

# 函数与导数

## 导数专项练习

考试范围：导数与函数；考试时间：90 分钟；

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息
2. 请将答案正确填写在答题卡上

### 第 I 卷（选择题）

#### 一、单选题

1. 曲线  $y = \ln x - \frac{2}{x}$  在  $x=1$  处的切线的倾斜角为  $\alpha$ ，则  $\cos 2\alpha$  的值为（ ）

- A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{3}{5}$

2. 函数  $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  的极大值点为（ ）

- A.  $-\frac{2\pi}{3}$                       B.  $-\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{2\pi}{3}$

3. 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出的“牛顿数列”在航空航天中应用广泛，若

数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ，则称数列  $\{x_n\}$  为牛顿数列. 如果函数  $f(x) = x^2 - x - 2$ ，数列  $\{x_n\}$  为牛顿数

列，设  $a_n = \ln \frac{x_n - 2}{x_n + 1}$  且  $a_1 = -1$ ， $x_n > 2$ ，数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $S_{2021} =$ （ ）

- A.  $2^{2021} - 1$                       B.  $1 - 2^{2021}$
- C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2021} - \frac{1}{2}$                       D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2021} - 2$

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若不等式  $f(x) \leq |x - k|$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立，则实数  $k$  的取值范围是

（ ）

- A.  $(-\infty, 1]$                       B.  $[1, +\infty)$                       C.  $[0, 1]$                       D.  $[-1, 0]$

5. 已知  $a, b$  为正实数，直线  $y = x - 2a$  与曲线  $y = \ln(x + b)$  相切，则  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值是（ ）

- A. 6                      B.  $4\sqrt{2}$                       C. 8                      D.  $2\sqrt{2}$

6. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，其导函数为  $f'(x)$ ，且当  $x > 0$  时， $f'(x) \cdot \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ ，则不等式

$(x^2 - 1)f(x) < 0$  的解集为（ ）

A.  $(-1,1)$

B.  $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C.  $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

D.  $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

7. 已知函数  $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$ , 若正实数  $m, n$  满足  $f(m-9) + f(2n) = 2$ , 则  $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值为 ( )

A. 8

B. 4

C.  $\frac{8}{3}$

D.  $\frac{8}{9}$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x + 4a, & x > 0 \\ 2 - \log_a(x+1), & x \leq 0 \end{cases}$  在定义域上单调递增, 且关于  $x$  的方程  $f(x) = x + 2$  恰有一个实

数根, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

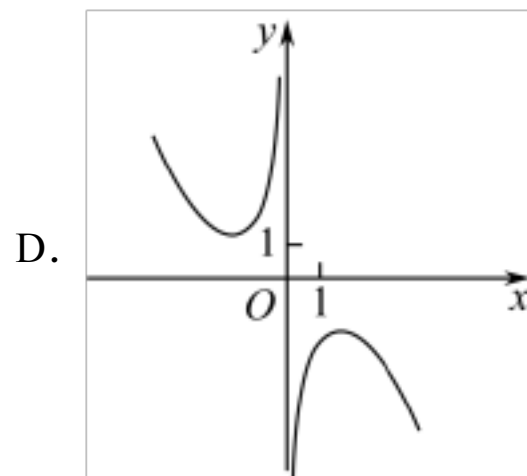
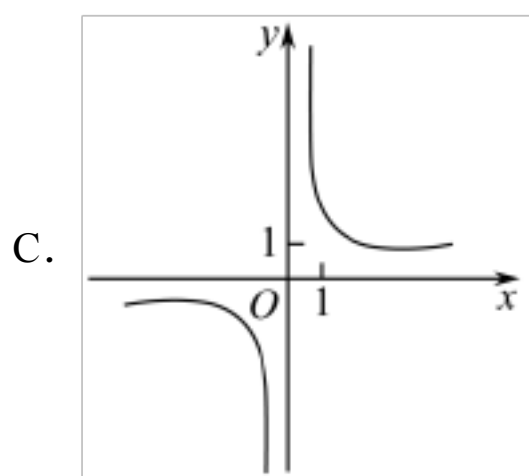
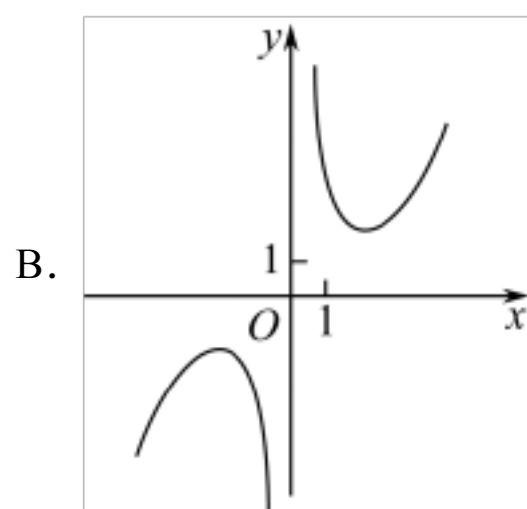
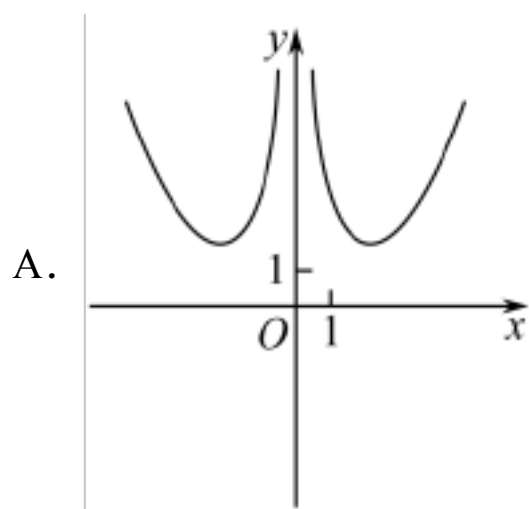
A.  $[\frac{1}{4}, 1)$

