# 北京市东城区2023-2024学年高二下学期期末统一检测数学试题

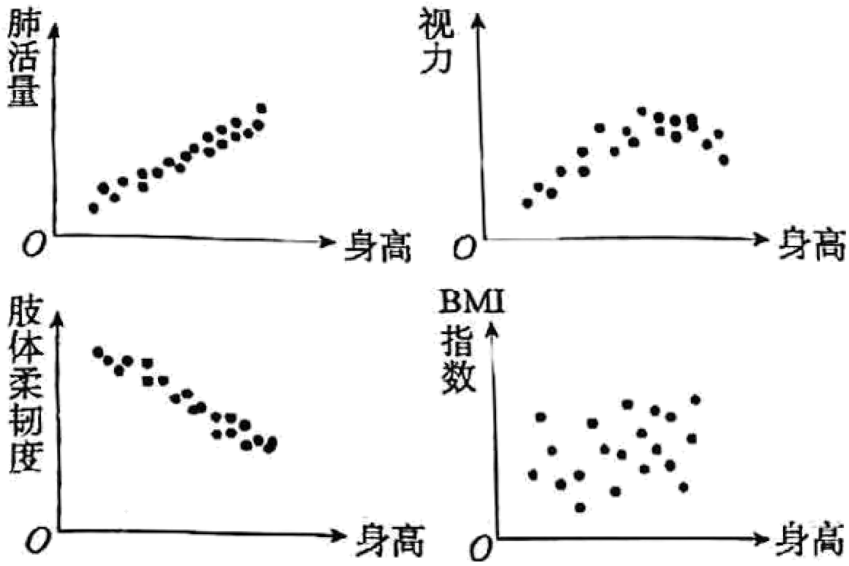
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、单选题

1．已知集合$M=\{0,a,a^2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，若$1\in M$，则$M\cap N=$（　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

2．某校学生科研兴趣小组为了解1~12岁儿童的体质健康情况，随机调查了20名儿童的相关数据，分别制作了肺活量、视力、肢体柔韧度、BMI指数和身高之间的散点图，则与身高之间具有正相关关系的是（　）




A．肺活量　　B．视力　　C．肢体柔韧度　　D．BMI指数

3．已知$x,y\in \mathrm{R}$，且$x>y$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$x^2>y^2$　　B．$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　C．$\ln x>\ln y$　　D．$2^x>2^y$

4．袋中有10个大小相同的小球，其中7个黄球，3个红球.每次从袋子中随机摸出一个球，摸出的球不再放回，则在第一次摸到黄球的前提下，第二次又摸到黄球的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{3}{10}$

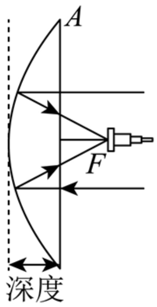
5．已知$2^a=3$，$\log_4 5=b$，则$2^{a-2b}$的值为（　）

A．15　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$-2$

6．A，$B$，$C$三所大学发布了面向高二学生的夏令营招生计划，每位学生只能报一所大学.某中学现有四位学生报名.若每所大学都有该中学的学生报名，则不同的报名方法共有（　）

A．30 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．81 种

7．2024 年 3 月 20 号，我国成功发射鹊桥二号中继卫星，其通过一个大型可展开的星载天线，实现了月球背面与地球之间的信号传输.星载天线展开后形成一把直径（口径）为$4.2\mathrm{m}$的“金色大伞”，它的曲面与轴截面的交线为抛物线，在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入接收天线，经反射聚集到焦点$F$处.若“金色大伞”的深度为$0.49\mathrm{m}$，则“金色大伞”的边缘A点到焦点$F$的距离为（　）




A．$2.25\mathrm{m}$　　B．$2.74\mathrm{m}$　　C．$4.5\mathrm{m}$　　D．$4.99\mathrm{m}$

8．已知直线$l: mx-y-2m+5=0$被圆$\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=4$截得的弦长为整数，则满足条件的直线$l$共有（　）

A．1 条　　B．2 条　　C．3 条　　D．4 条

9．已知函数$f\left(x\right)=a\left(x-a\right)\left(x-b\right)^2\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，则“$b>a>0$”是“$b$为$f\left(x\right)$的极小值点”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．《孙子算经》是中国南北朝时期重要的数学著作，书中的“中国剩余定理”对同余除法进行了深入的研究.现给出一个同余问题：如果$a$和$b$被$m$除得的余数相同，那么称$a$和$b$对模$m$同余，记为$a\equiv b\left(\mathrm{mod}m\right)$.若$a=\mathrm{C}_{2024}^{0}+\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 3+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 3^2+\cdots+\mathrm{C}_{2024}^{2024}\times 3^{2024}, a\equiv b\left(\mathrm{mod}5\right)$，则$b$的值可以是（　）

A．2023　　B．2024　　C．2025　　D．2026

## 二、填空题

11．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln x$ 的定义域是________.

