高考数学复习专题 基本不等式

全国名校高考数学复优质学案、专题汇编（附详解）

高考数学复专题：基本不等式

一、基本不等式

1.基本不等式：对于任意非负实数 \$a\$ 和 \$b\$，有 \$a+b

，等号成立当且仅当 \$a=b\$。

2.算术平均数与几何平均数：设 \$a>0\$，\$b>0\$，则 \$a\$ 和 \$b\$ 的算术平均数不小于它们的几何平均数。

3.利用基本不等式求最值问题：

1）如果积 \$xy\$ 是定值 \$P\$，那么当且仅当 \$x=y\$ 时，\$x+y\$ 有最小值 。

2）如果和 $x+y$ 是定值 P，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值 $□rac{P}{4}$。

4.常用结论：

1） （a，b 为任意实数）。

2） （a，b 为同号实数）。

3） （a，b 为任意实数）。

4）

□rac{3}{2}$（$a$，$b$，$c$ 为正实数）。

5）$2(a+b) （$a$，$b$ 为任意实数）。

6） （a，b 为任意实数）。

7）（$a>0$，$b>0$）。

二、基本不等式在实际中的应用

1.问题的背景是人们关心的社会热点问题，如物价、销售、税收等。题目往往较长，解题时需认真阅读，从中提炼出有用信息，建立数学模型，转化为数学问题求解。

2.经常建立的函数模型有正（反）比例函数、一次函数、二次函数、分段函数以及 $y=ax+b$（$a>0$，$b>0$）等。解答函数应用题中的最值问题时一般利用二次函数的性质，基本不等式，函数的单调性或导数求解。

考点突破一：利用基本不等式求最值

利用基本不等式求最值的常用技巧：

1）若直接满足基本不等式条件，则直接应用基本不等式。

2）若不直接满足基本不等式条件，则需要创造条件对式子进行恒等变形，如构造“1”的代换等。常见的变形手段有拆、并、配。

① 拆——裂项拆项：对分子的次数不低于分母次数的分式进行整式分离，分离成整式与“真分式”的和，再根据分式中分母的情况对整式进行拆项，为应用基本不等式凑定积创造条件。

分组并项的目的是将问题分组后，通过应用基本不等式来得出每组的最值，或者先在一组中应用基本不等式，再在组与组之间应用基本不等式得出最值。

配式配系数的方法常常用于挖掘出“积”或“和”为定值的情况。通过合理的配式和配系数，可以得到一个可以应用基本不等式得出定值的式子，或者使得积式中的各项之和为定值。

如果一次应用基本不等式不能达到要求，需要多次应用基本不等式。但是要注意等号成立的条件必须一致。如果等号不成立，则可以利用函数单调性求解。

在应用基本不等式求最值时，要注意不等式成立的三个条件：一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得。如果忽略了某个条件，就会出现错误。

解题技巧包括：根据实际问题抽象出函数的解析式，再利用基本不等式求得函数的最值；设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数；解应用题时，一定要注意变量的实际意义及其取值范围；在应用基本不等式求函数最值时，若等号取不到，可利用函数的单调性求解。

在国家创新驱动战略下，北斗系统作为一项国家高科技工程，是一个开放型的创新平台。全国有 1400 多个北斗基站和上万台设备组成星地“一张网”，定位精度全部达到亚米级，部分地区达到分米级，最高精度甚至可以达到厘米或毫米级。最近，北斗三号工程耗资元建成一大型设备。已知这台设备维修和消耗费用第一年为元，以后每年增加元（设备单价是常数）。设设备使用的年数为，设备年平均维修和消耗费用为。求关于的函数关系式，以及当时，求这种设备的最佳更新年限。

解答：

设设备单价为，设设备的总价为，设设备的年平均维修和消耗费用为，设设备使用的年数为，则有：

设备总价为。设备年平均维修和消耗费用为。

因此，有函数关系式：

当时，设备年平均维修和消耗费用为：

当且仅当时，设备年平均维修和消耗费用最小，因此这种设备的最佳更新年限为 15 年。

2.要制作一个体积为 9m，高为 1m 的有盖长方体，已知该的底面造价是每平方米 10 元，侧面造价是每平方米 5 元，盖的总造价为 100 元。求该长为多少时，的总造价最低为多少元？

解答：

设长方体的长、宽、高分别为、和，则有：

体积为。

侧面积为。

底面积为。

总造价为。

因此，有函数关系式：

当时，总造价最低，因此长方体的长为 3m，的总造价最低为 235 元。

3.下列不等式一定成立的是

A．XXX(x2+)＞lgx(x＞0)

B．sinx+cosx＞1(x∈R)

C．x+1≥2|x|(x∈R)

D．x2+1＞2(x≠kπ,k∈Z)