B.  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}]$

C.  $[\frac{1}{e}, 1)$

D.  $(0, 1)$

9. 函数  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$  的图象大致为 ( )



10. 目前, 我国的水环境问题已经到了刻不容缓的地步, 河道水质在线监测  $COD$  传感器针对水源污染等无组织污染源的在线监控系统, 进行 24 小时在线数据采集和上传通讯, 并具有实时报警功能及统计分析报告, 对保护环境有很大帮助. 该传感器在水中逆流行进时, 所消耗的能量为  $E = kv^2t$ , 其中  $v$  为传感器在静水中行进的速度(单位:  $\text{km/h}$ ),  $t$  为行进的时间(单位:  $\text{h}$ ),  $k$  为常数, 如果待测量的河道的水流速度为  $3\text{km/h}$ , 则该传感器在水中逆流行进  $10\text{km}$  消耗的能量最小值为 ( )

A.  $60k$

B.  $120k$

C.  $180k$

D.  $240k$

11. 已知函数  $f(x) = \sin x$  和直线  $l: y = x + a$ , 那么“ $a = 0$ ”是“直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切”的 ( )

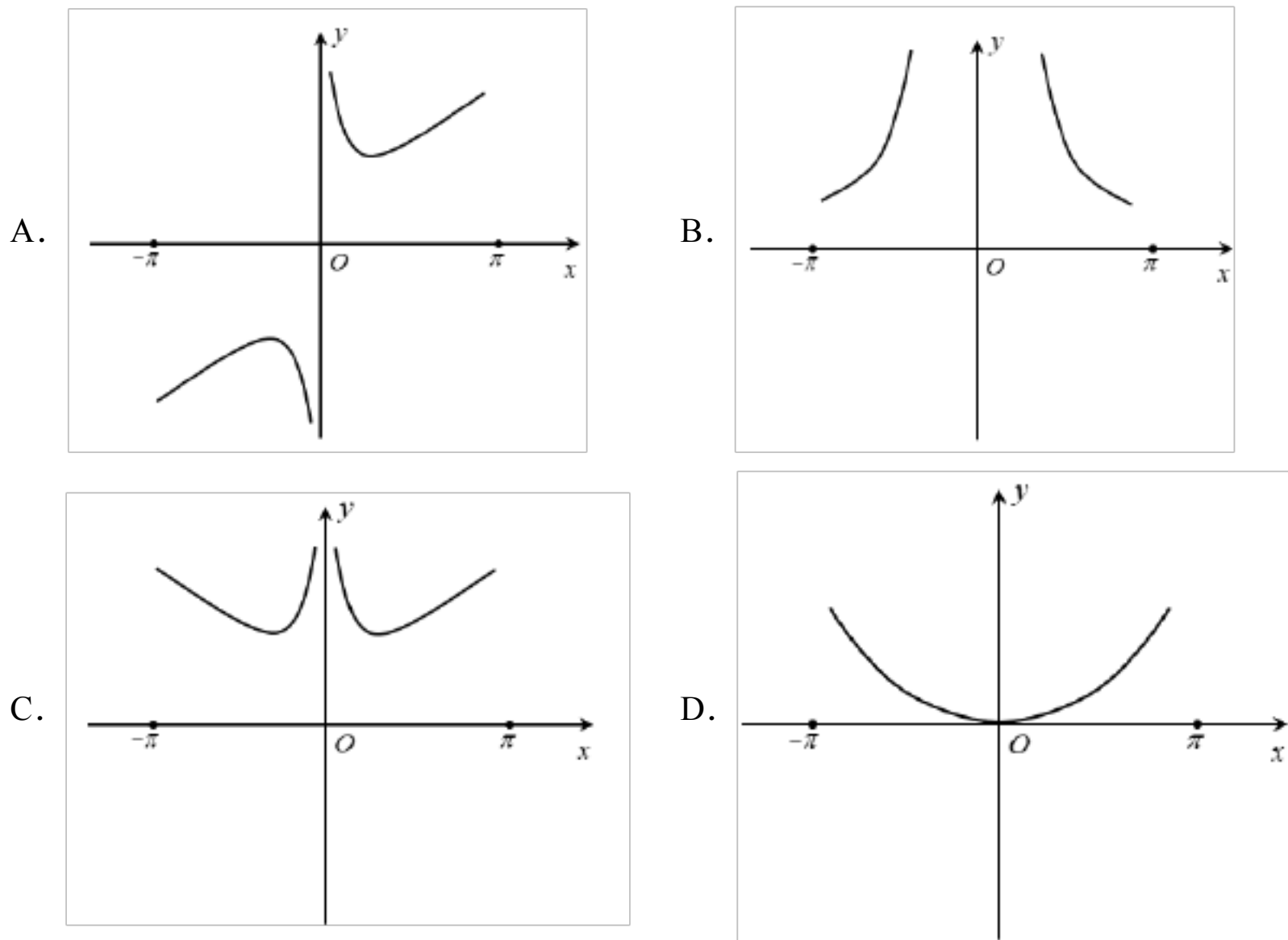
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. 函数  $f(x) = \frac{x}{x - \sin x}$  ( $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ) 的图象大致是 ( )



