2023-2024学年辽宁省县级重点高中协作体高三期中考试

数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若复数 $z=\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$（i为虚数单位），则 $\overline{z}=$（　　）

A. $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的除法化简复数 z，利用共轭复数的定义可得结果.

【详解】因为 $z=\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，故 $\overline{z}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

故选:A

2. 设全集 $U=\left\{x \middle| x^2-x-2\le 0, x\in \mathrm{Z}\right\}$，$\complement_U M=\{-1,0\}$，则（　　）

A. $2\in M$　　B. $-2\in M$　　C. $0\in M$　　D. $1\notin M$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次不等式，解得集合 U 的元素，根据补集的定义，可得答案.

【详解】由不等式 $x^2-x-2\le 0$，分解因式可得 $(x-2)(x+1)\le 0$，解得 $-1\le x\le 2$，

由 $x\in \mathrm{Z}$ 可得 $U=\{-1,0,1,2\}$，

由 $\complement_U M=\{-1,0\}$，则 $M=\{1,2\}$，故A正确，B，C，D均错误.

故选：A.

3. “$a>0$”是“$\forall x\in \mathbf{R}$，$(a-1)x^2+2(1-a)x+3>0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】若$\forall x\in \mathbf{R}$，$(a-1)x^2+2(1-a)x+3>0$，则$a=1$或$\begin{cases} a-1>0 \\ \Delta=4(1-a)^2-12(a-1)<0 \end{cases}$，

解得$1\le a<4$．而$[1,4)\subseteq(0,+\infty)$，所以“$a>0$”是“$\forall x\in \mathbf{R}$，$(a-1)x^2+2(1-a)x+3>0$”的必要不充分条件.

故选：B

4. 若关于x的不等式$x^2-6x+2-a>0$在区间$[0,5]$内有解，则实数a的取值范围是（　　）.

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,5)$　　C. $(-\infty,-3)$　　D. $(-\infty,2)$

【答案】D

【解析】

【分析】不等式$x^2-6x+2-a>0$在区间$[0,5]$内有解，仅需$(x^2-6x+2)_{\max}>a$，利用一元二次函数的图像和性质求解即可.

【详解】不等式$x^2-6x+2-a>0$在区间$[0,5]$内有解，仅需$(x^2-6x+2)_{\max}>a$即可，

令$f(x)=x^2-6x+2$，因为$f(x)$的对称轴为$x=-\dfrac{-6}{2\times1}=3$，$f(0)=2$，$f(5)=-3$，

所以由一元二次函数的图像和性质的得$(x^2-6x+2)_{\max}=2$，

所以$a<2$，

故选：D

5. 已知向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(3,2)$，$\vec{c}=(1,4)$，则$\cos\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量数量积的坐标表示及夹角公式求解即可.

【详解】因为$\vec{b}-\vec{c}=(2,-2)$，

所以$\cos\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{c}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})}{|\vec{a}||\vec{b}-\vec{c}|}=\dfrac{3\times2+1\times(-2)}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：A.

6. 已知$\{a_n\}$为等比数列，其公比$q=2$，前 7 项的和为 1016，则$\log_2(a_3a_5)$的值为（　　）

A. 8　　　　B. 10　　　　C. 12　　　　D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】根据等比数列的前n项和公式求出首项a_1，进而可得a_n，再结合对数运算即可得答案.

【详解】依题意，$S_7=\dfrac{a_1\left(1-2^7\right)}{1-2}=1016$，$127a_1=1016$，解得$a_1=8$，因此$a_n=2^{n+2}$，

所以$\log_2(a_3a_5)=\log_2\left(2^5\times 2^7\right)=\log_2 2^{12}=12$.

故选：C

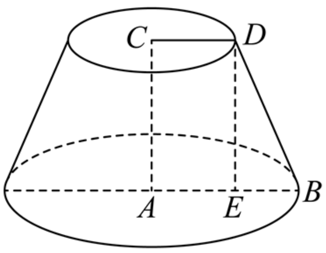
7. 现有一个圆台形状的容器，从内部量，其两个底面的面积之比为$1:4$，且轴截面的面积为 9 平方分米，母线长为上底面圆的半径的$\sqrt{10}$倍，则这个圆台形容器的容积为（π 取 3）（　　）

A. 24 升　　　　B. 21 升　　　　C. 30 升　　　　D. 36 升

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，分别求得圆台的上，下底面的半径以及高，再结合圆台的体积公式，即可得到结果.

