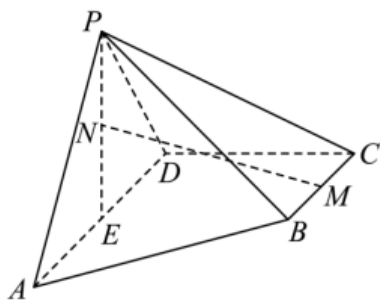


专题 20 立体几何解答题分类练

一、长度、面积及体积的计算

1. (2023 届安徽省安庆市高三第三次模拟) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $PA = PD = PB$, $BC = DC = \frac{1}{2}AD = 2$, E 为 AD 的中点, 且 $PE = 4$. 记 PE 的中点为 N , 若 M 在线段 BC 上 (异于 B 、 C 两点).



- (1) 若点 M 是 BC 中点, 证明: $MN \parallel$ 面 PAB ;
(2) 若直线 MN 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$, 求线段 BM 的长.

【解析】(1) 证明: 取线段 PA 的中点 G , 连接 NG 、 BG ,

因为 $AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点, 则 $BC \parallel AE$ 且 $BC = AE$,

因为 M 为 BC 的中点, 则 $BM \parallel AE$ 且 $BM = \frac{1}{2}AE$,

因为 N 、 G 分别为 PE 、 PA 的中点, 所以, $NG \parallel AE$ 且 $NG = \frac{1}{2}AE$,

所以, $BM \parallel NG$ 且 $BM = NG$, 所以, 四边形 $BGNM$ 为平行四边形, 则 $MN \parallel BG$,

因为 $MN \not\subset$ 平面 PAB , $BG \subset$ 平面 PAB , 所以, $MN \parallel$ 平面 PAB .

(2) 解: 连接 BE ,

因为 $AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点, 则 $BC \parallel DE$ 且 $BC = DE = AE$,

所以, 四边形 $BCDE$ 为平行四边形, 所以, $BE \parallel CD$, 且 $BE = CD$,

因为 $CD = \frac{1}{2}AD = AE$, 则 $AE = BE$,

又因为 $AD \perp CD$, 则 $BE \perp AD$,

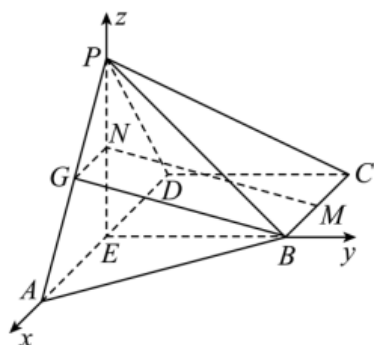
因为 $PA = PD$, E 为 AD 的中点, 则 $PE \perp AD$,

因为 $PA = PB$, $EA = EB$, $PE = PE$, 所以, $\triangle PAE \cong \triangle PBE$,

所以, $\angle PEB = \angle PEA = 90^\circ$, 则 $PE \perp BE$,

又因为 $AD \cap BE = E$, AD 、 $BE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以, $PE \perp$ 平面 $ABCD$,

以点 E 为坐标原点, EA 、 EB 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,2,0)$ 、 $P(0,0,4)$ 、 $N(0,0,2)$,

设 $BM = a$ ($0 < a < 2$), 则 $M(-a, 2, 0)$,

$\vec{AB} = (-2, 2, 0)$, $\vec{AP} = (-2, 0, 4)$, 设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = -2x + 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AP} = -2x + 4z = 0 \end{cases}$, 取 $x = 2$, 可得 $\vec{m} = (2, 2, 1)$,

$\vec{MN} = (a, -2, 2)$, 若直线 MN 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$,

则 $\left| \cos \langle \vec{MN}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2a - 2|}{\sqrt{a^2 + 8} \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, 整理可得 $11a^2 - 24a + 4 = 0$,

因为 $0 < a < 2$, 解得 $a = \frac{2}{11}$, 故 $BM = \frac{2}{11}$.

2. (2024 届江苏省南通市如东高三上学期学情检测) 劳动教育是中国特色社会主义教育制度的重要内容, 对于培养社会主义建设者和接班人具有重要战略意义. 为了使学生熟练掌握一定劳动技能, 理解劳动创造价值, 某普通高中组织学生到工厂进行实践劳动. 在设计劳动中, 某学生欲将一个底面半径为 20cm, 高为 40cm 的实心圆锥体工件切割成一个圆柱体, 并使圆柱体的一个底面落在圆锥体的底面内.

(1) 求该圆柱的侧面积的最大值;

(2) 求该圆柱的体积的最大值.

