

# 利用勾股定理理解三角形

## ◆ 思维方法

**正向思维：**是一类常规性的、传统的思维形式，指的是大家按照自上而下，由近及远、从左到右、从可知到未知等一般而言的线性方向做出探究问题的思维途径。

**逆向思维：**是指在剖析、破解数学难题进程中，可以灵活转换思维方向，从常规思维的相反方向出发进行探索的思维方式，比如正向思维无法解决问题时可反其道而行采取逆向思维，直接证明有困难时可采用间接证明。

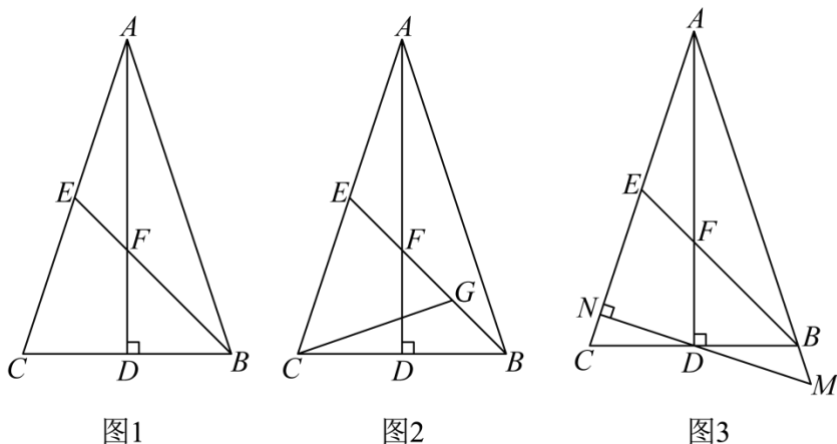
## ◆ 知识点总结

### 一、勾股定理

在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方。如果直角三角形的两条直角边长分别是  $a$ ,  $b$ ，斜边长为  $c$ ，那么  $a^2 + b^2 = c^2$ 。

## ◆ 典例分析

**【典例 1】** 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$  于点  $D$ ， $\angle CBE = 45^\circ$ ， $BE$  分别交  $AC$ 、 $AD$  于  $E$ 、 $F$ 。



- (1) 如图 1， $AB = 12$ ， $BC = 8$ ，求  $AF$  的长度；
- (2) 如图 2，取  $BF$  中点  $G$ ，若  $BF^2 + EF^2 = CG^2$ ，求证： $AF = BC$ ；
- (3) 如图 3，在 (2) 的条件下，过点  $D$  作  $DN \perp AC$  于点  $N$ ，并延长  $ND$  交  $AB$  延长线于点  $M$ ，请直接写出  $\frac{BM}{DM}$  的值。

### 【思路点拨】

(1) 先根据等腰三角形三线合一的性质得  $BD = 4$ ，由勾股定理计算可得  $AD$  的长，由等腰直角三角形性质得  $DF = 4$ ，最后由线段的差可得结论；

(2) 连接  $CF$ ，由题意可知  $AD$  是  $BC$  的垂直平分线，可知  $CF = BF$ ， $\angle FCB = \angle FBC = 45^\circ$ ，可得  $CF \perp EG$ ，由勾股定理可得  $CF^2 + FG^2 = CG^2$ ，结合  $BF^2 + EF^2 = CG^2$ ，可得  $EF = FG$ ，由  $G$  是  $BF$  的中点，可知  $EF = FG = BG$ ，可得  $CF$  是  $EG$  的垂直平分线，易知  $CE = CG$ ，得  $\angle CEG = \angle CGE$ ，则  $\angle AEF = \angle CGB$ ，由  $\angle FDB = 90^\circ$ ， $\angle FBD = 45^\circ$ ，可知  $\angle AFE = \angle DFB = 45^\circ$ ，继而可得  $\angle AFE = \angle CBG$ ，利用 ASA 即可证明  $\triangle AEF \cong \triangle CGB$ ，即可证得结论；

(3) 过点  $B$  作  $BQ \perp MN$  于  $Q$ ，过点  $D$  作  $DH \perp AB$  于  $H$ ，连接  $DG$ ，连接  $CF$ ，利用等腰三角形的性质可得  $\triangle NCD \cong \triangle QBD$  (AAS)，易知  $CN = BQ$ ， $DN = DQ = DH$ ，由  $S_{\triangle DBM} = \frac{1}{2}BM \cdot DH = \frac{1}{2}DM \cdot BQ$ ，得  $\frac{BM}{DM} = \frac{CN}{DN}$ ，结合 (2) 中结论，可设  $EF = FG = BG = a$ ，由勾股定理可得  $AF = BC = 2\sqrt{2}a$ ， $CD = BD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}a$ ， $AE = CG = CE = \sqrt{5}a$ ， $AC = 2\sqrt{5}a$ ， $AD = 3\sqrt{2}a$ ，由  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot NQ = \frac{1}{2}BC \cdot AD$  可得  $NQ = \frac{6\sqrt{5}}{5}a$ ，进而求得  $DN$ ， $CN$  的长即可求解。

### 【解题过程】

(1) 解： $\because AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 4, \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\text{由勾股定理得：} AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2},$$

