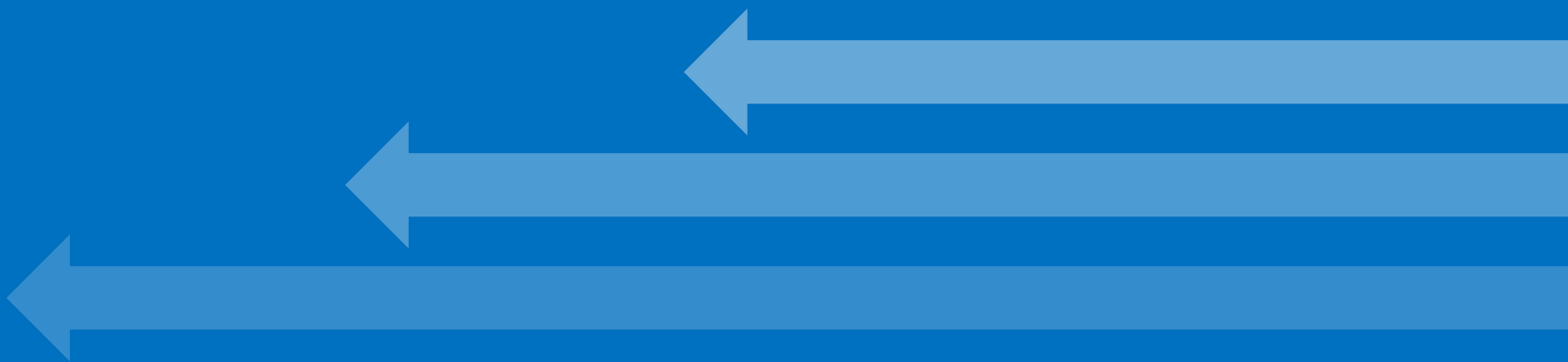


senior high school education

第1课时 指数函数的概念及其图象



【最新课标】

(1)通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念

·
(2)能用描点法或借助计算工具画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

内容索引

01. 新知初探 · 自主学习

02. 课堂探究 · 素养提升

题型1 指数函数的概念

题型2 指数型函数的定义域和值域

题型3 指数函数的图象及应用

03. 课时作业(二十四)

01. 新知初探 · 自主学习

01. 新知初探 · 自主学习

教材要点

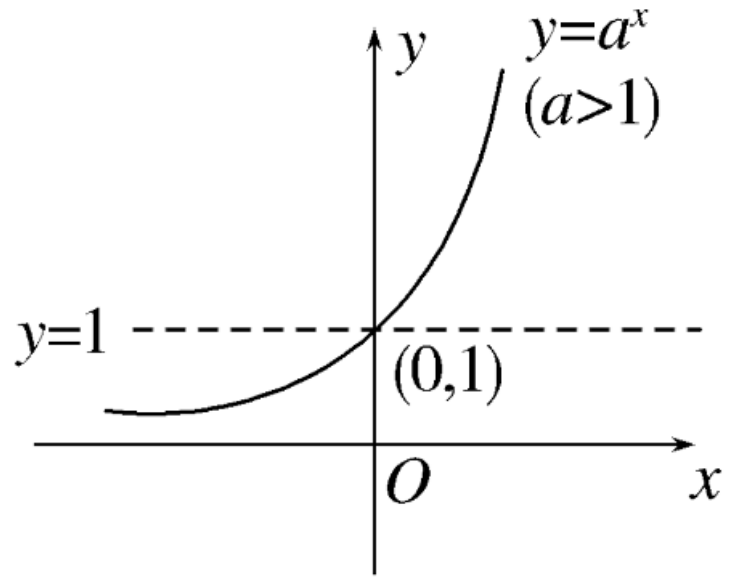
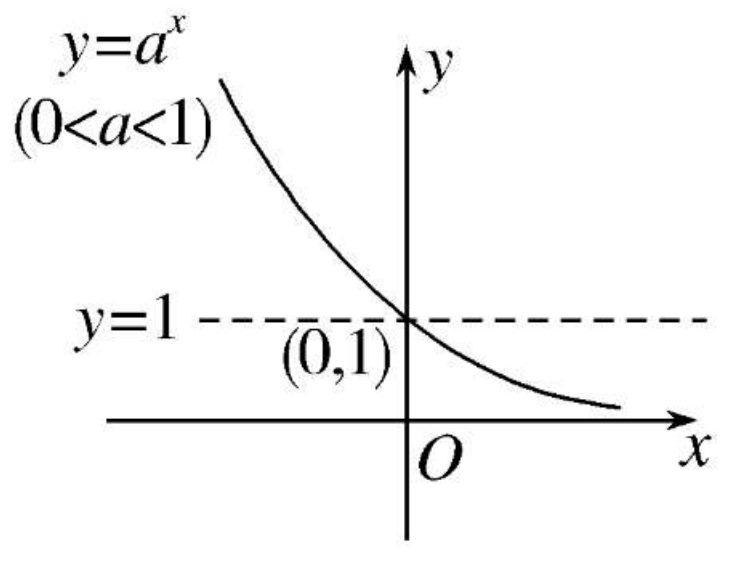
要点一 指数函数的定义

