浙江省台州市路桥中学 2022-2023 学年高三 5 月选考模拟考试数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若函数 $f(x)=3\cos x+4\sin x$ 在 $x=\theta$ 时取得最小值，则 $\cos\theta=$（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

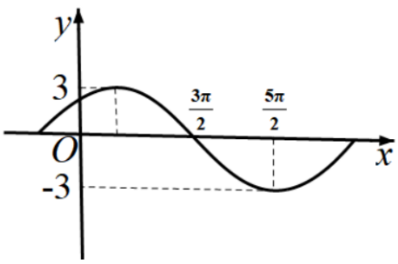
2．若 $z=(3-i)(a+2i)(a\in R)$ 为纯虚数，则 $z=$（　　）

A．$\frac{16}{3}i$　　B．$6i$　　C．$\frac{20}{3}i$　　D．20

3．已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $7S_2=4S_4$，则公比 q 的值为（　　）

A．1　　B．1 或 $\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图象如图，则此函数表达式为（　　）



A．$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

C．$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

5．已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$，则斜率 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

6．设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_4=\frac{40}{3}$，$3a_4-10a_3+3a_2=0$，则 $a_4=$（　　）

A．9　　B．27　　C．81　　D．$\frac{8}{3}$

7．设 **M** 是 ΔABC 边 **BC** 上任意一点，**N** 为 **AM** 的中点，若 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu$ 的值为(　)

A． 1　　　　**B．** $\frac{1}{2}$　　　　**C．** $\frac{1}{3}$　　　　**D．** $\frac{1}{4}$

8．已知定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，N 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的任意一点，点 F_1 关于点 N 的对称点为 M，线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P，则点 P 的轨迹是（　　）

A． 椭圆　　　　**B．** 双曲线　　　　**C．** 抛物线　　　　**D．** 圆

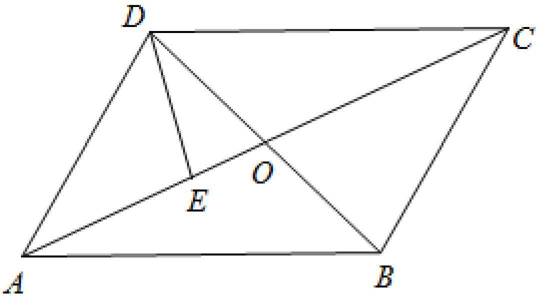
9．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{e\ln x}{x^2}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-mf(x)+\frac{1}{8}=0$ 有 **4** 个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

A． $(0,\frac{3}{4})$　　　　**B．** $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　　　**C．** $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$　　　　**D．** $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

10．设 x_1,x_2 为 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x\left(\omega>0\right)$ 的两个零点，且 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 **1**，则 $\omega=$（　　　）

A． π　　　　**B．** $\frac{\pi}{2}$　　　　**C．** $\frac{\pi}{3}$　　　　**D．** $\frac{\pi}{4}$

11．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，且 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EO}$，则 $\overrightarrow{ED}=$（　　）



A． $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　　　**B．** $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C． $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　　　**D．** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

12．已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 ***n*** 项和为 S_n，且 $a_4=-3$，$S_{12}=24$，若 $a_i+a_j=0$（$i,j\in\mathbf{N}^*$，且 $1\le i<j$），则 ***i*** 的取值集合是（　　）

A． $\left\{1,2,3\right\}$　　　　**B．** $\left\{6,7,8\right\}$　　　　**C．** $\left\{1,2,3,4,5\right\}$　　　　**D．** $\left\{6,7,8,9,10\right\}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，若过右焦点且与 x 轴垂直的直线与两条渐近线围成的三角形面积为 c^2，则双曲线的离心率为____________.

14．若关于 x 的不等式 $\frac{mx^2}{1+\ln x} \ge 2e^{n-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上恒成立，则 $\frac{n}{m}$ 的最大值为__________.

15．点 P_0 是曲线 $y=3\ln x+x+k$ （$k\in \mathbf{R}$）图象上的一个定点，过点 P_0 的切线方程为 $4x-y-1=0$，则实数 $\boldsymbol{k}$ 的值为______.