13. 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + a^2 + 1$  为偶函数, 则  $f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程为 ( )

- A.  $2x - y = 0$       B.  $2x - y + 1 = 0$       C.  $2x - y + 2 = 0$       D.  $2x - y - 1 = 0$

14. 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_8 = 4$ , 函数  $f(x) = x(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_8)$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A.  $2^{12}$       B.  $2^9$       C.  $2^8$       D.  $2^6$

15. 若幂函数  $f(x)$  的图象过点  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 则函数  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$  的递增区间为 ( )

- A.  $(0, 2)$       B.  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$       C.  $(-2, 0)$       D.  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

16. 已知定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(x) + 4x > 0$ , 其中  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数, 则不等式

$f(\sin x) - \cos 2x \geq 0$  的解集为 ( )

- A.  $\left[-\frac{1}{3} + 2k, \frac{1}{3} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$       B.  $\left[-\frac{1}{6} + 2k, \frac{1}{6} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$   
C.  $\left[\frac{1}{3} + 2k, \frac{2}{3} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$       D.  $\left[\frac{1}{6} + 2k, \frac{5}{6} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$

17. 已知函数  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $f_1(x) = f'(x)$ ,  $f_2(x) = f_1'(x)$ ,  $f_3(x) = f_2'(x)$ , ..., 依此类推,  $f_{2020}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $-\sqrt{2}$       C.  $0$       D.  $\pm\sqrt{2}$

18. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $F_1$  且垂直于  $x$  轴的直线与该双曲

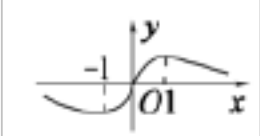
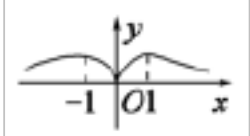
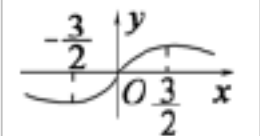
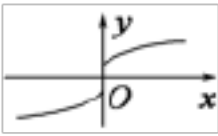
线的左支交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF_2$  的周长为 24, 则当  $ab^2$  取得最大值时, 该双曲线的焦点到渐近线的距离为 ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 2                      D.  $2\sqrt{2}$

19. 若直线  $l$  与曲线  $y=\sqrt{x}$  和  $x^2+y^2=\frac{1}{5}$  都相切, 则  $l$  的方程为 ( )

- A.  $y=2x+1$                       B.  $y=2x+\frac{1}{2}$                       C.  $y=\frac{1}{2}x+1$                       D.  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

20. 函数  $f(x)=\frac{3x}{2e^{|x|}}$  的大致图象是 ( )

- A.       B.       C.       D. 

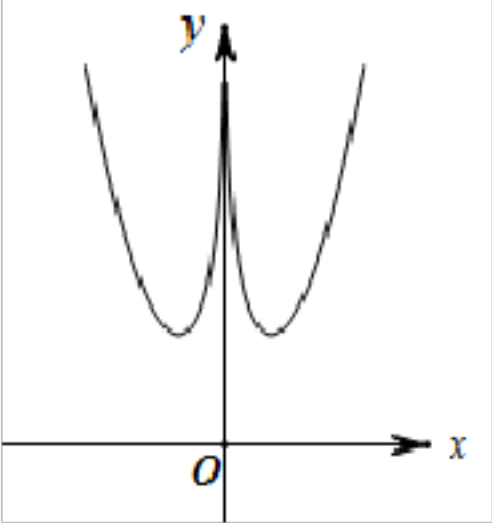
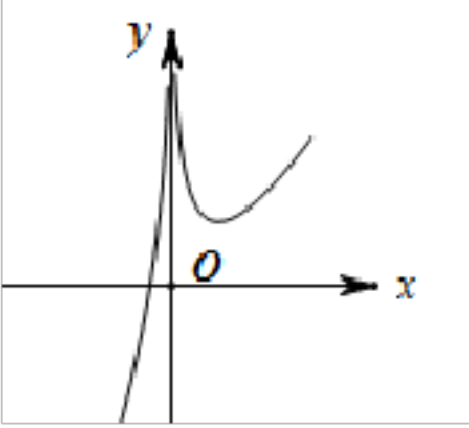
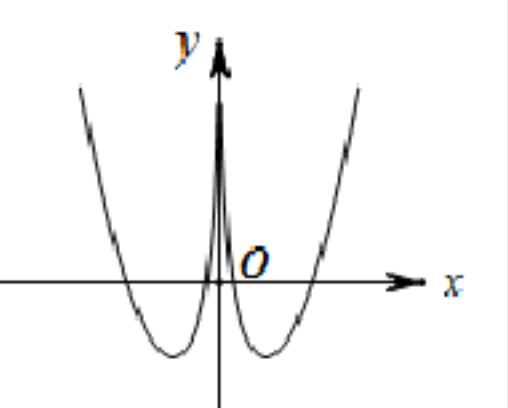
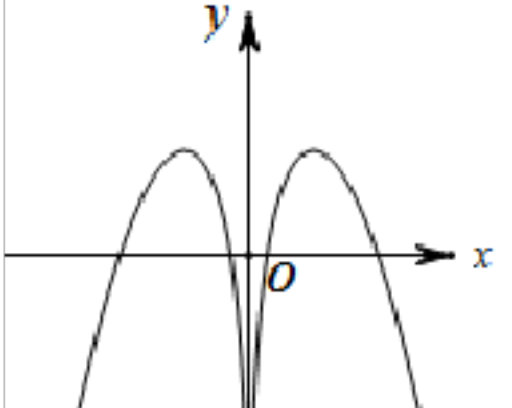
21. 已知  $a, b$  为正实数, 直线  $y=x-a$  与曲线  $y=\ln(x+b)$  相切, 则  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$  的最小值是