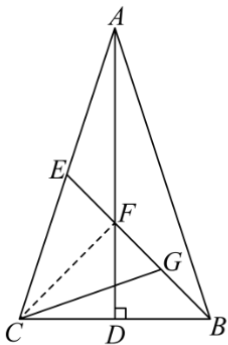
$$\because \angle CBE = 45^\circ, \angle BDF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BDF$  是等腰直角三角形，

$$\therefore DF = BD = 4,$$

$$\therefore AF = AD - DF = 8\sqrt{2} - 4;$$

(2) 证明：连接  $CF$ ，



$$\because AD \perp BC, AB = AC,$$

$\therefore CD = BD$ , 则  $AD$  是  $BC$  的垂直平分线,

$$\therefore CF = BF,$$
$$\therefore \angle FCB = \angle FBC = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle CFB = 180^\circ - \angle FCB - \angle FBC = 90^\circ, \text{ 即 } CF \perp EG,$$
$$\angle CFE = 180^\circ - \angle CFB = 90^\circ,$$

Rt  $\triangle CFG$ 中,  $CF^2 + FG^2 = CG^2$ ,

$$\therefore BF^2 + EF^2 = CG^2, \quad CF = BF,$$

$\therefore EF^2 = FG^2$ , 则  $EF = FG$ ,

$\because G$ 是 $BF$ 的中点,

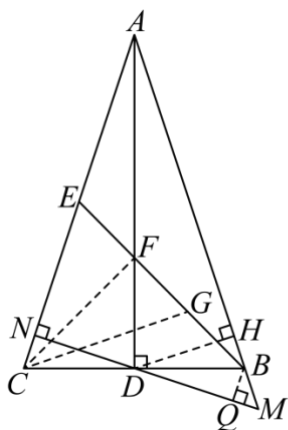
$\therefore FG = BG$ , 则  $EF = FG = BG$ ,

$$\therefore \angle FDB = 90^\circ, \angle FBD = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle DFB = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle AFE = \angle DFB = 45^\circ, \text{ 即: } \angle AFE = \angle CBG,$$
$$\therefore CF \perp EG, \quad EF = FG,$$

$\therefore CF$ 是 $EG$ 的垂直平分线,

$$\therefore CE = CG,$$
$$\therefore \angle CEG = \angle CGE,$$
$$\therefore \angle AEF = \angle CGB,$$
$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CGB (\text{ASA})$$
$$\therefore AF = BC;$$

(3) 过点 $B$ 作 $BQ \perp MN$ 于 $Q$ ，过点 $D$ 作 $DH \perp AB$ 于 $H$ ，连接 $DG$ ，连接 $CF$ ，



$$\because AD \perp BC, AB = AC,$$

$$\therefore CD = BD, \angle CAD = \angle BAD,$$

$$\therefore DN = DH,$$

$$\because BQ \perp MN, DN \perp AC, \text{ 则 } \angle DNC = \angle DQB = 90^\circ,$$

$$\therefore BQ \parallel AC, \text{ 则 } \angle NCD = \angle QBD,$$

$$\therefore \triangle NCD \cong \triangle QBD (\text{AAS}),$$

$$\therefore CN = BQ, DN = DQ = DH,$$

$$\because S_{\triangle DBM} = \frac{1}{2} BM \cdot DH = \frac{1}{2} DM \cdot BQ,$$

$$\therefore BM \cdot DN = DM \cdot CN,$$

$$\therefore \frac{BM}{DM} = \frac{CN}{DN},$$

$$\text{由 (2) 可知: } EF = FG = BG, CE = CG, \triangle AEF \cong \triangle CGB,$$

$$\text{则 } AF = BC, AE = CG = CE$$

$$\text{设 } EF = FG = BG = a, \text{ 则 } BF = CF = 2a,$$

$$\therefore AF = BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = 2\sqrt{2}a, \text{ 则 } CD = BD = \frac{1}{2} BC = \sqrt{2}a,$$

$$AE = CG = CE = \sqrt{CF^2 + FG^2} = \sqrt{5}a, \text{ 则 } AC = AE + CE = 2\sqrt{5}a,$$

$$\text{则 } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3\sqrt{2}a,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot NQ = \frac{1}{2} BC \cdot AD, \text{ 即: } 2\sqrt{5}a \cdot NQ = 2\sqrt{2}a \cdot 3\sqrt{2}a$$

$$\therefore NQ = \frac{6\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\text{又 } \because DN = DQ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2} NQ = \frac{3\sqrt{5}}{5}a, \text{ 则 } CN = \sqrt{CD^2 - DN^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\therefore \frac{BM}{DM} = \frac{CN}{DN} = \frac{1}{3}.$$

◆ 学霸必刷

1. (2023 上·江西赣州·九年级统考阶段练习) 已知, 在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ , 点  $D$  为边  $BC$  上一个动点, 以  $AD$  为边作其右侧作等边  $\triangle ADE$ .