16．已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上.若球 O 的表面积为 28π,则该三棱柱的侧面积为___________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=2^{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且 b_n， a_n， b_{n+1} 成等差数列.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项；

（2）设 $c_n=b_n\cdot \log_2 a_{n+1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

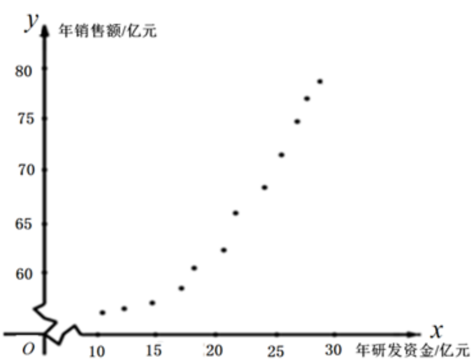
18．（12 分）某工厂生产某种电子产品，每件产品不合格的概率均为 p，现工厂为提高产品声誉，要求在交付用户前每件产品都通过合格检验，已知该工厂的检验仪器一次最多可检验 5 件该产品，且每 件产品检验合格与否相互独立．若每件产品均检验一次，所需检验费用较多，该工厂提出以下检 验方案：将产品每 k 个 $(k\le 5)$ 一组进行分组检验，如果某一组产品检验合格，则说明该组内产品均合格，若检验不合格，则说明该组内有不合格产品，再对该组内每一件产品单独进行检验，如此，每一组产品只需检验 1 次或 $1+k$ 次．设该工厂生产 1000 件该产品，记每件产品的平均检验次 数为 X．

（1）求 X 的分布列及其期望；

（2）（i）试说明，当 p 越小时，该方案越合理，即所需平均检验次数越少；

（ii）当 $p=0.1$ 时，求使该方案最合理时 k 的值及 1000 件该产品的平均检验次数.

19．（12 分）某芯片公司为制定下一年的研发投入计划，需了解年研发资金投入量□（单位：亿元）对年销售额□（单位：亿元）的影响.该公司对历史数据进行对比分析，建立了两个函数模型:①□ = □ + □□²，②□ = e^□□+□，其中□, □, □, □均为常数，e为自然对数的底数.



现该公司收集了近 12 年的年研发资金投入量$□_□$和年销售额$□_□$的数据，$□ = 1,2,\cdots,12$，并对这些数据作了初步处理，得到了右侧的散点图及一些统计量的值．令$□_□ = □_□^2, □_□ = \ln □_□ (□ = 1,2,\cdots,12)$，经计算得如下数据：

$\overline{□}$	$\overline{□}$	$\sum\limits_{□=1}^{12}(□_□ - \overline{□})^2$	$\sum\limits_{□=1}^{12}(□_□ - \overline{□})^2$	$\overline{□}$	$\overline{□}$
20	66	770	200	460	4.20

$\sum\limits_{□=1}^{12}(□_□ - \overline{□})^2$	$\sum\limits_{□=1}^{12}(□_□ - \overline{□})(□_□ - \overline{□})$	$\sum\limits_{□=1}^{12}(□_□ - \overline{□})^2$
3125000	21500	0.308

（1）设$\{□_□\}$和$\{□_□\}$的相关系数为$□_1$，$\{□_□\}$和$\{□_□\}$的相关系数为$□_2$，请从相关系数的角度，选择一个拟合程度更好的模型；