- A. 2                      B.  $4\sqrt{2}$                       C. 4                      D.  $2\sqrt{2}$

22. 若曲线  $y=\ln(x+a)$  的一条切线为  $y=ex-b$  ( $e$  为自然对数的底数), 其中  $a, b$  为正实数, 则  $\frac{1}{ea}+\frac{1}{b}$  的取值范围是

- A.  $[2, e)$                       B.  $(e, 4]$                       C.  $[2, +\infty)$                       D.  $[e, +\infty)$

23. 函数  $f(x)=2x^2-\ln|x|$  的部分图像大致为 ( )

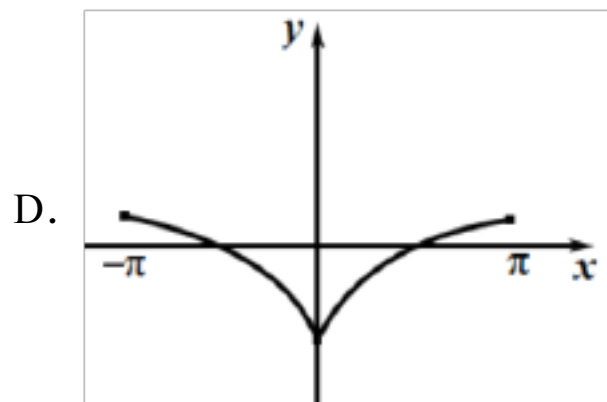
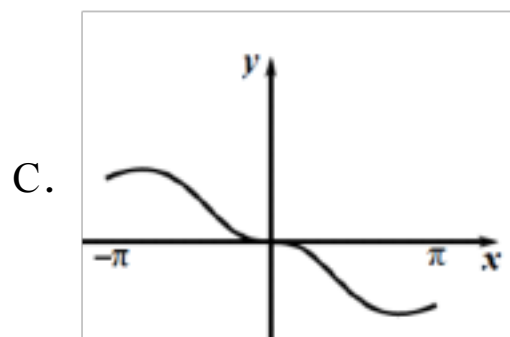
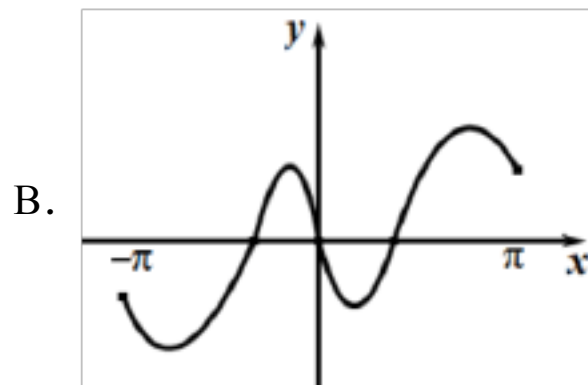
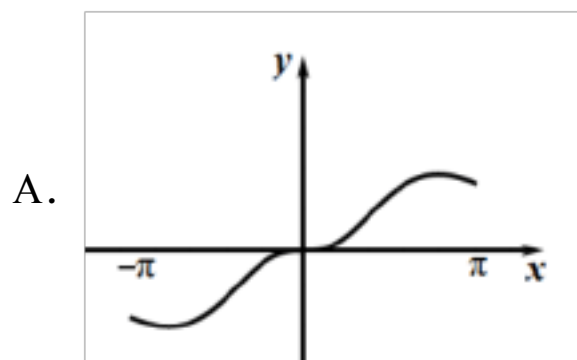
- A.       B.       C.       D. 

