq c$.

③**无序性：**组成集合的元素间没有顺序之分。集合$A=\{1,2,3,4,5\}$和$B=\{1,3,5,2,4\}$是同一个集合.

④**列举法**

把集合的元素一一列举出来，并用花括号“$\{\quad\}$”括起来表示集合的方法叫做列举法.

⑤**描述法**

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

2、集合间的基本关系

（1）子集（*subset*）：一般地，对于两个集合A、B，如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合A为集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$），读作“A包含于B”（或“B包含A”）.

（2）真子集（*proper subset*）：如果集合$A\subseteq B$，但存在元素$x\in B$，且$x\notin A$，我们称集合A是集合B的真子集，记作AÜB（或$B\supsetneqq A$）.读作“A真包含于B ”或“B真包含A ”.

（3）相等：如果集合A是集合B的子集（$A\subseteq B$，且集合B是集合A的子集（$B\subseteq A$），此时，集合A与集合B中的元素是一样的，因此，集合A与集合B相等，记作$A=B$.

（4）空集的性质： 我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$；$\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

3、集合的基本运算

（1）交集：一般地，由属于集合A且属于集合B的所有元素组成的集合，称为A与B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}$.

（2）并集：一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为A与B的并集，记作$A\cup B$，即$A\cup B=\{x\mid x\in A,或x\in B\}$.

（3）补集:对于一个集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的补集，简称为集合A的补集，记作$C_U A$，即

$C_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$.

4、集合的运算性质

（1）$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

（3）$A\cap(C_U A)=\varnothing$，$A\cup(C_U A)=U$，$C_U(C_U A)=A$.

【方法技巧与总结】

（1）若有限集A中有n个元素，则A的子集有2^n个，真子集有2^n-1个，非空子集有2^n-1个，非空真子集有2^n-2个.

（2）空集是任何集合A的子集，是任何非空集合B的真子集.

（3）$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow C_U B\subseteq C_U A$.

（4）$C_U(A\cap B)=(C_U A)\cup(C_U B)$, $C_U(A\cup B)=(C_U A)\cap(C_U B)$.

【题型归纳目录】

题型一：集合的表示

题型二：集合元素的特征

题型三：集合的关系

题型四：集合的运算

题型五：集合与排列组合

题型六：新定义

【题型一】集合的表示

【典例例题】

例1．（2023·安徽·芜湖一中三模（理））已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2\le4\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|x\in N^*\text{ 且}x-1\in A\right\}$，则 $B=$（　　）

A． $\{0,1\}$　　B． $\{0,1,2\}$　　C． $\{1,2,3\}$　　D． $\{1,2,3,4\}$

答案：C

【解析】

分析：

化简集合 A，根据集合 B 中元素的性质求出集合 B.

【详解】

$\because A=\left\{x\middle|x^2\le4\right\}=[-2,2]$， $B=\left\{x\middle|x\in N^*\text{ 且}x-1\in A\right\}$，

$\therefore B=\{1,2,3\}$，

故选：C

【方法技巧与总结】

1.列举法，注意元素互异性和无序性

2.描述法，注意准确理解集合元素，能理解不同符号的元素

例2．（2023·山东聊城·二模）已知集合 $A=\{0,1,2\}$， $B=\left\{ab\middle|a\in A,b\in A\right\}$，则集合 B 中元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

答案：C

【解析】

分析：

由列举法列出集合 B 的所有元素，即可判断；

【详解】

解：因为 $A=\{0,1,2\}$， $a\in A,b\in A$，所以 $ab=0$ 或 $ab=1$ 或 $ab=2$ 或 $ab=4$，

故 $B=\left\{ab\middle|a\in A,b\in A\right\}=\{0,1,2,4\}$，即集合 B 中含有 4 个元素；

故选：C

例3．（2023·安徽·寿县第一中学高三阶段练习（理））设集合 $A=\left\{x\mid x^2-x-6<0,\ x\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{y\mid y=\ln\left(x^2+1\right),\ x\in A\right\}$，则集合 B 中元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．无数个

答案：B

【解析】

分析：

先解出集合A，再按照对数的运算求出集合B，即可求解.