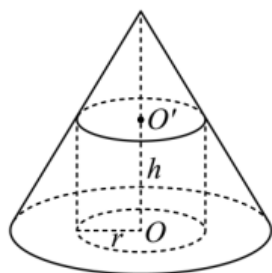
【解析】(1) 设该圆柱的底面半径为 r , 高 OO' 为 h . 由平面几何知识知 $\frac{20}{40} = \frac{r}{40-h}$,

所以 $40 - h = 2r$, 即 $h = 40 - 2r$.

因为 $h = 40 - 2r > 0$, 所以 $0 < r < 20$.

因为 $S = 2\pi rh = 2\pi r(40 - 2r) = 4\pi r(20 - r) \leq 4\pi \left(\frac{r + (20 - r)}{2} \right)^2 = 400\pi$,

当且仅当 $r=10$ 时等号成立，所以该圆柱的侧面积的最大值是 $400\pi(\text{cm}^2)$ 。



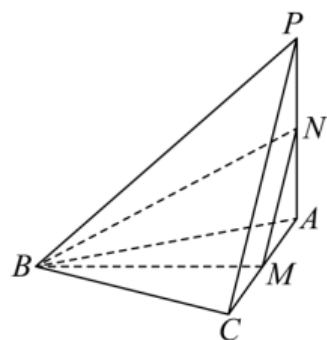
(2) 设圆柱的体积为 V ，因为 $V = \pi r^2 h = \pi r^2 (40 - 2r) = 2\pi(20r^2 - r^3) (0 < r < 20)$ ，

所以 $V' = 2\pi(40r - 3r^2)$ ，令 $V' = 0$ 得 $r = \frac{40}{3}$ ，令 $V' > 0$ 得 $0 < r < \frac{40}{3}$ ，

令 $V' < 0$ 得 $r > \frac{40}{3}$ ，所以 V 在 $(0, \frac{40}{3})$ 上单调递增， $(\frac{40}{3}, 20)$ 上单调递减，

所以当 $r = \frac{40}{3}$ 时， $V_{\max} = \frac{64000}{27}\pi(\text{cm}^3)$ 。

3. (2024 届云南省昆明市第一中学高三第二次双基检测) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC , $AB = BC$, M, N 分别为棱 AC, PA 的中点。



(1) 证明: $BM \perp PC$;

(2) 若 $AB = \sqrt{5}$, $AC = 2$ ，二面角 $A-BN-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积。

【解析】(1) 因为 $AB = BC$ ，点 M 是 AC 的中点，所以 $BM \perp AC$ 。

因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BM \subset$ 平面 ABC ，所以 $PA \perp BM$ 。

又因为 $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC ，所以 $BM \perp$ 平面 PAC ，

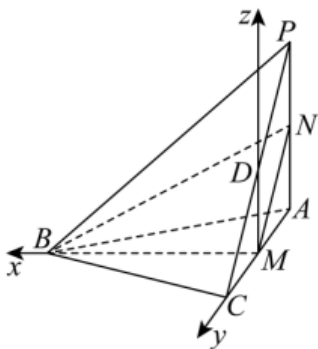
因为 $PC \subset$ 平面 PAC ，所以 $BM \perp PC$ 。

(2) 因为 $AB = BC = \sqrt{5}$, $AC = 2$ ，所以 $BM = \sqrt{5-1} = 2$ ，

取 PC 中点 D ，连接 MD ，则 $MD \parallel PA$ 。

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ，所以 $MD \perp$ 平面 ABC 。

故以 M 为坐标原点，分别以 MB, MC, MD 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，



设 $AN = a(a > 0)$ ，得 $M(0, 0, 0), A(0, -1, 0), B(2, 0, 0), N(0, -1, a)$ ，

所以 $\vec{MB} = (2, 0, 0), \vec{MN} = (0, -1, a), \vec{AN} = (0, 0, a), \vec{AB} = (2, 1, 0)$ 。

设平面 BMN 的法向量 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{MB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$ ，

得 $\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -y_1 + az_1 = 0 \end{cases}$ ，令 $z_1 = 1$ ，得 $\vec{n} = (0, a, 1)$ 。

设平面 ABN 的法向量 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

则由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AN} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} az_2 = 0 \\ 2x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$ ，令 $x_2 = 1$ ，得 $\vec{m} = (1, -2, 0)$ 。

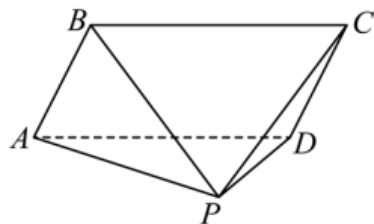
依题意， $|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2a}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ ，

因为 $a > 0$ ，所以解得 $a = 3$ ，所以 $PA = 2AN = 6$ ，

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 6 = 4$ 。

二、平行关系的证明

4. (2024 届安徽省江淮十校高三第一次联考) 如图，在五面体 $PABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle PAD$ 为正三角形， $AD = 2$ ， $\cos \angle PAB = \frac{3}{4}$ 。



(1) 若平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$ ，证明： $AB \parallel l$ ；

(2)求二面角 $A-BP-C$ 的余弦值.