24. 函数  $f(x)=ax-2$  与  $g(x)=e^x$  的图象上存在关于直线  $y=x$  对称的点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

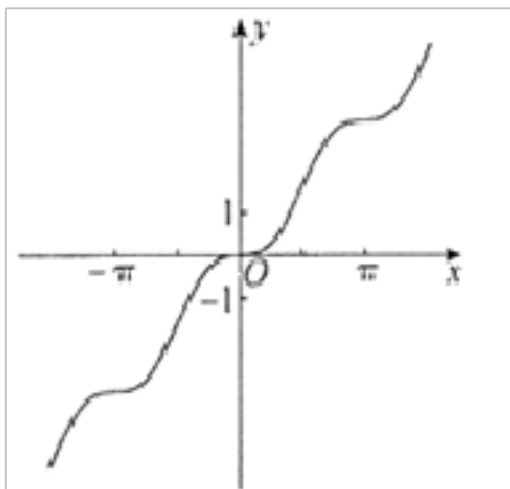
- A.  $\left(-\infty, \frac{e}{4}\right]$                       B.  $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$                       C.  $(-\infty, e]$                       D.  $(-\infty, e^2]$

25. 已知  $(x+1)^3(x+2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ , 则  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 7a_7 =$
- A. 1764                      B. 1806                      C. 1836                      D. 1872

26. 函数  $f(x) = \frac{x - \sin x}{e^x + e^{-x}}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的图象大致为 ( )



27. 已知函数  $y = f(x)$  的部分图象如图, 则  $f(x)$  的解析式可能是 ( )



- A.  $f(x) = x + \tan x$                       B.  $f(x) = x + \sin 2x$
- C.  $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$                       D.  $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$

28. 已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$ , 对于函数  $f(x)$  有下述四个结论:  $\square$  函数  $f(x)$  在其定义域上为增函数;  $\square$  对于任意的  $a > 0, a \neq 1$ , 都有  $f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$  成立;  $\square$   $f(x)$  有且仅有两个零点;  $\square$  若  $f(x_0) = 0$ , 则  $y = \ln x$  在点  $(x_0, \ln x_0)$  处的切线与  $y = e^x$  在点  $\left(-\ln x_0, \frac{1}{x_0}\right)$  处的切线为同一直线. 其中所有正确的结论有

- A.  $\square\square\square$                       B.  $\square\square$                       C.  $\square\square\square$                       D.  $\square\square$

29. 已知  $a, b$  为正实数, 直线  $y = x - a + 2$  与曲线  $y = e^{x+b} - 1$  相切, 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为 ( )

- A. 1                                      B. 2
- C. 4                                      D. 8

30. 已知函数  $f(x)=\frac{1-2\ln x}{x^2}$  的定义域为  $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ ，若对任意的  $x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$ ， $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|>\frac{m(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}$  恒成立，则实数  $m$  的取值范围为（        ）

- A.  $(-\infty,3]$
- B.  $(-\infty,4]$
- C.  $(-\infty,5]$
- D.  $(-\infty,6]$

参考答案：

1. B

【分析】根据已知条件，求出切线斜率  $\tan \alpha = 3$ ，再根据同角三角函数的基本关系可求出  $\sin \alpha$ ， $\cos \alpha$ ，从而根据二倍角公式求得结果.

【详解】根据已知条件， $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ ，因为曲线  $y = \ln x - \frac{2}{x}$  在  $x = 1$  处的切线的倾斜角为  $\alpha$ ，

所以  $\tan \alpha = f'(1) = 1 + 2 = 3$ ，

所以  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . 因为  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ， $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$ ，

则解得  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，

故  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{4}{5}$ .

故选：B.

2. D

【分析】求出函数的导数，利用导数确定函数的单调性，即可求出函数的极大值点.

【详解】 $\because f'(x) = \sin x \cdot \sin x + (1 - \cos x) \cos x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = (-\cos x + 1)(2\cos x + 1)$ ，

□ 当  $x \in \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  单调递减，

当  $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  单调递增，

当  $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  单调递减，

□ 函数  $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  的极大值点为  $\frac{2\pi}{3}$ .

故选：D

3. B

【分析】先由题设得到： $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n - 1}$ ，从而得到  $a_{n+1} = 2a_n$ ，即可说明数列

$\{a_n\}$  是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列，再利用等比数列前  $n$  项和求和公式得到结果.

【详解】解：由题知  $f'(x) = 2x - 1$

$\because x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n - 1}$

$$\therefore \frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1} = \frac{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}-2}{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}+1} = \left( \frac{x_n-2}{x_n+1} \right)^2$$

两边取对数得：  $\ln \frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1} = 2 \ln \frac{x_n-2}{x_n+1}$

令  $a_n = \ln \frac{x_n-2}{x_n+1}$  即  $a_{n+1} = 2a_n$ ，所以数列  $\{a_n\}$  是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列，

$$\therefore S_{2021} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = 1 - 2^{2021}$$

故选：B

4. C

【分析】作出函数  $f(x)$  的图象，由题意可得在  $y=|x-k|$  的图象的上方，分别讨论  $k < 0$ 、 $k = 0$ 、 $k > 0$ ，结合图象的平移，以及导数的几何意义即可求解.