【详解】

如图，设圆台上、下底面圆心分别为 C，A，半径分别为CD，AB，由题意得$CD:AB=1:2$，即$AB=2CD$，因为圆台的轴截面面积为 9．所以$\frac{1}{2}(2AB+2CD)\cdot AC=9$，所以$AC\cdot CD=3$，过点 D 作$DE\perp AB$于点 E，所以$BD=\sqrt{AC^2+(AB-CD)^2}=\sqrt{AC^2+CD^2}$．因为母线长为上底面圆的半径的$\sqrt{10}$倍，所以$10CD^2=AC^2+CD^2$，即$AC=3CD$．所以$AC=3$，$CD=1$，所以$AB=2$，设上底面圆的面积与下底面圆的面积分别为$S_1,S_2$，所以该圆台容器的容积

$V=\frac{1}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)h=\frac{1}{3}\left(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\times 4\pi}\right)\times 3=7\pi\approx 21$，

故选：B.

8. 已知$a=\frac{\ln\pi}{\pi}$，$b=1-\frac{3}{2\pi}$，$c=\sin\frac{2\pi}{5}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A. $a<c<b$　　　　B. $a<b<c$　　　　C. $c<a<b$　　　　D. $b<c<a$

【答案】B

【解析】

【分析】利用正弦函数的单调性可得$\sin\frac{2\pi}{5}>0.8$，令$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x},x>0$，利用导数求其单调性可得$\frac{\ln\pi}{\pi}<0.370$，由$3.14<\pi<3.15$可得$0.522<1-\frac{3}{2\pi}<0.524$，即可求解

【详解】因为$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增，且$\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$，

所以$\sin\frac{2\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1.6}{2}=0.8$，

令$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x},x>0$，所以$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当$0<x<\mathrm{e}, f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增；当$x>\mathrm{e}, f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减；

所以$f\left(x\right)_{\max}=f\left(\mathrm{e}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以$f\left(\pi\right)<f\left(\mathrm{e}\right)$即$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{1}{2.7}\approx0.370$，

因为$3.14<\pi<3.15$，且$1-\frac{3}{2\times3.15}\approx0.524$，$1-\frac{3}{2\times3.14}\approx0.522$

所以$0.522<b=1-\frac{3}{2\pi}<0.524$，

综上，$a<b<c$

故选：B

【点睛】方法点睛：利用导数研究函数的综合问题，通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，即可求得取值范围

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 关于函数$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 函数$f\left(x\right)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减

B. 函数$f\left(x\right)$的图像关于$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$中心对称

C. 函数$f\left(x\right)$的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$

D. 将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后，可以得到 $g(x)=2\cos 2x$ 的图像

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据函数的解析式分别应用对称轴,对称中心,单调性及平移逐个判断选项即可.

【详解】对于 A: $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$,所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减,故 A 正确;

对于 B:令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$,则 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,故函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)$,故 B 错误;

对于 C: 令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,则 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,故函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,故 C 正确;

对于 D: 将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度可得

$y=2\sin\left(2\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos 2x$,故 D 正确.

故选:ACD.

10. 对于数列 $\{a_n\}$，如果 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为等比数列，那么就称 $\{a_n\}$ 为“等和比数列”．已知数列 $b_n=a_n+a_{n+1}$，且 $b_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，则下列判断中正确的有（　　）

A. $a_{2024}=\frac{2^{2024}-1}{3}$　　B. $a_{2024}=\frac{2^{2025}-1}{3}$　　C. $S_{2024}=\frac{2^{2025}-2}{3}$　　D. $S_{2024}=\frac{2^{2024}-1}{3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】由 $a_n+a_{n+1}=2^n$①，则当 $n\ge 2$ 时有 $a_{n-1}+a_n=2^{n-1}$②，两式相减得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-1}$．求出 a_2 后利用累加法求得 a_{2024}，判断 AB，利用 $S_{2024}=b_1+b_3+\cdots+b_{2023}$ 可得 S_{2024}，从而判断 CD，

【详解】根据题意知，数列 $\{a_n\}$ 中，有 $a_n+a_{n+1}=2^n$①，则当 $n\ge 2$ 时有 $a_{n-1}+a_n=2^{n-1}$②，

①－②可得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-1}$．又由 $a_1+a_2=2$，$a_1=1$，得 $a_2=1$，则 $a_4-a_2=2^2$，$a_6-a_4=2^4$，$\cdots$，$a_{2024}-a_{2022}=2^{2022}$，

则 $a_{2024}=\left(a_{2024}-a_{2022}\right)+\left(a_{2022}-a_{2020}\right)+\cdots+\left(a_4-a_2\right)+a_2=2^{2022}+2^{2020}+\cdots\cdots+2^2+1=\frac{2^{2024}-1}{3}$，A 正确，B 错误；

若 $a_n+a_{n+1}=2^n$，则 $a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=2^3$，$\cdots$，$a_{2023}+a_{2024}=2^{2023}$，则 $S_{2024}=\left(a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4\right)+\cdots+\left(a_{2023}+a_{2024}\right)=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2023}=\frac{2^{2025}-2}{3}$，C 正确，D 错误.