【解析】(1) 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB \perp PCD$,

因为 $AB \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 PCD ,

又因为 $AB \subset$ 平面 PAB , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$, 所以 $AB \parallel l$.

(2) 记 BC , AD 的中点分别为 E , F , 连接 PE , EF , PF ,

因为 $AD \perp EF$, $AD \perp PF$, $EF, PF \subset$ 平面 PEF , $EF \cap PF = F$,

所以 $AD \perp$ 平面 PEF , $PE \subset$ 平面 PEF , 所以 $AD \perp PE$.

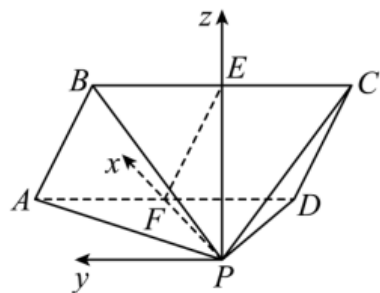
因为 $\cos \angle PAB = \frac{3}{4}$, 所以 $PB = \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cos \angle BAP} = \sqrt{4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \frac{3}{4}} = \sqrt{2}$,

又 $AD \perp PE$, $AD \parallel BC$, 所以 $BC \perp PE$, 所以 $PE = 1$,

所以 $PE^2 + PF^2 = EF^2$, 所以 $PE \perp PF$, $PF, AD \subset$ 平面 APD , $AD \cap PF = F$,

$AD, PF \subset$ 平面 PAD , 所以 $PE \perp$ 平面 PAD .

以 P 为坐标原点, 以 PF , PE 所在的直线为 x , z 轴, 过 P 与 AD 平行的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $P(0,0,0)$, $A(\sqrt{3},1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(0,-1,1)$,

$\vec{PB} = (0,1,1)$, $\vec{PA} = (\sqrt{3},1,0)$, $\vec{PC} = (0,-1,1)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PB} = y_1 + z_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{PA} = \sqrt{3}x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$, 得 $\vec{m} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

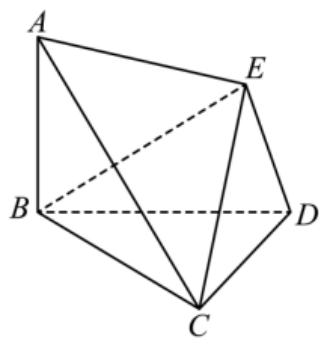
则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PB} = y_2 + z_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = -y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = 1$, 得 $\vec{n} = (1, 0, 0)$

$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$,

由图可知，二面角 $A-BP-C$ 为钝角，

所以二面角 $A-BP-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

5. (2024 届山西省忻州市名校高三上学期开学联考) 如图，在多面体 $ABCDE$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD ，平面 $ECD \perp$ 平面 BCD ，其中 $\triangle ECD$ 是边长为 2 的正三角形， $\triangle BCD$ 是以 $\angle BDC$ 为直角的等腰三角形， $AB = \sqrt{3}$.



(1) 证明: $AE \parallel$ 平面 BCD .

(2) 求平面 ACE 与平面 BDE 的夹角的余弦值.

【解析】(1) 取 CD 的中点 F ，连接 EF ， BF .

因为 $\triangle ECD$ 是边长为 2 的正三角形，所以 $EF \perp CD$ ，且 $EF = \sqrt{3}$.

因为平面 $ECD \perp$ 平面 BCD ，且平面 $ECD \cap$ 平面 $BCD = CD$ ， $EF \subset$ 平面 ECD ，
所以 $EF \perp$ 平面 BCD .

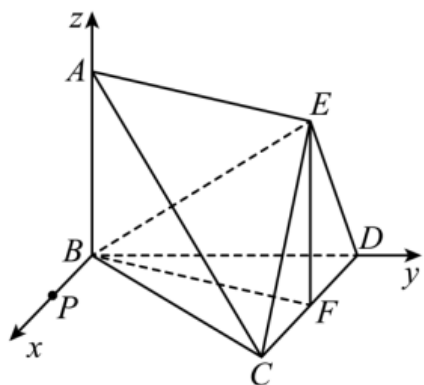
因为 $AB \perp$ 平面 BCD ，所以 $AB \parallel EF$.