【详解】作出函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$  的图象，

由不等式  $f(x) \leq |x-k|$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立，

可得  $y = f(x)$  的图象不在  $y = |x-k|$  的图象的上方，

且  $y = |x-k|$  的图象关于直线  $x = k$  对称，

当  $k < 0$  时，由图象可知不满足题意；

当  $k = 0$  时， $f(x) \leq |x-k|$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立，满足题意；

当  $k > 0$  时，当  $y = |x-k|$  的图象与  $y = f(x)$  的图象相切，即有  $y = x-k$  为切线，

由  $f(x) = \ln x$  可得  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ，

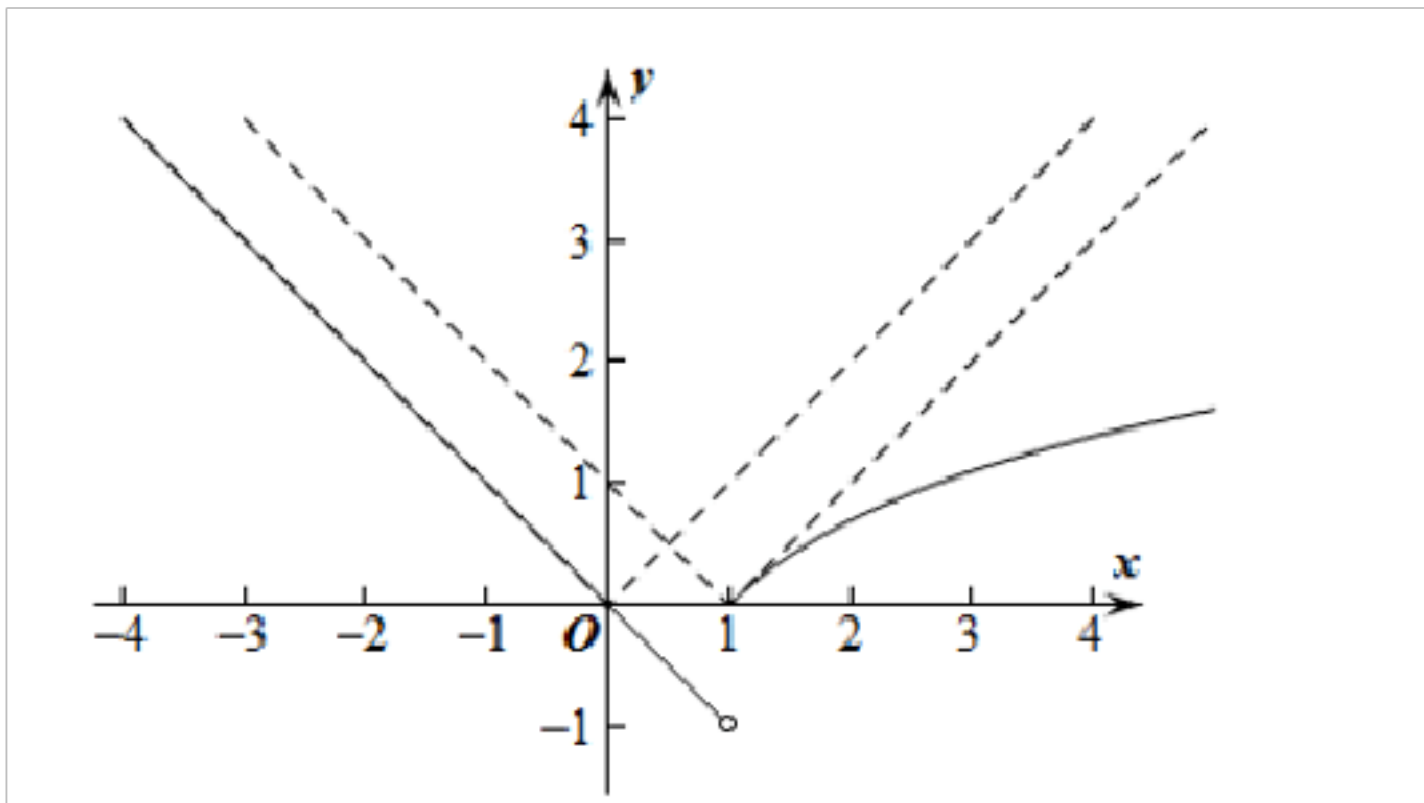
设切点为  $(m, n)$ ，可得切线的斜率为  $f'(m) = \frac{1}{m} = 1$ ，则  $m = 1$ ，

所以  $n = \ln m = 0$ ，所以  $0 = 1 - k$ ，解得：  $k = 1$ ，

则  $0 < k \leq 1$  时，满足题意.

综上可得，实数  $k$  的取值范围是  $[0, 1]$ .

故选：C.



5. C

【分析】设切点为  $(m, n)$ ，求出曲线对应函数的导数，可得切线的斜率，代入切点坐标，解方程可得  $n=0$ ，进而得到  $2a+b=1$ ，再由乘 1 法和基本不等式，即可得到所求最小值.

【详解】设切点为  $(m, n)$ ,

$y=\ln(x+b)$  的导数为  $y'=\frac{1}{x+b}$ ,

由题意可得  $\frac{1}{m+b}=1$ ,

又  $n=m-2a$ ,  $n=\ln(m+b)$ ,

解得  $n=0$ ,  $m=2a$ ,

即有  $2a+b=1$ , 因为  $a, b$  为正实数,

所以  $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})(2a+b)=2+2+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geq 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$ ,

当且仅当  $2a=b=\frac{1}{2}$  时取等号,

故  $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$  的最小值为 8.

