

上海市普陀区 2024-2025 学年高三上学期 10 月月考数学检测试题

一.填空题(本大题共有 12 题, 满分 54 分, 第 1-6 题每题 4 分, 第 7-12 题每题 5 分)

1. 设 $a \in \mathbf{R}$. 若 $(a-2i)(1+i)$ 为纯虚数(i 为虚数单位), 则 $a=$ _____.
2. 函数 $y = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域为_____.
3. 某校高三年级共有学生 525 名, 其中男生 294 名, 女生 231 名. 为了解该校高三年级学生的体育锻炼情况, 从中抽取 50 名学生进行问卷调查. 若采用分层随机抽样的方法, 则要抽取男生的人数为_____.
4. 设 $m \in \mathbf{R}$, 若圆 $x^2 + y^2 - 4y + m = 0$ 的面积为 π , 则 $m =$ _____.
5. 在无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 1$, 公比 $q = \frac{1}{2}$, 记 $S_n = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \cdots + a_{2n-1}^2$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$ _____.
6. 设 $\omega > 0$, $f(x) = \sin \omega x$, 若函数 $y = f(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值为 1, 但最小值不为 -1, 则 ω 的取值范围是_____.
7. 已知 m 为非零常数. 若在 $\left(x + \frac{m}{x}\right)^7$ 的二项展开式中, x^3 的系数是 $\frac{1}{x^3}$ 的系数的 8 倍, 则 $m =$ _____.
8. 设 $P(x, y)$ 是曲线 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 上一动点, 则 $x+2y$ 的最大值为_____.
9. 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \geq 0 \\ f(x), & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $g(x) \leq 2+x$ 的解集为_____.
10. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, M 是 $\triangle ABC$ 的内切圆上一动点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ 的最小值为_____.
11. 若一个正整数的各位数码从左至右是严格增或严格减的, 则称该数为“严格单调数”. 在不大于 4000 的四位数中, “严格单调数”共有_____个.
12. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 直线 l 经过点 F_2 , 且与 Γ 交于 P 、 Q 两点. 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $|F_2Q| = 1$, 则 Γ 的长轴长的最小值为_____.

二.选择题(本大题共 4 题, 满分 18 分, 第 13-14 题每题 4 分, 第 15-16 题每题 5 分)

13. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ”是“ $\cos x = 0$ ”的 ()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

14. 若 $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 $\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta > 0$, 则必有 ()

A. $\alpha^2 < \beta^2$

B. $\alpha^2 > \beta^2$

C. $\alpha < \beta$

D. $\alpha > \beta$

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 且 $PA = PB = 2$, $PC = \sqrt{2}$, 则该四棱锥的高是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

16. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足: 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f\left[f(x) - \frac{1}{x}\right] = 5$.

若函数 $y = f(x) - 5$ 的零点个数为有限的 $n (n \in \mathbf{N})$ 个, 则 n 的最大值是 ()

A. 1

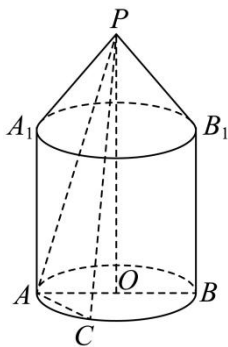
B. 2

C. 3

D. 4

三.解答题(本大题共有 5 题, 满分 78 分)

17. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱, 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 设 P 是圆锥的顶点, AB 是圆柱下底面的一条直径, AA_1 、 BB_1 是圆柱的两条母线, C 是圆弧 AB 的中点.



(1) 若圆锥的侧面积是圆柱的侧面积 $\frac{1}{2}$, 求该几何体的体积;

(2) 若圆锥的高为 1, 求直线 PB_1 与平面 PAC 所成角的大小.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 设向量 $\vec{m} = (2b + c, -\cos C)$, $\vec{n} = (a, \cos A)$, 已知 $\vec{m} \parallel \vec{n}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD \perp AB$, 若 $AC = 4$, $AD = \sqrt{3}$, 求 $\sin B$.

19. 企业经营一款节能环保产品, 其成本由研发成本与生产成本两部分构成, 生产成本固定为每台 130 元. 根据市场调研, 若该产品产量为 x 万台时, 每万台产品的销售收入为 $I(x)$ 万元, 其中 $I(x) = 220 - x (0 < x < 220)$.