因为 $AB = EF = \sqrt{3}$ ，所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形，

所以 $AE \parallel BF$.

因为 $AE \not\subset$ 平面 BCD ， $BF \subset$ 平面 BCD ，所以 $AE \parallel$ 平面 BCD .

(2) 过点 B 作 $BP \parallel CD$ ，以 B 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{BP}$ ， $\overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x ， y ， z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,\sqrt{3})$, $B(0,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(1,2,\sqrt{3})$,

故 $\vec{AC} = (2,2,-\sqrt{3})$, $\vec{CE} = (-1,0,\sqrt{3})$, $\vec{BD} = (0,2,0)$, $\vec{BE} = (1,2,\sqrt{3})$.

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = 2x_1 + 2y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CE} = -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $x_1 = 2\sqrt{3}$, 得 $\vec{m} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

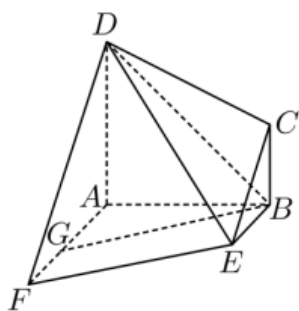
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BD} = 2y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = x_2 + 2y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases},$$

令 $x_2 = \sqrt{3}$, 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, -1)$.

设平面 ACE 与平面 BDE 的夹角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{6-2}{2\sqrt{12+3+4}} = \frac{2}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{19}}{19}.$$

6. (2023 届四川省绵阳市涪城区南山中学高三仿真) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 与 $ABEF$ 均为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AF \parallel BE$, $DA \perp$ 平面 $ABEF$, $AB \perp AF$, $AD = AB = 2BC = 2BE = 2$.



(1) 已知点 G 为 AF 上一点, 且 $AG = 2$, 求证: BG 与平面 DCE 不平行;

(2) 已知直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 AF 的长及四棱锥 $D-ABEF$ 的体积.

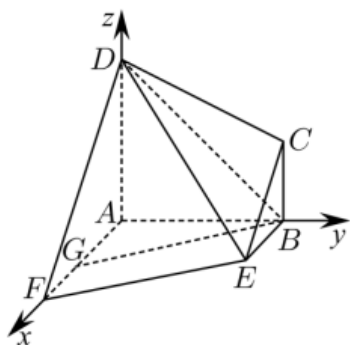
【解析】(1) 证明: 因为 $DA \perp$ 平面 $ABEF$, $AB, AF \subset$ 平面 $ABEF$,

所以 $DA \perp AB$, $DA \perp AF$,

又 $AB \perp AF$,

以 A 为坐标原点, AF, AB, AD 分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $B(0,2,0)$ 、 $E(1,2,0)$ 、 $C(0,2,1)$ 、 $D(0,0,2)$ 、 $G(2,0,0)$,



所以 $\vec{EC} = (-1, 0, 1)$, $\vec{ED} = (-1, -2, 2)$, $\vec{BG} = (2, -2, 0)$,

设平面 DCE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EC} = -x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{ED} = -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$,

令 $x = 2$, 则 $z = 2, y = 1$, 所以 $\vec{n} = (2, 1, 2)$,

因为 $\vec{n} \cdot \vec{BG} = 2 \times 2 + 1 \times (-2) = 2 \neq 0$, 且不存在 λ 使得 $\vec{BG}$ 与 $\vec{n}$ 垂直,

所以 BG 与平面 DCE 不平行;

(2) 设 $AF = a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则 $F(a, 0, 0)$, 所以 $\vec{BF} = (a, -2, 0)$,

$\therefore$ 直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5} = \left| \cos \langle \vec{BF}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{BF} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(a, -2, 0) \cdot (2, 1, 2)|}{\sqrt{a^2 + 4} \times \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2a - 2|}{\sqrt{a^2 + 4} \times 3},$$

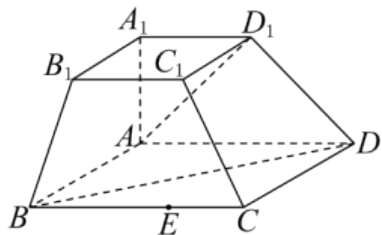
化简得 $11a^2 - 40a - 16 = 0$, 解得 $a = 4$ 或 $a = -\frac{4}{11}$ (舍去); 故 $AF = 4$.

此时梯形 $ABEF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 2 = 5$, 故 $V_{D-ABEF} = \frac{1}{3} S \cdot DA = \frac{10}{3}$.