故选: C.

6. B

【分析】构造新函数  $g(x)=f(x)\ln x$ , 利用导数确定  $g(x)$  的单调性, 从而可得  $x>0$  时  $f(x)$  的正负, 利用奇函数性质得出  $x<0$  时  $f(x)$  的正负, 然后分类讨论解不等式.

【详解】设  $g(x)=f(x)\ln x$ , 则  $g'(x)=f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}>0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递增,

又  $g(1)=0$ , 所以  $x>1$  时,  $g(x)=f(x)\ln x>g(1)=0$ , 此时  $\ln x>0$ , 所以  $f(x)>0$ ,

$0<x<1$  时,  $g(x)=f(x)\ln x<g(1)=0$ , 此时,  $\ln x<0$ , 所以  $f(x)>0$ ,

所以  $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$  时,  $f(x) > 0$ ,

因为  $f(x)$  是奇函数, 所以  $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$  时,  $f(x) < 0$ ,

由  $(x^2-1)f(x) < 0$  得  $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x^2-1 < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ , 所以  $x < -1$  或  $0 < x < 1$ .

故选: B.

【点睛】关键点点睛: 本题考查用导数解不等式, 关键是构造新函数  $g(x) = f(x)\ln x$ , 利用导数确定单调性后, 得出  $f(x) > 0$  的解.

7. D

【分析】构造函数  $g(x) = f(x) - 1$ , 由导数结合奇偶性得出  $g(x)$  在  $R$  上单调递增, 进而得出  $m + 2n = 9$ , 最后由基本不等式得出答案.

【详解】函数  $f(x)$  定义域为  $R$ , 令  $g(x) = f(x) - 1 = x + \frac{2}{1+e^x} - 1$

$$h(x) = \frac{2}{1+e^x} - 1 = \frac{1-e^x}{1+e^x}, \quad h(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = -h(x)$$

易知  $y = x$  和  $h(x) = \frac{2}{1+e^x} - 1$  均奇函数, 所以  $g(x)$  为奇函数

$$g'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递增}$$

$$\text{由 } f(m-9) + f(2n) = 2 \text{ 得 } f(m-9) - 1 + f(2n) - 1 = 0$$

$$\text{即 } g(m-9) = -g(2n) = g(-2n), \text{ 所以 } m-9+2n=0, \text{ 即 } m+2n=9$$

$$\text{则 } \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{9}(m+2n) \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{9} \left( 2+2+\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \right) \geq \frac{1}{9}(4+4) = \frac{8}{9}$$

当且仅当  $m=3, n=\frac{3}{2}$  时, 取等号

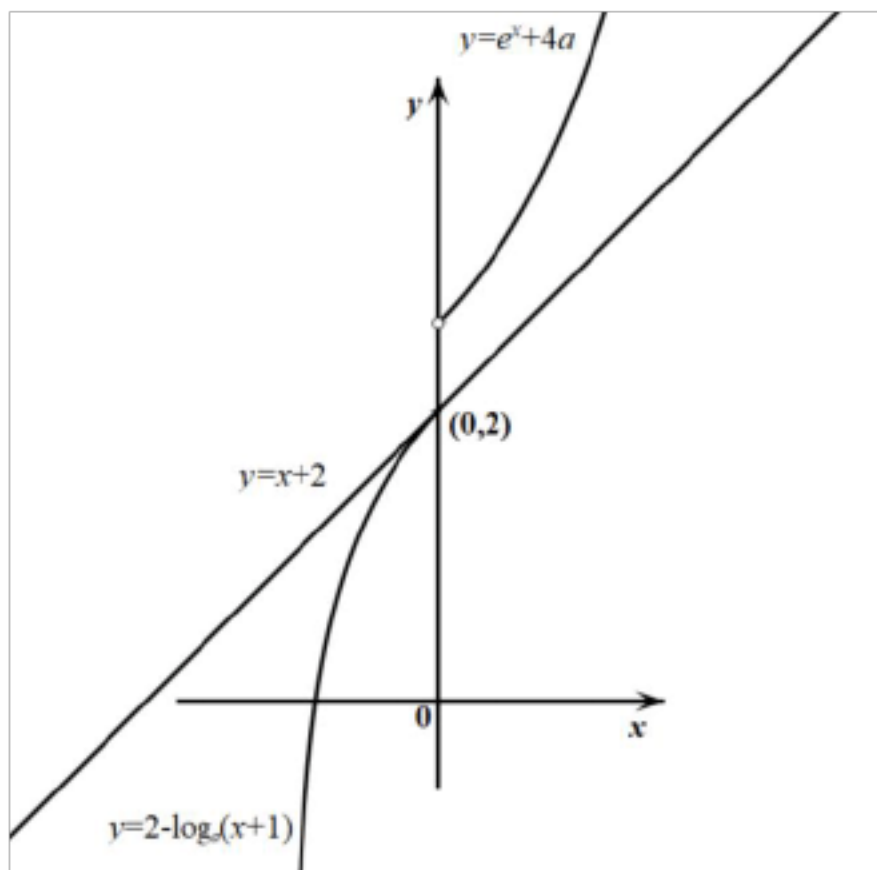
故选: D

【点睛】关键点睛: 本题考查点较为综合, 解决时关键在于利用导数得出  $m+2n=9$ , 进而由基本不等式得出最值.