(1) 若甲企业独家经营, 其研发成本为 60 万元, 求甲企业能获得利润的最大值;

(2) 若乙企业见有利可图, 也经营该产品, 其研发成本为 40 万元. 试问: 乙企业产量多少万台时获得的利润最大; (假设甲企业按照原先最大利润的产量生产, 并未因乙的加入而改变)

(3) 由于乙企业参与, 甲企业将不能得到预期的最大收益, 因此会作相应调整, 之后乙企业也会随之作出调整..., 最终双方达到动态平衡(在对方当前产量不变的情况下, 己方达到利润最大), 求动态平衡时, 两企业各自的产量.

20. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = 2$, 左顶点 $A(-1, 0)$, 过 C 的右焦点 F 作与 x 轴不重合的直线 l, 交 C 于 P、Q 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 求证: 直线 AP、AQ 的斜率之积为定值;

(3) 设 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{FQ}$, 试问: 在 x 轴上是否存在定点 T, 使得 $\overrightarrow{AF} \perp (\overrightarrow{TP} - \lambda \overrightarrow{TQ})$ 恒成立? 若存在, 求出点 T 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定函数 $y = f(x)$, 若点 P 是曲线 $y = f(x)$ 的两条互相垂直的切线的交点, 则称点 P 为函数 $y = f(x)$ 的“正交点”. 记函数 $y = f(x)$ 的所有“正交点”组成的集合为 M.

(1) 若 $f(x) = \ln x$, 求证: $M = \emptyset$;

(2) 若 $f(x) = x^2$, 求证: 函数 $y = f(x)$ 的所有“正交点”在一条定直线上, 并求出该直线的方程;

(3) 设 $a \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - ax^2$, 记函数 $y = f(x)$ 的图像上所有点组成的集合为 N. 若

$M \cap N = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

上海市普陀区2024-2025学年高三上学期10月月考数学检测试题

一.填空题(本大题共有 12 题, 满分 54 分, 第 1-6 题每题 4 分, 第 7-12 题每题 5 分)

1. 设 $a \in \mathbf{R}$. 若 $(a-2i)(1+i)$ 为纯虚数(i 为虚数单位), 则 $a=$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 先将 $(a-2i)(1+i)$ 展开化简, 然后根据纯虚数的概念来求解 a 的值.

【详解】 展开 $(a-2i)(1+i) = a \times 1 + a \times i - 2i \times 1 - 2i \times i = a + ai - 2i - 2i^2$,

因为 $i^2 = -1$, 所以原式可化为 $a + ai - 2i + 2 = (a+2) + (a-2)i$.

因为 $(a-2i)(1+i)$ 为纯虚数, 所以实部 $a+2=0$, 解得 $a=-2$.

此时虚部 $a-2=-2-2=-4 \neq 0$, 符合纯虚数的定义.

故答案为: -2

2. 函数 $y = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域为_____.

【答案】 $(-\infty, 0]$.

【解析】

【分析】 令 $1-2^x \geq 0$ 即可求出 x 的取值范围, 从而可求出函数的定义域.

【详解】 解: 令 $1-2^x \geq 0$, 即 $2^x \leq 1 = 2^0$, 所以 $x \leq 0$,

故答案为: $(-\infty, 0]$.

3. 某校高三年级共有学生 525 名, 其中男生 294 名, 女生 231 名. 为了解该校高三年级学生的体育锻炼情况, 从中抽取 50 名学生进行问卷调查. 若采用分层随机抽样的方法, 则要抽取男生的人数为_____.

【答案】 28

【解析】

【分析】 由分层抽样的性质结合题意计算即可;

【详解】 由题意可得, 要抽取的男生人数为 $50 \times \frac{294}{525} = 28$ 人.

故答案为: 28.

4. 设 $m \in \mathbf{R}$, 若圆 $x^2 + y^2 - 4y + m = 0$ 的面积为 π , 则 $m =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】将圆 $x^2 + y^2 - 4y + m = 0$ 化成标准方程得出半径为 $\sqrt{4-m}$ ，根据面积建立等式即可求解.

【详解】由题意得圆的标准方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 4-m$,

则圆的半径为 $\sqrt{4-m}$,

$\therefore$ 圆的面积为 $\pi(4-m) = \pi$,

解得: $m = 3$,

故答案为: 3.

5. 在无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 1$, 公比 $q = \frac{1}{2}$, 记 $S_n = a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{2n-1}^2$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$ _____.

【答案】 $\frac{16}{15}$

【解析】

【分析】由题意求得 $a_n = 1 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 利用等比数列的求和公式求得 $S_n = \frac{16}{15}[1 - (\frac{1}{16})^n]$, 再利用数列极限的运算法则求得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 的值.