12．已知双曲线 $C$ 的焦点为 $\left(-2,0\right)$ 和 $\left(2,0\right)$，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 $C$ 的方程为________.

13．已知二项式 $\left(2x+1\right)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ 的所有项的系数和为 $243$，则 $n=$___________；$a_2=$________.

14．某学校要求学生每周校园志愿服务时长不少于 1 小时.某周可选择的志愿服务项目如下表所示：

| 岗位 | 环保宣讲 | 器材收纳 | 校史讲解 | 食堂清扫 | 图书整理 |
|---|---|---|---|---|---|
| 时长 | 20 分钟 | 20 分钟 | 25 分钟 | 30 分钟 | 40 分钟 |

每位学生每天最多可选一个项目，且该周同一个项目只能选一次，则不同选择的组合方式共有_______种.

15．设 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^3-x,x>a\\-x^2,x\le a\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 0；

②当 $a=7$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 是增函数；

③若函数 $f\left(x\right)$ 存在两个零点，则 $0<a<1$；

④若直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 恰有 2 个交点，则 $a<0$.

其中所有正确结论的序号是________.

## 三、解答题

16．某次乒乓球比赛单局采用 11 分制，每赢一球得一分.每局比赛开始时，由一方进行发球，随后每两球交换一次发球权，先得 11 分且至少领先 2 分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成 $10:10$ 后，每球交换发球权，领先 2 分者胜，该局比赛结束.已知甲、乙两人要进行一场五局三胜制（当一方赢得三局比赛时，该方获胜，比赛结束）的比赛.

(1)单局比赛中，若甲发球时甲得分的概率为 $\dfrac{4}{5}$，乙发球时甲得分的概率为 $\frac{1}{2}$，求甲 $4:0$ 领先的概率；

(2)若每局比赛乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，且每局比赛结果相互独立，求乙以$3:1$赢得比赛的概率.

17．设函数$f(x)=a\mathrm{e}^{x}+x$，其中$a\in\mathrm{R}$.曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-x+b$.

(1)求$a$，$b$的值；

(2)求$f(x)$的单调区间.

18．近年来，我国新能源汽车蓬勃发展，极大地促进了节能减排.遥遥计划在$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$，$A_5$，$A_6$这6个国产新能源品牌或在$B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$这4个国产燃油汽车品牌中选择购车.预计购买新能源汽车比燃油车多花费40000元.据测算，每行驶5公里，燃油汽车约花费3元，新能源汽车约消耗电1千瓦时.如果购买新能源汽车，遥遥使用国家电网所属电动汽车公共充电设施充电，充电价格分为峰时、平时、谷时三类，具体收费标准（精确到0.1元/千瓦时）如下表：

<table>
<tr><th></th><th>充电时间段</th><th>充电价格（元/千瓦时）</th><th>充电服务费（元/千瓦时）</th></tr>
<tr><td>峰时</td><td>10：00—15：00和18：00—21：00</td><td>1.0</td><td rowspan="3">0.8</td></tr>
<tr><td>平时</td><td>7：00—10：00，15：00—18：00和21：00—23：00</td><td>0.7</td></tr>
<tr><td>谷时</td><td>当日23：00—次日7：00</td><td>0.4</td></tr>
</table>

(1)若遥遥在6个新能源汽车品牌中选出2个品牌作比较，求品牌$A_1$被选中的概率；

(2)若遥遥选购新能源汽车，他在18：00，18：30，19：00，19：30，…，23：30这12个时间点中随机选择一个时间点给车充电，每次充电30千瓦时（用时不超过半小时）.设$X$为遥遥每次充电的费用，求$X$的分布列和数学期望；

(3)假设遥遥一年驾车约行驶30000公里，按新车使用8年计算，如果只考虑购车成本与能源消耗支出，计算说明选择新能源汽车和燃油汽车哪个的总花费更少.

19．已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点$(0,\sqrt{3})$，A，$B$分别是$E$的左顶点和下顶点，$F$

是$E$右焦点，$\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)求$E$的方程；

(2)过点$F$的直线与椭圆$E$交于点$P$，$Q$，直线$AP$，$AQ$分别与直线$x=4$交于不同的两点$M$，$N$.设直线$FM$，$FN$的斜率分别为$k_1$，$k_2$，求证：$k_1k_2$为定值.