$y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)是一个定义在实数集上的函数, 称为指数函数, 其中 x 是自变量. 定义域为 \mathbf{R} .

状元随笔 指数函数解析式的3个特征

- (1)底数 a 为大于0且不等于1的常数.
- (2)自变量 x 的位置在指数上, 且 x 的系数是1.
- (3) a^x 的系数是1.

要点二 指数函数的图象与性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象	 <p>The graph shows the exponential function $y = a^x$ for $a > 1$. The curve is increasing and passes through the point $(0, 1)$. A horizontal dashed line is drawn at $y = 1$. The x and y axes are labeled, and the origin is marked O.</p>	 <p>The graph shows the exponential function $y = a^x$ for $0 < a < 1$. The curve is decreasing and passes through the point $(0, 1)$. A horizontal dashed line is drawn at $y = 1$. The x and y axes are labeled, and the origin is marked O.</p>

性质	定义域	<u>\mathbf{R}</u>	
	值域	<u>$(0, +\infty)$</u>	
	过定点	过点 <u>$(0, 1)$</u> , 即 $x = $ <u>0</u> 时, $y = $ <u>1</u>	
	函数值的变化	当 $x > 0$ 时, <u>$y > 1$</u> ; 当 $x < 0$ 时, <u>$0 < y < 1$</u>	当 $x > 0$ 时, <u>$0 < y < 1$</u> ; 当 $x < 0$ 时, <u>$y > 1$</u>
	单调性	是 \mathbf{R} 上的 <u>增函数</u>	是 \mathbf{R} 上的 <u>减函数</u>

状元随笔 底数 a 与1的大小关系决定了指数函数图象的“升”与“降”。当 $a>1$ 时，指数函数的图象是“上升”的；当 $0<a<1$ 时，指数函数的图象是“下降”的。

教材答疑

规定底数 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ 的理由

(1) 如果 $a = 0$ ，则 $\begin{cases} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } a^x \text{ 恒为 } 0; \\ \text{当 } x < 0 \text{ 时, } a^x \text{ 无意义.} \end{cases}$

(2) 如果 $a < 0$ ，比如 $y = (-2)^x$ ，这时对于 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 在实数范围内函数值不存在。

(3) 如果 $a = 1$ ，那么 $y = 1^x = 1$ 是常量，对此就没有研究的必要。

基础自测

1.判断正误. (正确的画“√”, 错误的画“×”)

(1)函数 $y = -2^x$ 是指数函数. (×)

(2)函数 $y = 2^{x+1}$ 是指数函数. (×)

(3)函数 $y = a^x$ 是指数函数. (×)

(4)因为 $a^0 = 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 所以 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)的图象恒过点(0, 1). (√)

2. 下列各函数中, 是指数函数的是()

A. $y = (-3)^x$ B. $y = -3^x$ C. $y = 3^{x-1}$ D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

答案: D

解析: 根据指数函数的定义 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 可知只有D项正确.