解答：

对于 A：x2+＞x，因此不成立；

对于 B：-√2≤sinx+cosx≤√2，因此不成立；

对于 C：当 x≥0 时，x+1≥2x；当 x<0 时，x+1≥-2x，因此成立；

对于 D：x2+1≥1＞2(x≠kπ,k∈Z)，因此成立。

因此，选 C。

1.对于不等式 2(sin x)≤sin x+2，该不等式不正确，应该是 2(sin x)≥sin x+2，因为当 sin x∈(0,1]时，2(sin x)≥2>1>sin x+2；当 sin x∈[-1,0)时，2(sin x)≤-2≤sin x+2.因此，选项 B 不正确。

2.对于不等式 x-2|x|+1=(|x|-1)≥0(x∈R)，该不等式是正确的。

3.对于不等式 224xy/(2x+1)≥m，如果该不等式恒成立，则 m 的最大值为 3.设正实数 x,y 满足 x>1，y>1，且不等式(y-1)/(2x-1)∈(0,1]，则选项 D 不正确。

4.已知函数 y=loga(x-m-2n)+2 恒过定点(3,2)，其中 a>0 且 a≠1，m,n 均为正数，则 a^(m+1)/(n^2)的最小值是 11/4.

5.当函数 y=x/(4x+1)(x>0)取得最小值时，x 的值为 1/8.已知 a,b∈R，且 ab≠0，则结论 a+b≥2 不一定成立，结论|a|+|b|≥2 恒成立。

6.对于正实数 x,y,z，有 xy+yz/(x^2+y^2+z^2)≤√2，且等号成立当且仅当 x:y:z=1:1:√2.若 a+b=1，则 ab 的最小值为 1/4，a+b 的最大值为 1，a^2+b^2 的最小值为 1/2.

在第 7 题中，删除了选项和题目中的一些符号错误，改写为“若关于 x 的方程 9x+(4+a)×3x+4=0 有解，则实数 a 的取值范围是？”

在第 9 题中，删除了符号错误，改写为“已知 x>1，y>1，且 log2x，log2y 成等比数列，则 xy 的最小值为？”

在第 11 题中，删除了选项和题目中的一些符号错误，改写为“已知正实数 a，b，c 满足 a+b+c=1，那么 a2+b2+c2 的最小值为？”

在第 13 题中，删除了符号错误，改写为“已知函数 f(x)=2x/(x2+1)，取得最小值时，f(x)的值为多少？”

在第 15 题中，删除了符号错误，改写为“当 x>0 时，函数 f(x)=2x/(x2+1)的最大值为多少？”

在第 16 题中，删除了符号错误，改写为“已知函数 g(x)=x2-6x+13，取得最小值时，g(x)的值为多少？”

在第 18 题中，删除了符号错误，改写为“已知 a,b,c 均为正实数，且满足 a+b+c=3，那么 abc 的最小值为多少？”

在第 20 题中，删除了一些语言上的错误，改写为：“某物流公司引进了一套无人智能配货系统，购买系统的费用为 80 万元，维持系统正常运行的费用包括保养费和维修费两部分。每年的保养费用为 1 万元。该系统的维修费为：第一年 1.2万元，第二年 1.6万元，第三年 2 万元，……，依等差数列逐年递增。(1)求该系统使用 n 年的总费用(包括购买设备的费用)；”。

21.已知函数 $f(x)=□rac{x^2+1}{x}$，求该系统使用多少年报废最合算（即该系统使用多少年平均费用最少）。

22.

1） x,y 是正实数，且 $2x+y=4$，求 的最大值。

2) 若实数 a,b 满足 $ab-4a-b+1=0(a>1)$，求 $(a+1)(b+2)$ 的最小值。又，求当 $f(x)=□rac{1}{x^2-2x+5}$ 时，函数的最小值；当 $x=2$ 时，函数有最大值 -3，求实数 a 的值。

23.已知在 $□riangle ABC$中， ， ， ，分别为角 A,B,C 所对的边长，且 ，$BC=2$，

。

1）求角 A 的值；

2）若 ，求 的值。

变式拓展：

1.若直线 $xy=1(a>0,b>0)$ 过点 $(1,2),$ 则 $2a+b$ 的最小值为 。

，且 \$a-3b+6=0\$，则

\$2+□rac{1}{8b}\$的最小值为 。

3.设 \$a,b>0\$，\$a+b=5\$，则 \$a+1+b+3\$ 的最大值为

。

4.已知 \$a>0,b>0,ab=8\$，则当 取得最大值时，\$a\$ 的值为 。

5.某公司一年购买某种货物 \$600\$吨，每次购买 \$x\$ 吨，运费为 \$6\$万元/次，一年的总存储费用为 \$4x\$ 万元。要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 \$x\$ 的值是

。

6.在 \$□riangle ABC\$中，角 \$A,B,C\$ 所对的边分别为 \$a,b,c\$， ， 的平分线交 \$AC\$ 于点 \$D\$，且 \$BD=1\$，则 \$4a+c\$ 的最小值为

。

答：文章中存在格式错误和明显有问题的段落，已删除。改写后的文章如下：

一、的造价