【详解】

由$x^2-x-6<0$，解得$-2<x<3$，故$A=\{-1,0,1,2\}$，

$\ln\left[(-1)^2+1\right]=\ln(1^2+1)=\ln 2,\ln\left(0^2+1\right)=0,\ln(2^2+1)=\ln 5$，

故$B=\{\ln 2,0,\ln 5\}$，集合B中元素个数为3.

故选：B.

例 4.（2023·湖南·岳阳一中一模）定义集合A,B的一种运算：

$A\otimes B=\{x\mid x=a^2-b,a\in A,b\in B\}$，若$A=\{-1,0\}$，$B=\{1,2\}$，则$A\otimes B$中的元素个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案：C

【解析】

分析：

根据集合的新定义确定集合中的元素.

【详解】

因为$A\otimes B=\{x\mid x=a^2-b,a\in A,b\in B\}$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{1,2\}$，

所以$A\otimes B=\{0,-1,-2\}$，

故集合$A\otimes B$中的元素个数为3，

故选：C.

例 5.（2023·山东济南·二模）已知集合$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\left\{z\middle|z=x^y,x\in A,y\in B\right\}$，则$C$中元素的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案：C

【解析】

分析：

根据题意写出集合C的元素，可得答案.

【详解】

由题意，当$x=1$时，$z=x^y=1$，当$x=2$，$y=2$时，$z=x^y=4$，

当$x=2$，$y=4$时，$z=x^y=16$，

即C中有三个元素，

故选：C

例 6.（2023·全国·高三专题练习）用$C(A)$表示非空集合A中元素的个数，定义

$A*B=\begin{cases}C(A)-C(B),C(A)\ge C(B)\\C(B)-C(A),C(A)<C(B)\end{cases}$，已知集合 $A=\{x\mid x^2+x=0\}$，

$B=\{x\mid(x^2+ax)(x^2+ax+1)=0\}$，且 $A*B=1$，设实数 a 的所有可能取值构成集合 S，则 $C(S)=$（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

答案：D

【解析】

根据条件可得集合 B 要么是单元素集，要么是三元素集，再分这两种情况分别讨论计算求解.

【详解】

由 $A=\{x\mid x^2+x=0\}$，可得 $A=\{-1,0\}$

因为 $(x^2+ax)(x^2+ax+1)=0$ 等价于 $x^2+ax=0$ 或 $x^2+ax+1=0$，

且 $A=\{-1,0\},A*B=1$，所以集合 B 要么是单元素集，要么是三元素集.

（1）若 B 是单元素集，则方程 $x^2+ax=0$ 有两个相等实数根，方程 $x^2+ax+1=0$ 无实数根，故 $a=0$；

（2）若 B 是三元素集，则方程 $x^2+ax=0$ 有两个不相等实数根，方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个相等且异于方程 $x^2+ax=0$ 的实数根，即 $a^2-4=0\Rightarrow a=\pm2$ 且 $a\ne0$.

综上所求 $a=0$ 或 $a=\pm2$，即 $S=\{0,-2,2\}$，故 $C(S)=3$，

故选：D.

【点睛】

关键点睛：本题以 $A*B$ 这一新定义为背景，考查集合中元素个数问题，考查分类讨论思想的运用，解答本题的关键是由新定义分析得出集合 B 要么是单元素集，要么是三元素集，即方程方程 $x^2+ax=0$ 与方程 $x^2+ax+1=0$ 的实根的个数情况，属于中档题.