3. 指数函数 $y=f(x)$ 的图象过点(2, 4), 则 $f(3)=(\quad)$

A. 4 B. 8 C. 16 D. 1

答案: B

解析: 设指数函数的解析式为 $f(x)=a^x(a>0, \text{且} a\neq 1)$. 由题意知, $a^2=4$, 解得 $a=2(a>0)$, 所以 $f(x)=2^x$, 所以 $f(3)=2^3=8$.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2^x-1}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

解析：要使函数有意义，则 $2^x-1>0$,

$\therefore 2^x>1$, $\therefore x>0$, \therefore 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

02. 课堂探究 · 素养提升

02. 课堂探究 · 素养提升

题型1 指数函数的概念——自主完成

1. 若函数 $f(x) = (a^2 - 3a + 3) \cdot a^x$ 是指数函数, 则()

A. $a = 1$ 或 $a = 2$

B. $a = 1$

C. $a = 2$

D. $a > 0$, 且 $a \neq 1$

答案: C

解析: 由指数函数的定义知 $\begin{cases} a^2 - 3a + 3 = 1, \\ a > 0, \text{ 且 } a \neq 1. \end{cases}$ 解得 $a = 2$.

2. 若函数 $f(x) = (2a - 1)^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是
()

A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$

C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(-\infty, 1)$

答案: C

解析: 由已知得 $0 < 2a - 1 < 1$, 则 $\frac{1}{2} < a < 1$, 所以实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

3. 指数函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(-2, \frac{1}{4})$, 那么 $f(4) \cdot f(2) =$

64.

解析: 设 $y = f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 所以 $a^{-2} = \frac{1}{4}$, 所以 $a = 2$, 所以 $f(4) \cdot f(2) = 2^4 \times 2^2 = 64$.

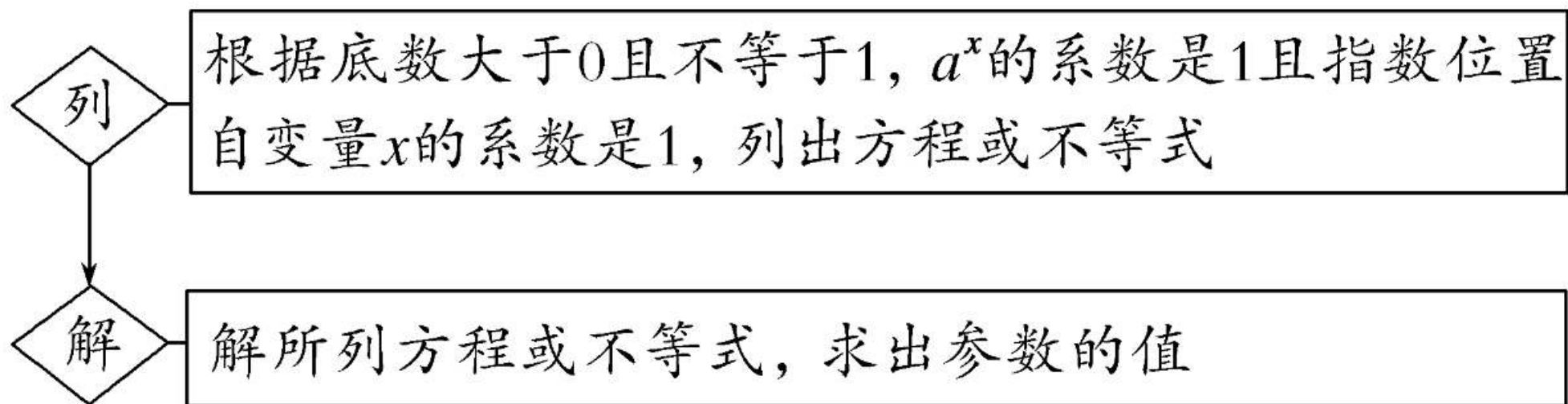
方法归纳

(1)判断一个函数是指数函数的方法

①看形式：只需判定其解析式是否符合 $y=a^x(a>0, \text{且} a\neq 1)$ 这一结构特征.