故选：AC

11. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $\left(x^2+x\right)f'(x)-f(x)>0$ 恒成立，则下列结论正确的有（　　）

A. $4f(1)<3f(2)$　　B. $16f(3)>15f(4)$　　C. $6f(2)<5f(4)$　　D. $25f(4)>24f(5)$

【答案】AC

【解析】

【分析】构造函数 $g(x)=(1+\frac{1}{x})f(x)$，利用导数得出其单调性，然后由单调性比较大小，从而判断各选项.

【详解】令 $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)+\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\frac{\left(x^2+x\right)f'(x)-f(x)}{x^2}$.

$\because\left(x^2+x\right)f'(x)-f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. 由 $g(2)>g(1)$，得 $\frac{3}{2}f(2)>2f(1)$，即 $4f(1)<3f(2)$，故 A 正确；

由 $g(4)>g(3)$，得 $\frac{5}{4}f(4)>\frac{4}{3}f(3)$，即 $16f(3)<15f(4)$，故 B 错误；

由 $g(2)<g(4)$，得 $\frac{3}{2}f(2)<\frac{5}{4}f(4)$，即 $6f(2)<5f(4)$，故 C 正确；

由 $g(5)>g(4)$ 得 $\frac{6}{5}f(5)>\frac{5}{4}f(4)$，即 $25f(4)<24f(5)$，故 D 错误.

故选：AC.

12. 素描几何体是素描初学者学习绘画的必学课程，是复杂形体最基本的组成和表现方式，因此几何体是美术入门最重要的一步. 素描几何体包括：柱体、锥体、球体以及它们的组合体和穿插体. 如图 2 所示的几何体可以看作是一个正四棱柱和一个正四棱锥组成的几何体，已知正四棱柱和正四棱锥的高之比为 $1:2$，且底面边长均为 $4\sqrt{3}$，若该几何体的所有顶点都在某个球的表面上，则（　　）

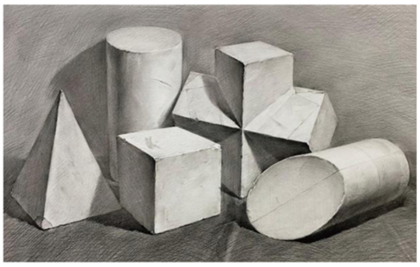


图1

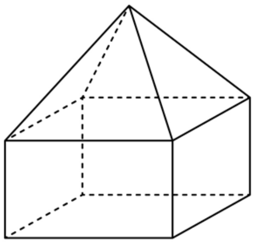


图2

A. 正四棱柱和正四棱锥组成的几何体的体积为 160

B. 该几何体外接球的体积为$\frac{200\pi}{3}$

C. 正四棱锥的侧棱与其底面所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$

D. 正四棱锥的侧面与其底面的夹角的正弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【答案】AD

【解析】

【分析】利用勾股定理列方程，求得外接球的半径以及正四棱锥、正四棱柱的高，根据正四棱柱和正四棱锥的体积公式即可判断 A；根据球的体积公式即可判断 B；根据正四棱锥的侧棱与其底面所成角为$\angle PAO_1$即可判断 C；根据$\angle PEO_1$是正四棱锥的侧面与其底面的夹角即可判断 D.

【详解】设几何体外接球的球心为O，正四棱锥为$P-ABCD$，底面中心为O_1，

设正四棱柱为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其下底面中心为O_2，

设E是BC的中点，连接O_1E，PE，

设球O的半径为R，正四棱柱的高为x，

则正四棱锥的高为$2x$，$x>0$，

所以根据题意可得$R=2x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x$，$AC=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}=4\sqrt{6}$，

所以$O_2C_1=2\sqrt{6}$，所以$\left(2\sqrt{6}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{5x}{2}\right)^2$，解得$x=2$，

所以正四棱柱的高为2，正四棱锥的高为4，球O的半径为5.

对于 A，组合体的体积为$4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times2+\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times4=160$，故 A 正确；

对于 B，球O的体积为$\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{500}{3}\pi$，故 B 错误；

对于 C，依题意可知正四棱锥的侧棱与其底面所成角为$\angle PAO_1$，

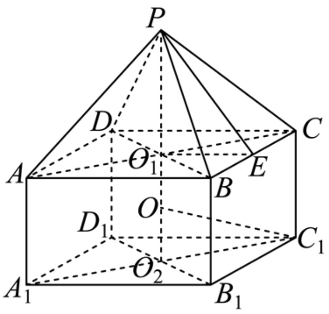
所以$\sin\angle PAO_1=\dfrac{PO_1}{PA}=\dfrac{4}{\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，故 C 错误；

对于 D，根据正四棱锥的性质可知$BC\perp O_1E$，$BC\perp PE$，

则$\angle PEO_1$是正四棱锥的侧面与其底面的夹角，

所以$\sin\angle PEO_1=\dfrac{PO_1}{PE}=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，故 D 正确.