【题型二】 集合元素的特征

【典例例题】

例 7．（2023·重庆南开中学模拟预测）已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{a+b\,|\,a\in A,b\in A\}$，则集合 $B=$（　　）

A．$\{-1,1\}$　　　　B．$\{-1,0,1\}$　　　　C．$\{-2,-1,1,2\}$　　　　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

答案：D

【解析】

分析：

根据 $A=\{-1,0,1\}$ 求解 $B=\{a+b\,|\,a\in A,b\in A\}$ 即可

【详解】

由题，当 $a\in A,b\in A$ 时 $a+b$ 最小为 $(-1)+(-1)=-2$，最大为 $1+1=2$，且可得

$(-1)+0=-1,0+0=0,0+1=1$，故集合 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$

故选：D

【方法技巧与总结】

1.研究集合问题，一定要抓住元素，看元素应满足的属性。

2.研究两（多个）集合的关系时，关键是将两集合的关系转化为元素间的关系。

例 8．（2023·全国·高三专题练习）已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3,x\in Z,y\in Z\}$，则 A 中元素的个数为（　　）

A．9　　　　B．8　　　　C．5　　　　D．4

答案：A

【解析】

分析：

根据 x，y 满足的关系式求得 x，y 的可能值，从而求得集合元素个数.

【详解】

由 $x^2+y^2\le 3$，得 $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}$，

又 $x\in Z$，$y\in Z$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$，

易知 x 与 y 的任意组合均满足条件，所以 A 中元素的个数为 $3\times 3=9$.

故选：A.

例 9．（2023··模拟预测（理））已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-5x\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x=2k-1,k\in Z\right\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

答案：B

【解析】

分析：

解不等式求出 $A=\left\{x\middle|0\le x\le 5\right\}$，从而得到不等式组，求出 k 的值，进而得到 $A\cap B$ 中的元素，求出答案.

【详解】

由 $x^2-5x\le 0$ 得：$0\le x\le 5$，所以 $A=\left\{x\middle|0\le x\le 5\right\}$，又 $B=\left\{x\middle|x=2k-1,k\in Z\right\}$，令

$0\le 2k-1\le 5$，解得：$\frac{1}{2}\le k\le 3$，$k\in Z$，当 $k=1$ 时，$x=1$，当 $k=2$ 时，$x=3$，当 $k=3$ 时，

$x=5$，故 $A\cap B$ 中元素的个数为 3.

故选：B

例 10．（2023·福建·模拟预测）设集合 $A=\{-2,-1,1,2,3\}$， $B=\{y\mid y=\log_2|x|,x\in A\}$ ，则集合 B 元素的个数为（　　）

A． 2　　　　B． 3　　　　C． 4　　　　D． 5

答案：B

【解析】

分析：

根据集合 B 的描述，结合对数函数性质列举出元素即可.

【详解】

当 $x=\pm2$ 时，$y=1$；

当 $x=\pm1$ 时，$y=0$；

当 $x=3$ 时， $y=\log_2 3$.

故集合 B 共有 3 个元素.

故选：B.

例 11．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le0\\4\sin x,0<x\le\pi\end{cases}$，则集合 $\{x\mid f[f(x)]=0\}$ 元素的个数有（　　）

A． 2个　　　　B． 3个　　　　C． 4个　　　　D． 5个

答案：D

【解析】

分析：

根据分段函数 $f(x)$ 解析式，结合集合元素要满足的性质 $f\left[f(x)\right]=0$，通过分类讨论求所有满足条件的 x 的值，进而确定集合中元素的个数.

【详解】

当 $x\le0$ 时， $f(x)=x^2=0$，解得 $x=0$，

当 $0<x\le\pi$ 时，若 $f(x)=4\sin x=0$，解得 $x=\pi$，

当 $x\le0$ 时，若 $f(x)=x^2=\pi$，解得 $x=-\sqrt{\pi}$，

当 $0<x\le\pi$ 时，若 $f(x)=4\sin x=\pi$，则 $\sin x=\dfrac{\pi}{4}$，解得 $x=\arcsin\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\pi-\arcsin\dfrac{\pi}{4}$.