②明特征：指数函数的解析式具有三个特征，只要有一个特征不具备，则不是指数函数.

(2) 已知某函数是指数函数求参数值的基本步骤



题型2 指数型函数的定义域和值域——师生共研

例1 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y = \sqrt{1 - 3^x}$;

解析：要使函数式有意义，则 $1 - 3^x \geq 0$ ，即 $3^x \leq 1 = 3^0$ ，因为函数 $y = 3^x$ 在 \mathbf{R} 上是增函数，所以 $x \leq 0$ ，故函数 $y = \sqrt{1 - 3^x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

因为 $x \leq 0$ ，所以 $0 < 3^x \leq 1$ ，所以 $0 \leq 1 - 3^x < 1$ ，

所以 $\sqrt{1 - 3^x} \in [0, 1)$ ，即函数 $y = \sqrt{1 - 3^x}$ 的值域为 $[0, 1)$.

$$(2)y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x - 3};$$

解析： 定义域为 \mathbf{R} .

$$\text{因为 } x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \geq -4,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x - 3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16.$$

$$\text{又因为 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x - 3} > 0,$$

所以函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x - 3}$ 的值域为 $(0, 16]$.

$$(3)y=4^x+2^{x+1}+2.$$

解析：因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，函数 $y=4^x+2^{x+1}+2$ 都有意义，所以函数 $y=4^x+2^{x+1}+2$ 的定义域为 \mathbf{R} .因为 $2^x > 0$ ，所以 $4^x+2^{x+1}+2=(2^x)^2+2 \times 2^x+2=(2^x+1)^2+1 > 1+1=2$.

即函数 $y=4^x+2^{x+1}+2$ 的值域为 $(2, +\infty)$.

变式1 (变条件, 变设问)若将本例(1)的函数换为“ $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1}$ ”,

求其定义域.

解析: 由 $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \geq 0$ 得 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\therefore x \leq 0$, 即函数的定义域为 $(-\infty, 0]$.

变式2 (变条件, 变设问)若将本例(3)的函数增加条件“ $0 \leq x \leq 2$ ”, 再求函数的值域.

解析: $\because 0 \leq x \leq 2, \therefore 1 \leq 2^x \leq 4, \therefore y = 4^x + 2^{x+1} + 2 = (2^x)^2 + 2 \times 2^x + 2 = (2^x + 1)^2 + 1$.

令 $2^x = t$, 则 $t \in [1, 4]$, 且 $f(t) = (t + 1)^2 + 1$, 易知 $f(t)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

$\therefore f(1) \leq f(t) \leq f(4)$, 即 $5 \leq f(t) \leq 26$,

即函数 $y = 4^x + 2^{x+1} + 2$ 的值域为 $[5, 26]$.

方法归纳

与指数函数有关的复合函数的定义域、值域的求法($a>0$, 且 $a\neq 1$):

(1)函数 $y=a^{f(x)}$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同;

(2)求函数 $y=a^{f(x)}$ 的值域, 需先确定 $f(x)$ 的值域, 再根据指数函数 $y=a^x$ 的单调性确定函数 $y=a^{f(x)}$ 的值域;

(3)求函数 $y=f(a^x)$ 的定义域，需先确定 $y=f(u)$ 的定义域，即 u 的取值范围，亦即 $u=a^x$ 的值域，由此构造关于 x 的不等式(组)，确定 x 的取值范围，得 $y=f(a^x)$ 的定义域；

(4)求函数 $y=f(a^x)$ 的值域，需先利用函数 $u=a^x$ 的单调性确定其值域，即 u 的取值范围，再确定函数 $y=f(u)$ 的值域，即为 $y=f(a^x)$ 的值域.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/976111130015010221>