三、垂直关系的证明

7. (2023 届四川省南充高级中学高三下学期第三次模拟) 如图, 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$

是菱形, $AB = 2AA_1 = 2A_1B_1 = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.



(1)证明: $BD \perp CC_1$;

(2)棱 BC 上是否存在一点 E , 使得二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$? 若存在, 求线段 CE 的长; 若不存在, 请说明理由.

【解析】(1) 证明: 如图所示, 连接 AC, A_1C_1 ,

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为棱台, 所以 A, A_1, C_1, C 四点共面,

又因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $BD \perp AC$,

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AA_1 \perp BD$,

又因为 $AA_1 \cap AC = A$ 且 $AA_1, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

因为 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BD \perp CC_1$.

(2) 解: 取 BC 中点 Q , 连接 AQ ,

因为底面 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是正三角形, 所以 $AQ \perp BC$, 即 $AQ \perp AD$,

由于 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 以 A 为原点, 分别以 AQ, AD, AA_1 为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), A_1(0,0,1), D_1(0,1,1), Q(\sqrt{3},0,0)$

假设点 E 存在, 设点 E 的坐标为 $(\sqrt{3}, \lambda, 0)$, 其中 $-1 \leq \lambda \leq 1$,

可得 $\vec{AE} = (\sqrt{3}, \lambda, 0), \vec{AD_1} = (0, 1, 1)$

设平面 AD_1E 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = \sqrt{3}x + \lambda y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD_1} = y + z = 0 \end{cases}$,

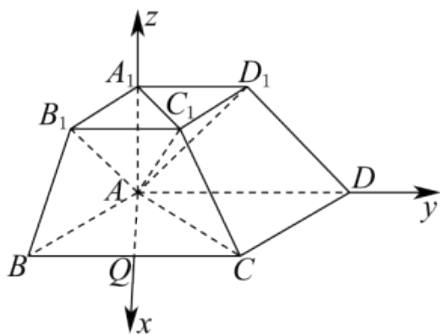
取 $x = \lambda$, 可得 $y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (\lambda, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

又由平面 ADD_1 的法向量为 $\vec{AQ} = (\sqrt{3}, 0, 0)$,

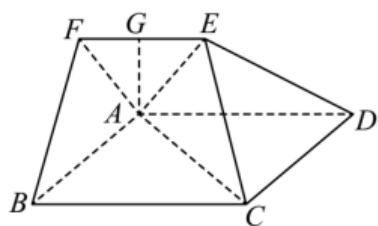
所以 $|\cos \langle \vec{AQ}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}|\lambda|}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2 + 6}} = \frac{1}{3}$, 解得 $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

由于二面角 $E-AD_1-D$ 为锐角, 则点 E 在线段 QC 上, 所以 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $CE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

故 BC 上存在点 E , 当 $CE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.



8. (2024 届云南省昆明市第一中学高三上学期第一次月考) 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $EF \parallel AD$, 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $BC = 2EF$, $AE = AF$, 点 G 是 EF 的中点.

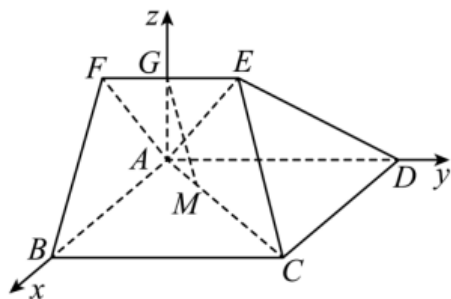


(1) 证明: $AG \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 线段 AC 上是否存在一点 M , 使 $MG \parallel$ 平面 ABF ? 若存在, 求出 $\frac{MC}{AC}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

【解析】(1) 因为 $AE = AF$, 点 G 是 EF 的中点, 所以 $AG \perp EF$,
 又因为 $EF \parallel AD$, 所以 $AG \perp AD$,
 由平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AG \subset$ 平面 $ADEF$,
 所以 $AG \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 由 (1) 得 $AG \perp$ 平面 $ABCD$, $AD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore AG \perp AD, AG \perp AB$,
 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 所以 AG, AD, AB 两两垂直,
 以 A 为原点, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 如图,



所以 $A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,4,0)$,

假设线段 AC 上存在一点 M , 使 $MG \parallel$ 平面 ABF ,

设 $\frac{AM}{AC} = \lambda$, 则 $\vec{AM} = \lambda \vec{AC}$,

$$\therefore \vec{AC} = (4, 4, 0), \therefore \vec{AM} = (4\lambda, 4\lambda, 0),$$

$$\text{设 } AG = t (t > 0), \text{ 则 } \vec{AG} = (0, 0, t),$$

$$\text{所以 } \vec{MG} = \vec{AG} - \vec{AM} = (-4\lambda, -4\lambda, t),$$

$$F(0, -1, t), \vec{AF} = (0, -1, t), \vec{AB} = (4, 0, 0),$$

$$\text{设平面 } ABF \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (x, y, z),$$