【详解】由题意可得 $a_n = 1 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 则 $a_n^2 = (\frac{1}{4})^{n-1}$,

$$S_n = a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2n-1}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2} = \frac{[1 - (\frac{1}{16})^n]}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}[1 - (\frac{1}{16})^n],$$

$$\text{故有 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16}{15}[1 - (\frac{1}{16})^n] = \frac{16}{15},$$

故答案为: $\frac{16}{15}$.

6. 设 $\omega > 0$, $f(x) = \sin \omega x$, 若函数 $y = f(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值为 1, 但最小值不为 -1, 则 ω

的取值范围是_____.

【答案】 $\left[1, \frac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】根据正弦函数的单调性，可得 $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega > -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}\omega \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，求解可得结果.

【详解】当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $\omega x \in \left[-\frac{\pi}{3}\omega, \frac{\pi}{2}\omega\right]$ ，

由题意可知， $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega > -\frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} > \frac{\pi}{2}\omega \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，解得 $1 \leq \omega < \frac{3}{2}$.

故答案为： $\left[1, \frac{3}{2}\right)$.

7. 已知 m 为非零常数. 若在 $(x + \frac{m}{x})^7$ 的二项展开式中， x^3 的系数是 $\frac{1}{x^3}$ 的系数的 8 倍，则 $m =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】根据二项式定理分别求出展开式中含 x^3 ， $\frac{1}{x^3}$ 的项，然后根据已知建立方程即可求解.

【详解】展开式中含 x^3 的项为 $C_7^2 x^5 \left(\frac{m}{x}\right)^2 = 21m^2 x^3$ ，含 $\frac{1}{x^3}$ 的项为 $C_7^5 x^2 \left(\frac{m}{x}\right)^5 = 21m^5 \cdot \frac{1}{x^3}$ ，

所以由题意可得 $21m^2 = 8 \times 21m^5$ ，解得 $m = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

8. 设 $P(x, y)$ 是曲线 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 上一动点，则 $x+2y$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】构造函数 $g(x) = x + 2\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ，利用导数求解函数的单调性，即可求解极值点与端点值，比较即可求解.

【详解】由题意可得，令 $g(x) = x + 2\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $g'(x) = 1 - 2\sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

令 $g'(x) = 1 - 2\sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) > 0$, 则 $0 < x < \frac{\pi}{6}$

令 $g'(x) = 1 - 2\sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) < 0$, 则 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减

故 $g(x)_{\text{极大值}} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} = g(x)_{\text{最大值}} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

故答案: $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

9. 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \geq 0 \\ f(x), & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $g(x) \leq 2+x$ 的解集为_____.

【答案】 $[-1, +\infty)$

【解析】

【分析】先分别写出 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ 时 $g(x)$ 的表达式, 再分别解这两种情况下的不等式 $g(x) \leq 2+x$, 最后将解集合并.

【详解】当 $x \geq 0$ 时, 首先求出 $g(x)$ 的表达式,

因为 $x \geq 0$, 根据 $g(x) = -f(-x)$, 而 $f(x) = x^2$, 所以 $f(-x) = (-x)^2 = x^2$, 则 $g(x) = -x^2$.

然后解不等式 $g(x) \leq 2+x$, 即 $-x^2 \leq 2+x$, 移项得到 $x^2 + x + 2 \geq 0$.

对于二次函数 $y = x^2 + x + 2$, 其判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$,

且二次项系数 $1 > 0$, 所以 $x^2 + x + 2 > 0$ 恒成立, 所以 $x \geq 0$ 时不等式的解为 $x \geq 0$.

当 $x < 0$ 时, 求出 $g(x)$ 的表达式, 因为 $x < 0$, 根据 $g(x)$ 的定义 $g(x) = f(x) = x^2$.

解不等式 $g(x) \leq 2+x$, 即 $x^2 \leq 2+x$, 移项得到 $x^2 - x - 2 \leq 0$,

因式分解得 $(x-2)(x+1) \leq 0$. 解为 $-1 \leq x \leq 2$, 又 $x < 0$, 所以此时不等式解为 $-1 \leq x < 0$.

故答案为: $[-1, +\infty)$.

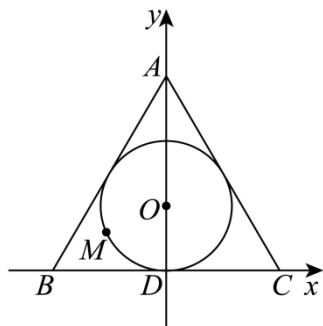
10. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, M 是 $\triangle ABC$ 的内切圆上一动点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ 的最小值为_____.