（2）（i）根据（1）的选择及表中数据，建立$□$关于$□$的回归方程（系数精确到 0.01）；

（ii）若下一年销售额$□$需达到 90 亿元，预测下一年的研发资金投入量$□$是多少亿元？

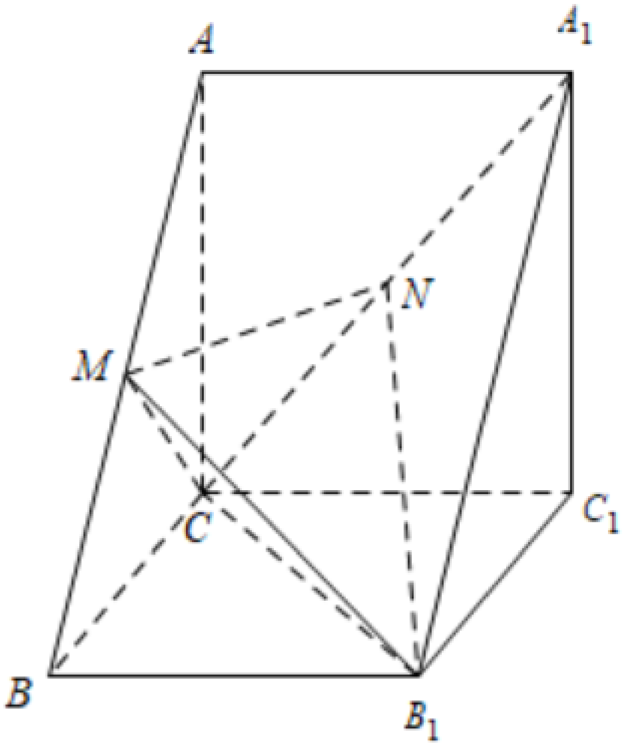
附：①相关系数$$□ = \frac{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\overline{□})(□_□-\overline{□})}{\sqrt{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\overline{□})^2\sum_{□=1}^{□}(□_□-\overline{□})^2}}$$，回归直线$□ = □ + □□$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$□ = \frac{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\overline{□})(□_□-\overline{□})}{\sum_{□=1}^{□}(□_□-\overline{□})^2}$$，$□ = \overline{□} - □\overline{□}$；

② 参考数据：$308 = 4 \times 77$，$\sqrt{90} \approx 9.4868$，$e^{4.4998} \approx 90$．

20．（12 分）如图，三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中，$AA_1 \perp$平面ABC，$\angle ACB = 90^\circ, AC = CB = 2$，$M$，$N$分别为

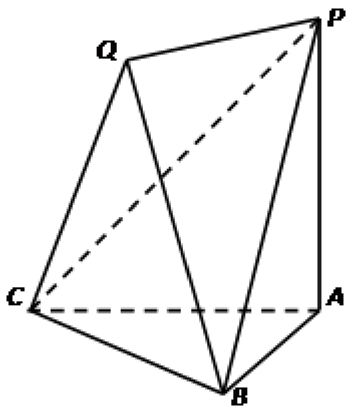
AB，A_1C 的中点.



（1）求证：$MN//$平面BB_1C_1C；

（2）若平面$CMN\perp$平面B_1MN，求直线AB与平面B_1MN所成角的正弦值.

21.（12 分）如图，已知平面QBC与直线PA均垂直于$Rt\Delta ABC$所在平面，且$PA=AB=AC$．



（1）求证：$PA//$平面QBC；

（2）若$PQ\perp$平面QBC，求CQ与平面PBC所成角的正弦值.

22.（10 分）已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-ax+1-a\left(a\in R\right)$.

（1）若$f\left(x\right)\le 0$对任意$x>-1$恒成立，求实数a的取值范围；

（2）求证：$-\ln\left(x+1\right)+xe^{x-1}-x+1\ge 0$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**D**

【解析】

利用辅助角公式化简 $f(x)$ 的解析式，再根据正弦函数的最值，求得 $f(x)$ 在 $x=\theta$ 函数取得最小值时 $\cos\theta$ 的值.

【详解】

解：$f(x)=3\cos x+4\sin x=5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)=5\sin(x+\alpha)$，其中，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

故当 $\theta+\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，即 $\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha(k\in Z)$ 时，函数取最小值 $f\left(\theta\right)=-5$，

所以 $\cos\theta=\cos(2k\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查辅助角公式，正弦函数的最值的应用，属于基础题.

2．**C**

【解析】

根据复数的乘法运算以及纯虚数的概念，可得结果.

【详解】

$z=\left(3-i\right)\left(a+2i\right)=3a+2+\left(6-a\right)i$

$\because z=\left(3-i\right)\left(a+2i\right)\left(a\in R\right)$ 为纯虚数，

$\therefore 3a+2=0$ 且 $6-a\neq 0$

得 $a=-\frac{2}{3}$，此时 $z=\frac{20}{3}i$

故选：***C.***

【点睛】

本题考查复数的概念与运算，属基础题.

3．**C**

【解析】

由$7S_2=4S_4$可得$3\left(a_1+a_2\right)=4\left(a_3+a_4\right)$，故可求$q$的值.