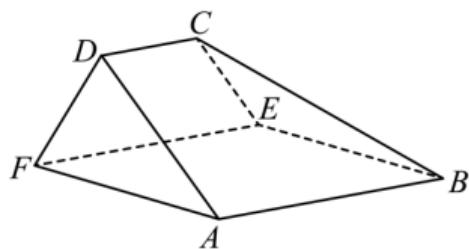
$$\begin{cases} \vec{AF} \cdot \vec{m} = -y + t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{m} = 4x = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{m} = (0, t, 1),$$

$$\text{由于 } MG \parallel \text{平面 } ABF, \text{ 所以 } \vec{MG} \cdot \vec{m} = 0, \text{ 即 } -4\lambda t + t = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{AM}{AC} = \frac{1}{4}, \text{ 此时 } \frac{MC}{AC} = \frac{3}{4},$$

$$\text{即当 } \frac{MC}{AC} = \frac{3}{4} \text{ 时, } MG \parallel \text{平面 } ABF.$$

9. (2024 届广东仲元中学高三上学期 9 月月考) 如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 面 $ABEF$ 为正方形, $AF = 2FD$, $\angle AFD = 90^\circ$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60° .



(1) 证明: 平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$;

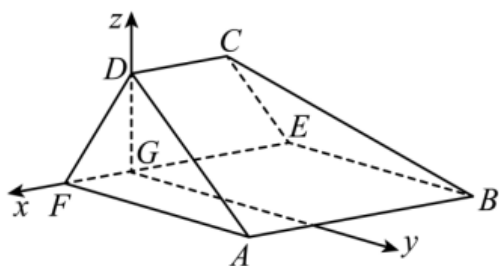
(2) 求二面角 $E-BC-A$ 的正弦值.

【解析】(1) 由正方形 $ABEF$, 得 $AF \perp EF$, 由 $\angle AFD = 90^\circ$, 得 $AF \perp DF$,
而 $DF \cap EF = F$, $DF, EF \subset$ 平面 $EFDC$, 则 $AF \perp$ 平面 $EFDC$, 又 $AF \subset$ 平面 $ABEF$,
所以平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$.

(2) 过 D 作 $DG \perp EF$, 垂足为 G , 因为平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$, 平面 $ABEF \cap$ 平面 $EFDC = EF$,
 $DG \subset$ 平面 $EFDC$, 因此 $DG \perp$ 平面 $ABEF$,

以 G 为坐标原点, $\vec{GF}$ 的方向为 x 轴正方向, $\vec{FA}$ 的方向为 y 轴正方向,

$\vec{GD}$ 的方向为 z 轴的正方向, $|\vec{GF}|$ 为单位长, 建立空间直角坐标系 $G-xyz$, 如图:



因为平面 $DAF \perp$ 平面 $AFE = AF$ ，则由 (1) 可知 $\angle DFE$ 为二面角 $D-AF-E$ 的平面角，

即有 $\angle DFE = 60^\circ$ ，则 $|DF| = 2$ ， $|DG| = \sqrt{3}$ ， $|AF| = 4$ ，

则有 $A(1, 4, 0)$ ， $B(-3, 4, 0)$ ， $E(-3, 0, 0)$ ， $D(0, 0, \sqrt{3})$ ，

又因为 $AB \parallel EF$ ， $EF \subset$ 平面 $EFDC$ ， $AB \not\subset$ 平面 $EFDC$ ，则 $AB \parallel$ 平面 $EFDC$ ，

又平面 $ABCD \cap$ 平面 $EFDC = DC$ ，于是 $AB \parallel DC$ ， $DC \parallel EF$ ，

由 $BE \parallel AF$ 可得 $BE \perp$ 平面 $EFDC$ ，于是 $\angle CEF$ 为二面角 $C-BE-F$ 的平面角，

即有 $\angle CEF = 60^\circ$ ，从而得 $C(-2, 0, \sqrt{3})$ ，

则 $\vec{EC} = (1, 0, \sqrt{3})$ ， $\vec{EB} = (0, 4, 0)$ ， $\vec{AC} = (-3, -4, \sqrt{3})$ ， $\vec{AB} = (-4, 0, 0)$ ，

设平面 BCE 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EC} = x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EB} = 4y = 0 \end{cases}$ ，令 $z = -1$ ，得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, -1)$ ，