8. C

【分析】由  $f(x)$  递增, 先求出  $a$  的范围, 再根据  $f(x) = x+2$  恰有一个实数根, 通过数形结合进一步缩小范围.

【详解】



$f(x)$ 在定义域上单调增， $\square \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 4a + 1 \geq 2 \end{cases}$ ， $\square \frac{1}{4} \leq a < 1$ ，

$\square y = e^x + 4a$ 在 $x = 0$ 处切线为 $y - (4a + 1) = x$ ，即 $y = x + 4a + 1$ ，

又 $4a + 1 \geq 2$ 故 $y = x + 2$ 与 $y = e^x + 4a (x > 0)$ 没有公共点

$\square y = x + 2$ 与 $y = 2 - \log_a(x + 1)$ 有且仅有一个公共点且为 $(0, 2)$

$\square y = 2 - \log_a(x + 1)$ 在 $x = 0$ 处的切线的斜率必须大于等于1，

$$y' = -\frac{1}{(x+1)\ln a}, \quad k = -\frac{1}{\ln a} \geq 1, \quad \square \ln a \geq -1, \quad \square a \geq \frac{1}{e},$$

综上： $\frac{1}{e} \leq a < 1$

故选：C.

【点睛】本题需要通过求导，数形结合，利用切线斜率的不等关系解决问题.

9. B

【分析】通过研究函数奇偶性以及单调性，以及由 $f(1) = e - e^{-1} > 0$ 排除不正确的选项，从而得出答案..

【详解】详解： $\because x \neq 0, f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2} = -f(x) \therefore f(x)$ 为奇函数，排除 A,

$\because f(1) = e - e^{-1} > 0$ ，故排除 D.

$$\because f'(x) = \frac{(e_x + e^{-x})x^2 - (e_x - e^{-x})2x}{x^4} = \frac{(x-2)e_x + (x+2)e^{-x}}{x^3},$$

当  $x > 2$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  单调递增, 所以排除 C;

故选: B.

10. B

【分析】(1) 由已知条件可求出该传感器在水中逆流行进 10 km 所用的时间  $t = \frac{10}{v-3} (v > 3)$ , 则所消耗的能量  $E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} (v > 3)$ , 法一: 将原式变形得到  $E = 10k \cdot [(v-3) + 6 + \frac{9}{v-3}]$ , 利用基本不等式的方法求出最小值; 法二: 对原式求导, 分析函数的单调性, 可求出最值.

【详解】由题意, 该传感器在水中逆流行进 10 km 所用的时间  $t = \frac{10}{v-3} (v > 3)$ , 则所消耗的能量

$$E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} (v > 3).$$

方法一:

$$E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} = 10k \cdot \frac{v^2}{v-3} = 10k \cdot \frac{[(v-3)+3]^2}{v-3} = 10k \cdot \frac{[(v-3)^2 + 2 \cdot (v-3) \cdot 3 + 3^2]}{v-3} = 10k \cdot [(v-3) + 6 + \frac{9}{v-3}] \geq$$

$$10k \cdot [2\sqrt{(v-3) \cdot \frac{9}{v-3}} + 6] = 10k \cdot 12 = 120k, \text{ 当且仅当 } v-3 = \frac{9}{v-3}, \text{ 即 } v=6 \text{ 时等号成立, 此时}$$

$$E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} \text{ 取得最小值 } 120k.$$

方法二:

$$E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} = 10k \cdot \frac{v^2}{v-3} (v > 3), \text{ 求导得 } E' = 10k \cdot \frac{v^2 - 6v}{(v-3)^2}, \text{ 令 } E' = 10k \cdot \frac{v^2 - 6v}{(v-3)^2} = 0, \text{ 得 } v=6, \text{ 当}$$

$$3 < v < 6 \text{ 时, } E' < 0, E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} \text{ 单调递减; 当 } v > 6 \text{ 时, } E' > 0, E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} \text{ 单调递增, 所}$$

$$\text{以当 } v=6 \text{ 时, } E = kv^2 \cdot \frac{10}{v-3} \text{ 取得最小值, 为 } k \times 6^2 \times \frac{10}{6-3} = 120k.$$

故选: B.

【点睛】本题考查函数模型的应用.

关键点点睛: 函数模型的关键是建立变量之间的关系, 从而建立正确的解析式, 进而寻找求最值的方法.

11. A

【解析】根据直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切, 求出  $a = -2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 利用充分条件与必要条件的定义即可判断出结论.

【详解】设函数  $f(x) = \sin x$  和直线  $l: y = x + a$  的切点坐标为  $x_0, y_0$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} f'(x_0) = \cos x_0 = 1 \\ \sin x_0 = x_0 + a \end{cases}, \text{ 可得 } a = -2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976035221000010034>