【详解】

因为$7S_2=4S_4$，所以$3\left(a_1+a_2\right)=4\left(S_4-S_2\right)=4\left(a_3+a_4\right)$，

故$q^2=\dfrac{3}{4}$，因$\left\{a_n\right\}$为正项等比数列，故$q>0$，所以$q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选**C.**

【点睛】

一般地，如果$\left\{a_n\right\}$为等比数列，S_n为其前n项和，则有性质：

（1）若$m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q$，则$a_m a_n=a_p a_q$；

（2）公比$q\neq 1$时，则有$S_n=A+Bq^n$，其中A,B为常数且$A+B=0$；

（3）$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 为等比数列（$S_n\neq 0$）且公比为q^n.

4．**B**

【解析】

由图象的顶点坐标求出A，由周期求出ω，通过图象经过点$\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$，求出$\varphi$，从而得出函数解析式.

【详解】

解：由图象知$A=3$，$T=4\left(\dfrac{5\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\right)=4\pi$，则$\omega=\dfrac{2\pi}{4\pi}=\dfrac{1}{2}$，

图中的点$\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$应对应正弦曲线中的点$(\pi,0)$，

所以$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\pi}{2}+\varphi=\pi$，解得$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

故函数表达式为$f\left(x\right)=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

故选：**B.**

【点睛】

本题主要考查三角函数图象及性质，三角函数的解析式等基础知识；考查考生的化归与转化思想，数形结合思想，属于基础题.

5．**C**

【解析】

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，设直线 l 的方程为：$y=kx+b$，与抛物线方程联立，由 $\Delta>0$ 得 $kb<1$，利用韦达定理结合已知条件得 $b=\dfrac{2-k^2}{k}$，$m=\dfrac{2}{k}$，代入上式即可求出 k 的取值范围.

【详解】

设直线 l 的方程为：$y=kx+b$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立方程 $\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=4x \end{cases}$，消去 y 得：$k^2x^2+(2kb-4)x+b^2=0$，

$\therefore \Delta=(2kb-4)^2-4k^2b^2>0$，

$\therefore kb<1$，

且 $x_1+x_2=\dfrac{4-2kb}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{b^2}{k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\dfrac{4}{k}$，

$\because$ 线段 AB 的中点为 $M(1,m)$ $(m>0)$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4-2kb}{k^2}=2$，$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}=2m$，

$\therefore b=\dfrac{2-k^2}{k}$，$m=\dfrac{2}{k}$，

$\because m>0$，

$\therefore k>0$，

把 $b=\dfrac{2-k^2}{k}$ 代入 $kb<1$，得 $2-k^2<1$，

$\therefore k^2>1$，

$\therefore k>1$，

故选：C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系，考查了韦达定理的应用，属于中档题.

6．**A**

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由$3a_4-10a_3+3a_2=0$，得$3q^2-10q+3=0$，解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$.

因为$S_4>0$.且数列$\{a_n\}$递增，所以$q=3$.

又$S_4=\frac{a_1\left(1-3^4\right)}{1-3}=\frac{40}{3}$，解得$a_1=\frac{1}{3}$，

故$a_4=\frac{1}{3}\times3^3=9$.

故选：**A**

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7．**B**

【解析】

设$\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$，通过$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$，再利用向量的加减运算可得$\overrightarrow{AN}=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$，结合条件即可得解.

【详解】

设$\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$，

则有$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$.

又$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

所以$\begin{cases}\lambda=\frac{1-t}{2}\\ \mu=\frac{t}{2}\end{cases}$，有$\lambda+\mu=\frac{1-t}{2}+\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$.

故选 **B.**

【点睛】

本题考查了向量共线及向量运算知识，利用向量共线及向量运算知识，用基底向量向量来表示所求向量，利用平面向量表示法唯一来解决问题.