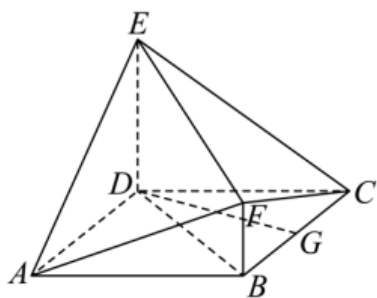
设平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$ ，则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = -3a - 4b + \sqrt{3}c = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = -4a = 0 \end{cases}$ ，令 $c = 4$ ，得 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, 4)$ ，

因此 $\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-4}{2 \times \sqrt{19}} = -\frac{2\sqrt{19}}{19}$ ，设二面角 $E-BC-A$ 的大小为 θ ，

则 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{19}}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{285}}{19}$ ，

所以二面角 $E-BC-A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{285}}{19}$ 。

10. (2024 届广西百色市贵百联考高三上学期 9 月月考) 四边形 $ABCD$ 为菱形， $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $FB \parallel ED$ ， $AD = BD = ED = 2$ ， $BF = 1$ 。



(1) 设 BC 中点为 G ，证明： $DG \perp$ 平面 ADE ；

(2) 求平面 AFE 与平面 BFC 的夹角的大小。

【解析】(1) 四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AD = BD = DC$ ， BC 中点为 G ，所以 $DG \perp BC$ 。

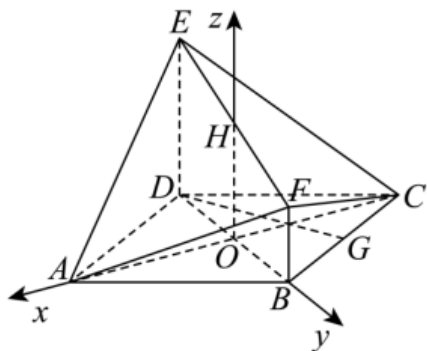
因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $DG \perp AD$ ，

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DG \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $DG \perp ED$ 。

又 $ED \cap AD = D$ ， $ED, AD \subset$ 平面 ADE ，

所以 $DG \perp$ 平面 ADE ；

(2) 设 BD 交 AC 于点 O ，取 EF 中点 H ，连接 OH ，所以 $OH \parallel ED$ ， $OH \perp$ 底面 $ABCD$ 。以 O 为原点，以 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OH}$ 分别为 x 轴， y 轴， z 轴的正方向建立空间直角坐标系，



因为 $AD = BD = ED = 2$ ，所以 $OA = OC = \sqrt{3}$ ，

所以 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $F(0, 1, 1)$ ， $D(0, -1, 0)$ ， $E(0, -1, 2)$ ，

所以 $\vec{FA} = (\sqrt{3}, -1, -1)$ ， $\vec{EA} = (\sqrt{3}, 1, -2)$ ，

设平面 EFA 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，则
$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{FA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{EA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - y - z = 0 \\ \sqrt{3}x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$ ，得 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, 2)$ ；

$\vec{BF} = (0, 0, 1)$ ， $\vec{BC} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$ ，平面 BFC 的一个法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$ ，

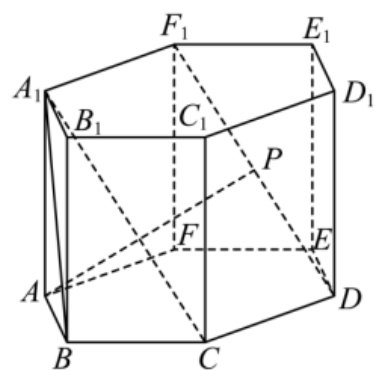
$$\text{则} \begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{BF} = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -\sqrt{3}a - b = 0 \end{cases}, \text{令 } a = \sqrt{3} \text{ 得 } \vec{n} = (\sqrt{3}, -3, 0);$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{3-3+0}{\sqrt{8} \times \sqrt{12}} = 0,$$

所以平面 AFE 与平面 BFC 的夹角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

四、线面角的计算

11. (2023 届河南省部分名校高三仿真模拟) 如图所示, 正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 高为 $\sqrt{3}$, P 为线段 DF_1 上的动点.



(1) 求证: $AP \parallel$ 平面 A_1BC ;

(2) 设直线 AP 与平面 CDF_1A_1 所成的角为 θ , 求 $\sin \theta$ 的取值范围.

【解析】(1) 连接 AD , AF_1 .

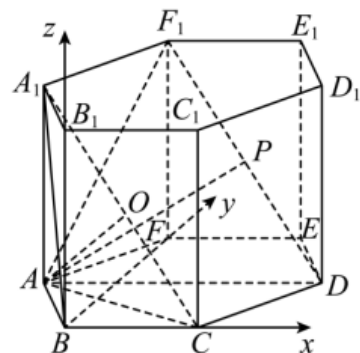
在正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中,

因为底面为正六边形, 所以 $AD \parallel BC$,

因为 $AD \not\subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AD \parallel$ 平面 A_1BC .