20．已知函数$f\left(x\right)=x^2-a\ln x-1\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当$a=2$时，求$f\left(x\right)$的极值；

(2)若对任意$x\in\left(1,+\infty\right)$，有$f\left(x\right)>0$恒成立，求$a$的取值范围；

(3)证明：若$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上存在唯一零点$x_0$，则$x_0<\mathrm{e}^{a-2}$（其中$\mathrm{e}=2.71828\ldots$）.

21．已知$n$项数列$A_n:a_1,a_2,\ldots,a_n\left(n\geq 3\right)$，满足对任意的$i\neq j$有$a_i\neq a_j$. 变换$T$满足对任意$i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$，有$T\left(a_i\right)\in\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}$，且对$i\neq j$有$T\left(a_i\right)\neq T\left(a_j\right)$，称数列$T\left(A_n\right):T\left(a_1\right),T\left(a_2\right),\ldots,T\left(a_n\right)$是数列$A_n$的一个排列. 对任意$i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$，记$T\left(a_i\right)=T^1\left(a_i\right)$，$T^{k+1}\left(a_i\right)=T\left(T^k\left(a_i\right)\right)\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，如果$k$是满足$T^k\left(a_i\right)=a_{n+1-i}\left(i=1,2,\ldots,n\right)$的最小正整数，则称数列$A_n$存在$k$阶逆序排列，称$T$是$A_n$的$k$阶逆序变换.

(1)已知数列$A_4:1,2,3,4$，数列$T\left(A_4\right):3,1,4,2$，求$T^2\left(A_4\right)$，$T^4\left(A_4\right)$；

(2)证明：对于4项数列$A_4$，不存在3阶逆序变换；

(3)若$n$项数列$A_n$存在3阶逆序变换，求$n$的最小值.

**参考答案：**

1．B

【分析】结合集合与元素的关系求出参数$a$的值，结合交集的概念即可得解.

【详解】由题意$a=1$或$a^2=1$，但是$a^2\neq a$，所以$a=-1$，$M=\{0,-1,1\}$，

因为$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以$M\cap N=\{-1,0,1\}$.

故选：B.

2．A

【分析】根据给定的散点图，结合正相关的意义判断即得.

【详解】对于A，儿童的身高越高，其肺活量越大，肺活量与身高具有正相关关系，A正确;

对于B，儿童的视力随身高的增大先增大，后减小，视力与身高不具有正相关关系，B错误;

对于C，肢体柔韧度随身高增大而减小，肢体柔韧度与身高不具有正相关关系，C错误；

对于D，BMI指数与身高的相关性很弱，不具有正相关关系，D错误.

故选：A

3．D

【分析】举反例排除ABC，由指数函数单调性即可说明D.

【详解】取$x=0>y$，则$x^2<y^2$，$\frac{1}{x},\ln x,\ln y$无意义，故ABC错误；

对于D，由指数函数$y=2^t$在实数域上关于$t$单调递增，且$x>y$，所以$2^x>2^y$，故D正确.

故选：D.

4．A

【分析】由条件概率、古典概型概率计算公式即可求解.

【详解】在第一次摸到黄球的前提下，此时袋中有：6个黄球，3个红球，共9个球，

所以所求概率为$P=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

故选：A.

5．C

【分析】利用指数式与对数式的互化，结合指数运算计算即得.

【详解】由$\log_4 5=b$，得$4^b=5$，即$2^{2b}=5$，而$2^a=3$，

所以$2^{a-2b}=\frac{2^a}{2^{-2b}}=\frac{3}{5}$.

故选：C

6．B

【分析】将甲、乙、丙、丁四位同学分为三组 2，1，1，然后分配到 $A,B,C$ 三所学校求解.

【详解】设这四位同学分别为甲、乙、丙、丁，

由题意将甲、乙、丙、丁四位同学分为三组 2，1，1，然后分配到 $A,B,C$ 三所学校.

则不同的报名方法共有 $3C_4^2C_2^1C_1^1=36$ 种.

故选：B.

7．B

【分析】建立平面直角坐标系，求出抛物线方程，再结合抛物线的定义求值即得.

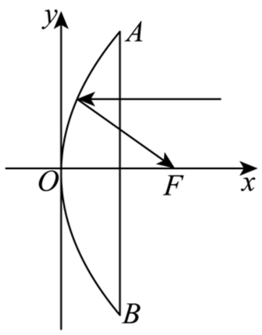
【详解】依题意，建立如图所示的平面直角坐标系，点 $A(0.49,2.1)$

设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$，则 $2.1^2=2p\times0.49$，解得 $2p=9$，

抛物线 $y^2=9x$ 的焦点 $F(\frac{9}{4},0)$，准线方程为 $x=-\frac{9}{4}$，$|AF|=0.49+2.25=2.74$，

所以“金色大伞”的边缘A 点到焦点 $F$ 的距离为 $2.74\mathrm{m}$ .