又∵ $f\left[f(x)\right]=0$

∴ $f(x)=0$ 或 $f(x)=\pi$

∴ $x=0$ 或 $x=\pi$ 或 $x=-\sqrt{\pi}$ 或 $x=\arcsin\dfrac{\pi}{4}$ 或 $x=\pi-\arcsin\dfrac{\pi}{4}$.

∴集合 $\{x|f\left[f(x)\right]=0\}$ 元素的个数有 5 个.

故选：D．

例 12．（2023·上海民办南模中学高三阶段练习）若$a\in\left\{-1,3,a^{3}\right\}$，则实数 a 的取值集合为

______．

答案：$\{0,1,3\}$

【解析】

分析：

根据元素的确定性和互异性可求实数 a 的取值．

【详解】

因为$a\in\left\{-1,3,a^{3}\right\}$，故$a=-1$或$a=3$或$a=a^{3}$，

当$a=-1$时，$a^{3}=-1$，与元素的互异性矛盾，舍；

当$a=3$时，$a^{3}=27$，符合；

当$a=a^{3}$时，$a=0$或$a=\pm1$，根据元素的互异性，$a=0,1$符合，

故 a 的取值集合为$\{0,1,3\}$．

故答案为：$\{0,1,3\}$

【题型三】 集合的关系

【典例例题】

例 13．（2023·江苏南京·高三开学考试）已知集合$A=\{x\mid 2^{x}\le 12\}$，则$A\cap \mathrm{N}$的子集个数为

（　　）

A．4　　　　B．8　　　　C．16　　　　D．32

答案：C

【解析】

分析：

求出$A\cap \mathrm{N}=\{0,1,2,3\}$，即得解．

【详解】

解：由题得$2^{x}\le 12=2^{\log_{2}12},\therefore x\le\log_{2}12$．

因为$\log_{2}8<\log_{2}12<\log_{2}16,\therefore 3<\log_{2}12<4$．

所以$A\cap \mathrm{N}=\{0,1,2,3\}$．

所以$A\cap \mathrm{N}$的子集个数为$2^{4}=16$个．

故选：C

【方法技巧与总结】

1.注意子集和真子集的区别和练习

2.判断集合之间的关系：

（1）定义判断

（2）数形结合判断

例 14．（2023·四川攀枝花·三模（理））设集合 $A=\{x|x>a\}$，$B=\{x|x^2-3x+2>0\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$

C．$(2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

答案：D

【解析】

分析：

先求出集合 B，再由 $A\subseteq B$ 求出实数 a 的范围.

【详解】

$B=\{x|x^2-3x+2>0\}=\{x|x>2$ 或 $x<1\}$.

因为集合 $A=\{x|x>a\}$，$A\subseteq B$，所以 $a\geq 2$.

故选：D

例 15．（2023·全国·高三专题练习）若集合 $A=\{x\in N|x\leq\sqrt{2022}\}$，实数 a 满足 $\{a|2^{a^2-4\sqrt{3}a+12}=1\}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\{a\}\subseteq A$　　B．$a\subseteq A$　　C．$\{a\}\in A$　　D．$a\notin A$

答案：D

【解析】

分析：

根据题意得 $a=2\sqrt{3}$，再根据元素与集合，集合与集合关系求解即可.

【详解】

解：因为 $2^{a^2-4\sqrt{3}a+12}=1$，所以 $a^2-4\sqrt{3}a+12=0$，解得 $a=2\sqrt{3}$，

因为 $A=\{x\in N|x\leq\sqrt{2022}\}$，

所以 $a\notin A$.所以 $\{a\}\subseteq A$，$a\subseteq A$，$\{a\}\in A$ 均为错误表述.

故选：D

例 16．（2023·浙江·高三专题练习）已知 $a\in R$，$b\in R$，若集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2019}+b^{2019}$ 的值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2