因为 $CD \parallel A_1F_1$, $CD = A_1F_1$, 所以四边形 CDF_1A_1 为平行四边形,

所以 $DF_1 \parallel A_1C$, 又 $DF_1 \not\subset$ 平面 A_1BC , $A_1C \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $DF_1 \parallel$ 平面 A_1BC ,



又 $AD \cap DF_1 = D$, 所以平面 $ADF_1 \parallel$ 平面 A_1BC ,

因为 P 为线段 DF_1 上的动点，所以 $AP \subset$ 平面 ADF_1 ，

所以 $AP \parallel$ 平面 A_1BC 。

(2) 取 A_1C 的中点为 Q ，连接 AQ ， AC 。

因为底面边长为 1，所以 $AC = \sqrt{3}$ ，

因为 $A_1A = \sqrt{3}$ ，所以 $A_1A = AC$ ，所以 $AQ \perp A_1C$ 。

易得 $CD \perp AC$ ， $CD \perp A_1A$ ， $AC \cap A_1A = A$ ，所以 $CD \perp$ 平面 A_1AC ，所以 $CD \perp AQ$ ，

因为 $A_1C \cap CD = C$ ，所以 $AQ \perp$ 平面 CDF_1A_1 ，

即 $\overrightarrow{AQ}$ 为平面 CDF_1A_1 的一个法向量。

连接 BF ，以 B 为坐标原点， BC ， BF ， BB_1 所在直线分别为 x ， y ， z 轴建立空间坐标系 $B-xyz$ ，

则 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $A_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ， $C(1, 0, 0)$ ， $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ， $F_1(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，

所以 $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{DF_1} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ， $\overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$ 。

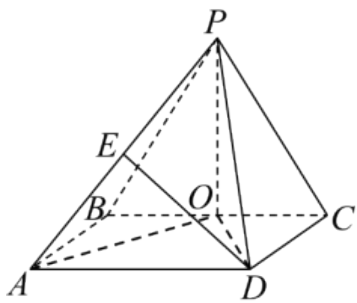
设 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DF_1} = \left(-\frac{3\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \sqrt{3}\lambda\right)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，

所以 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \left(2 - \frac{3\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \sqrt{3}\lambda\right)$ ，

则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3\lambda^2 - 3\lambda + 2}}$ ，

因为 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，所以 $3\lambda^2 - 3\lambda + 2 \in \left[\frac{5}{4}, 2\right]$ ，所以 $\sin \theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right]$ 。

12. (2023 届河南省部分学校高三押题信息卷) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是矩形， O, E 分别是 BC, PA 的中点，平面 α 经过点 O, D, E 与棱 PB 交于点 F 。



(1) 试用所学知识确定 F 在棱 PB 上的位置;

(2) 若 $PB = PC = \sqrt{3}$, $BC = 2AB = 2$, 求 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值.

【解析】(1) 过 P 作直线 l 与 BC 平行, 延长 DE 与 l 交于点 G ,

连接 OG , OG 与 PB 的交点即为点 F .

因为底面 $ABCD$ 是矩形, O 是 BC 的中点,

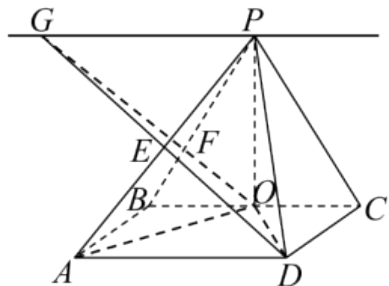
所以 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2OB$.

又 $l \parallel BC$, 所以 $l \parallel AD$,

因为 E 是 PA 的中点, 可得 $PG = AD$,

则 $PG = 2OB$, 所以 $PF = 2BF$.

故 F 在棱 PB 的靠近 B 的三等分点处.



(2) 因为 $PB = PC$, O 是 BC 的中点, 所以 $PO \perp BC$,

又平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$,

$PO \subset$ 平面 PBC , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

取 AD 中点 Q , 连接 OQ , 易知 OQ, OC, OP 两两相互垂直,

如图, 分别以 OQ, OC, OP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(1, -1, 0), B(0, -1, 0), C(0, 1, 0), D(1, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{2})$,

$\vec{AD} = (0, 2, 0), \vec{CD} = (1, 0, 0), \vec{CP} = (0, -1, \sqrt{2})$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/975033334304011303>