【答案】 $18 - 6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】建立平面直角坐标系，设 M 的坐标，由平面向量数量积的坐标和三角函数的有界性计算即可求得.

【详解】以 BC 的中点 D 为坐标原点， BC 所在直线为 x 轴， BC 的中垂线 AD 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，



因为等边 $\triangle ABC$ 的边长为 6,

所以 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心 O 在 AD 上，半径 $r = \frac{6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 6 + 6} = \sqrt{3}$,

则 $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$, $A(0, 3\sqrt{3})$, $O(0, \sqrt{3})$, $M(\sqrt{3} \cos \alpha, \sqrt{3} + \sqrt{3} \sin \alpha)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (-3, -3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AM} = (\sqrt{3} \cos \alpha, \sqrt{3} \sin \alpha - 2\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3\sqrt{3} \cos \alpha - 9 \sin \alpha + 18 = -6\sqrt{3} \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + 18$,

所以当 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ 取得最小值 $18 - 6\sqrt{3}$.

故答案为: $18 - 6\sqrt{3}$.

11. 若一个正整数的各位数码从左至右是严格增或严格减的，则称该数为“严格单调数”.在不大于 4000 的四位数中，“严格单调数”共有_____个.

【答案】112

【解析】

【分析】分成逐渐增大和逐渐减小两种情况，注意先选后排（“严格单调数”选出来不需要排，自动排列）.

【详解】先考虑从左往右逐渐增大的情况，因为不超过 4000，所以分成千位数取值为 1, 2, 3 三种情况考虑:

若千位数为 1，则后面百位，十位，个位数字比 1 大，

从剩下 8 个数字 2,3,4,5,6,7,8,9 中选 3 个不重复的从左到右依次增大，共有 $C_8^3 = 56$ 种选法;

若千位数为 2，则后面百位，十位，个位数字比 2 大，

则从剩下 7 个数字 3,4,5,6,7,8,9 中选 3 个不重复的从左到右依次增大, 共有 $C_7^3 = 35$ 种选法;

若千位数为 3, 则后面百位, 十位, 个位数字比 3 大,

则从剩下 6 个数字 4,5,6,7,8,9 中选 3 个不重复的从左到右依次增大, 共有 $C_6^3 = 20$ 种选法;

再考虑从左往右逐渐减小的情况, 因为不超过 4000, 所以千位数取值为 3, 则后面百位, 十位, 个位数字比 3 小,

则从剩下 3 个数字 0,1,2 中选 3 个不重复的从左到右依次减小, 共有 $C_3^3 = 1$ 种选法;

所以一共有 $56 + 35 + 20 + 1 = 112$ 个.

故答案为: 112.

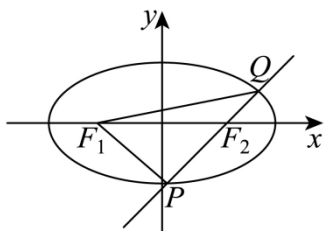
12. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 直线 l 经过点 F_2 , 且与 Γ 交于 P、Q 两点. 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $|F_2Q| = 1$, 则 Γ 的长轴长的最小值为_____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 利用数形结合, 设 $|PF_2| = t, (t > 1)$, 根据椭圆性质, 表示出直角三角形三边, 利用勾股定理建立等式, 再利用基本不等式求最值.

【详解】 设 $|PF_2| = t, (t > 1)$, 根据椭圆的性质, 则 $|PF_1| = 2a - t, |QF_1| = 2a - 1, |PQ| = t + 1$,



$\because PF_1 \perp PF_2$, 则 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, $|QF_1|^2 = |PF_1|^2 + |PQ|^2$,

即 $(2a - t)^2 + (t + 1)^2 = (2a - 1)^2$, $2t^2 + 2t = 4at - 4a$,

整理得: $a = \frac{2t^2 + 2t}{4(t - 1)} = \frac{t - 1}{2} + \frac{1}{t - 1} + \frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{t - 1}{2}\right)\left(\frac{1}{t - 1}\right)} + \frac{3}{2} = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$,

当且仅当: $\frac{t - 1}{2} = \frac{1}{t - 1}$, 即 $t = 1 + \sqrt{2}$ 时, 取等号,

$\therefore a = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$ 为最小值,

故长轴长 $2a$ 的最小值 $3 + 2\sqrt{2}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/975040041023012100>