故选：B




8．C

【分析】首先求得 $d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$，又 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{n}{2}\right)^2}$，而直径是 4，所以分 $n=4,3,2,1$ 进行讨论即可求解.

【详解】圆 $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=4$ 的圆心、半径分别为 $\left(3,4\right),r=2$，

圆心 $\left(3,4\right)$ 到直线 $l:mx-y-2m+5=0$ 的距离为 $d=\frac{|3m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$，

设直线 $l:mx-y-2m+5=0$ 被圆 $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=4$ 截得的弦长为 $n$，

由于直线被圆所截得的弦长不超过直径长度 $2r=4$，故分以下情形讨论：

当$n=4$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-4}=0$，解得$m=-1$，

当$n=3$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，化简得$3m^2-8m+3=0$，解得$m=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，

当$n=2$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，化简得$m^2-m+1=0$，该方程无解，

当$n=1$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，化简得$11m^2-8m+11=0$，该方程无解，

而直线$l:mx-y-2m+5=0$是斜率为$m$且过定点$(2,5)$的直线，直线$l$由$m$唯一决定，

综上所述，满足条件的直线$l$共有 3 条.

故选：C.

9．A

【分析】在$b>a>0$的条件下利用导数证明$b$为$f(x)$的极小值点，然后说明当$a=-1$，$b=-2$时，$b$为$f(x)$的极小值点，但$b>a>0$并不成立，从而得到答案.

【详解】由题设，

$f'(x)=a(x-b)^2+2a(x-a)(x-b)=a\left[3x^2-2(a+2b)x+b(2a+b)\right]=a\left[3x-(2a+b)\right](x-b)$，

若$b>a>0$，则$a<\frac{2a+b}{3}<b$，故$x\in\left(-\infty,\frac{2a+b}{3}\right)\cup(b,+\infty)$上$f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{2a+b}{3},b\right)$上$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2a+b}{3}\right),(b,+\infty)$上递增，$\left(\frac{2a+b}{3},b\right)$上递减，故$b$为$f(x)$的极小值点，从而条件是充分的；

当$a=-1$，$b=-2$时，有$f(x)=(-x-1)(x+2)^2$，则$f'(x)=-(3x+4)(x+2)$，

显然$x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$上$f'(x)<0$，$x\in\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$上$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-2),\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$上递减，$\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$上递增，

此时$b=-2$为$f(x)$的极小值点，但此时$b>a>0$并不成立，从而条件不是必要的.

故选：A.

10．D

【分析】利用二项式定理求出被 5 整除得的余数，再逐项验证即得.

【详解】$a=\mathrm{C}_{2024}^{0}+\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 3+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 3^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{2024}^{2024}\times 3^{2024}=4^{2024}=\left(5-1\right)^{2024}$

$=5^{2024}-\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 5^{2023}+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 5^{2022}-\ldots-\mathrm{C}_{2024}^{2023}\times 5^{1}+1$

$=5\left(5^{2023}-\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 5^{2022}+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-\mathrm{C}_{2024}^{2023}\right)+1$

则$5\left(5^{2023}-\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 5^{2022}+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-\mathrm{C}_{2024}^{2023}\right)$能被 5 整除，

故$5\left(5^{2023}-\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 5^{2022}+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-\mathrm{C}_{2024}^{2023}\right)+1$除以 5 余数为$1$，

所以$a=\mathrm{C}_{2024}^{0}+\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 3+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 3^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{2024}^{2024}\times 3^{2024}$除以 5 余数为$1$，

由$a\equiv b\left(\mathrm{mod}\,5\right)$，所以$2023\div 5=404\cdots\cdots 3$，$2024\div 5=404\cdots\cdots 4$，

$2025\div 5=405$，$2026\div 5=405\cdots\cdots 1$，

故选：D.

11．$\left(1,+\infty\right)$

【分析】由表达式中的每个部分有意义得到不等式组，解之即可得到定义域为$\left(1,+\infty\right)$.

【详解】为了让函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln x$的表达式有意义，需要$\begin{cases}x-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}\neq 0\\ x>0\end{cases}$.

解得$x>1$，所以函数$f\left(x\right)$的定义域是$\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(1,+\infty\right)$.

12．$x^{2}-\dfrac{y^{2}}{3}=1$

【分析】由焦点坐标以及渐近线方程列式求出$a,b$即可得解.

【详解】双曲线$C$的焦点在$x$轴上，设$C$的方程为$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1,\left(a>0,b>0\right)$，

由题意$c=2,\dfrac{b}{a}=\sqrt{3},a^{2}+b^{2}=c^{2}$，解得$a=1,b=\sqrt{3}$，

所以$C$的方程为$x^{2}-\dfrac{y^{2}}{3}=1$.