故选：AD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，则$\cos\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{6}\right)=$_________.

【答案】$-\dfrac{5}{9}$

【解析】

【分析】利用余弦的二倍角公式和诱导公式计算即可.

【详解】因为$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，所以$\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{5}{9}$，

则$\cos\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{5}{9}$.

故答案为：$-\dfrac{5}{9}$.

14. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_1>0$，$S_8=S_{22}$，则S_n取最大值时，$n=$______.

【答案】15

【解析】

【分析】由条件，利用前 n 项和公式可得 a_1 与 d 关系，由此分析项的正负可得解.

【详解】由题意知 $a_1>0$，$S_8=S_{22}$，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $8a_1+28d=22a_1+231d$，即 $203d=-14a_1$，因为 $a_1>0$，故 $d<0$，

即等差数列 $\{a_n\}$ 为首项为正的递减数列，又由 $S_8=S_{22}$，

可得 $a_9+a_{10}+\cdots+a_{22}=0$，即 $7(a_{15}+a_{16})=0$，故 $a_{15}>0$，$a_{16}<0$，

即等差数列 $\{a_n\}$ 前 15 项为正，从第 16 项开始为负，

故 S_n 取最大值时，$n=15$.

故答案为：15.

15. 已知点 A，B，C 均在球 O 的球面上运动，且满足 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 6，则球 O 的体积为___________.

【答案】$32\sqrt{3}\pi$

【解析】

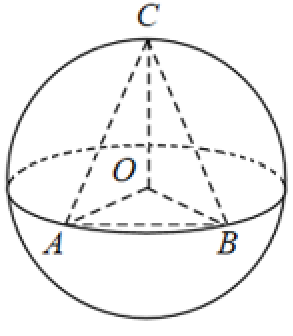
【分析】由题意可得当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，由 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=6$，列方程求出 R，从而可求出球的体积.

【详解】如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，

设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\dfrac{\sqrt{3}}{12}R^3=6$，

故 $R^3=24\sqrt{3}$，则球 O 的体积为 $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$.

故答案为：$32\sqrt{3}\pi$



16. 已知函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{ax-1}-\ln x-1$，若 $f(x)\ge 0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$\left[1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】先将不等式变形为 $ax\mathrm{e}^{ax}\ge \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}x)}\ln\left(\mathrm{e}x\right)$，构造函数 $g\left(t\right)=t\mathrm{e}^{t}$，利用导数求其单调性，结合 $\ln\left(\mathrm{e}x\right)$ 的值分类，当 $\ln\left(\mathrm{e}x\right)\le 0$，不等式恒成立，当 $\ln\left(\mathrm{e}x\right)>0$，$a\ge\dfrac{1+\ln x}{x}$ 恒成立，构造 $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ 求其最大值即可.

【详解】由 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{ax-1}-\ln x-1\ge 0$，变形得 $ax\mathrm{e}^{ax}\ge \mathrm{e}x\ln\left(\mathrm{e}x\right)$，所以 $ax\mathrm{e}^{ax}\ge \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}x)}\ln\left(\mathrm{e}x\right)$.

令 $g\left(t\right)=t\mathrm{e}^{t}$，则 $g'\left(t\right)=\left(t+1\right)\mathrm{e}^{t}$，

当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数，

当 $\ln\left(\mathrm{e}x\right)\le 0$，则不等式恒成立，

当 $\ln\left(\mathrm{e}x\right)>0$，则 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，由 $ax\mathrm{e}^{ax}\ge \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}x)}\ln\left(\mathrm{e}x\right)$ 即 $g\left(ax\right)\ge g\left(\ln\left(\mathrm{e}x\right)\right)$，

所以 $ax\ge\ln\left(\mathrm{e}x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，即 $a\ge\dfrac{1+\ln x}{x}$ 恒成立.

设 $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $h'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

当 $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 的最大值为 $h(1)=1$，所以 $a\ge 1$，故实数 a 的取值范围是 $\left[1,+\infty\right)$

故答案为：$\left[1,+\infty\right)$.

【点睛】关键点睛：本题的关键是利用同构思想构造出函数 $g\left(t\right)=t\mathrm{e}^{t}$，再是转化为 $a\ge\dfrac{1+\ln x}{x}$ 恒成立，再求出右边的最大值即可.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线.