8．**B**

【解析】

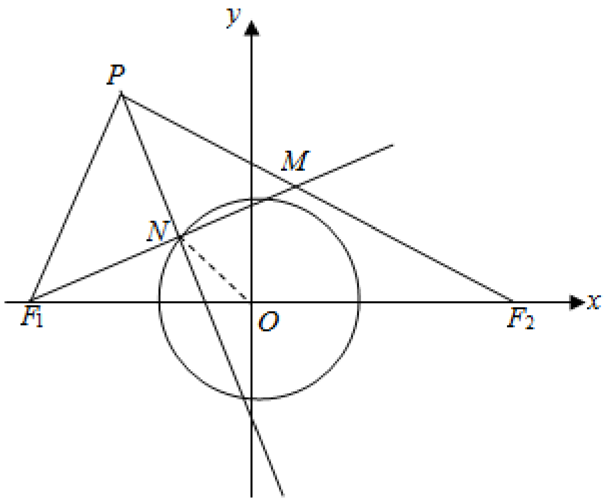
根据线段垂直平分线的性质，结合三角形中位线定理、圆锥曲线和圆的定义进行判断即可.

【详解】

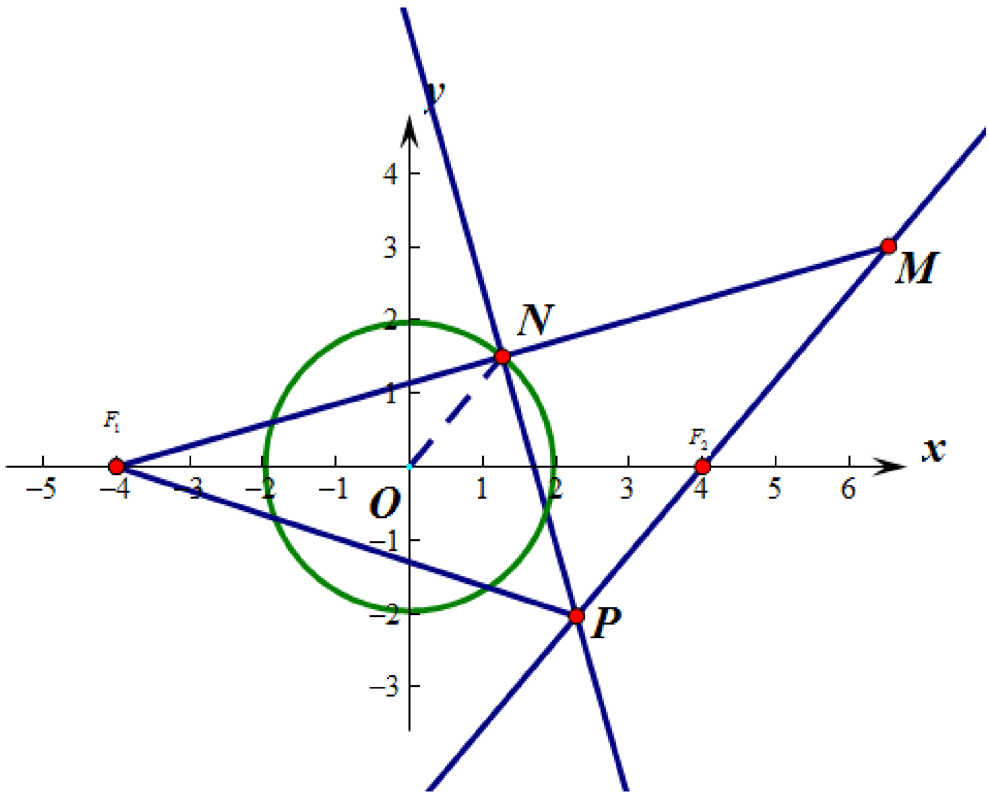
因为线段F_1M的垂直平分线与直线F_2M相交于点P，如下图所示：

所以有$PF_1=PM=PF_2-MF_2$，而O,N是中点，连接ON，故$MF_2=2ON=4$，

因此$PF_2-PF_1=4(4<F_2F_1)$



当N在如下图所示位置时有，所以有$PF_1=PM=PF_2+MF_2$，而O,N是中点，连接ON，



故$MF_2=2ON=4$，因此$PF_1-PF_2=4(4<F_2F_1)$，

综上所述：有$\left|PF_1-PF_2\right|=4(4<F_2F_1)$，所以点$P$的轨迹是双曲线.

故选：**B**

【点睛】

本题考查了双曲线的定义，考查了数学运算能力和推理论证能力，考查了分类讨论思想.