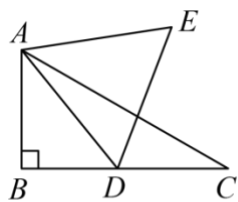


图1

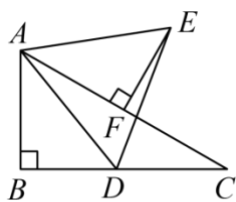


图2

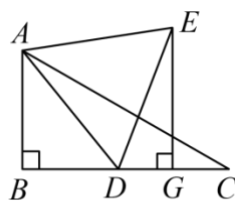


图3

(1) 如图 1, 线段  $AB$  与线段  $AC$  之间的数量关系为\_\_\_\_\_;

(2) 如图 2, 过点  $E$  作  $EF \perp AC$  于点  $F$ . 求证: 点  $F$  是  $AC$  的中点;

(3) 若  $AB = 2$ .

①如图 3, 当点  $D$  是  $BC$  的中点时, 过点  $E$  作  $EG \perp BC$  于点  $G$ . 求  $EG$  的长;

②当点  $D$  从点  $B$  运动到点  $C$ , 则点  $E$  所经过的路径长\_\_\_\_\_ (直接写出结果).

【思路点拨】

(1) 由  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$  即可求解;

(2) 证  $\triangle ABD \cong \triangle AFE$  (AAS), 即可证明;

(3) ①作  $DN \perp AC$ ,  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$ ,  $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{7}$ ,  $AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = \frac{5}{2}$ , 证  $\triangle ADN \cong \triangle EDG$  (AAS), 进而可求; ②  $FH$  为  $E$  所经过的路径, 当  $D$  在  $B$  点时, 点  $E$  恰落在  $AC$  的中点  $F$  处, 当  $D$  在  $C$  点时,  $EH = AC$ , 进而可求.

【解题过程】

(1) 解:  $\because \angle B = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AC.$$

故答案为:  $AB = \frac{1}{2}AC$ .

(2)  $\because \triangle ADE$  是等边三角形,

$$\therefore AD = AE, \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\because \angle B = 90^\circ, \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle FAE,$$

$$\because EF \perp AC,$$

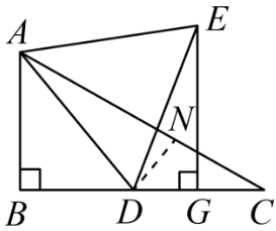
$$\therefore \angle ABD = \angle AFE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = AF = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore$  点  $F$  是  $AC$  的中点.

(3) 作  $DN \perp AC$ ,



$$\because AB = \frac{1}{2}AC, AB = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3},$$

$\because D$  是  $BC$  的中点,

$$\therefore BD = CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{7},$$

$$\because DN \perp AC, \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle CDN = 60^\circ,$$

$$\therefore AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = \frac{5}{2},$$

$$\because \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADN = \angle EDG,$$

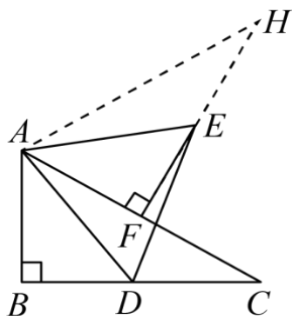
$$\because AD = DE,$$

$$\therefore \triangle ADN \cong \triangle EDG (\text{AAS}),$$

$$\therefore EG = AN = \frac{5}{2}.$$

如图,  $FH$  为  $E$  所经过的路径,

当  $D$  在  $B$  点时, 点  $E$  恰落在  $AC$  的中点  $F$  处, 当  $D$  在  $C$  点时,  $AH = AC$ ,



$$\therefore FH = \sqrt{AH^2 - AF^2} = 2\sqrt{3}.$$

2. (2023 上·重庆南岸·八年级重庆市珊瑚初级中学校校考期中) 如图, 分别以  $\triangle ABC$  的两边  $AB$ 、 $AC$  为腰向外作等腰直角  $\triangle ABD$  和等腰直角  $\triangle ACE$ , 其中  $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$ ,  $BC = 5$ .

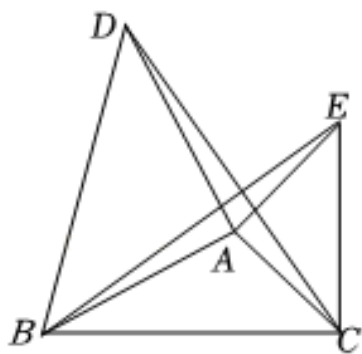


图1

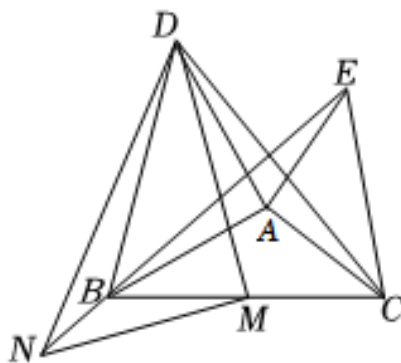


图2

(1) 如图 1, 连接  $BE$ 、 $CD$ . 若  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ , 求  $CD$  的长;

(2) 如图 2,  $M$  为  $BC$  的中点, 连接  $DM$ , 过点  $M$  作  $DM \perp MN$ , 交  $EB$  的延长线于点  $N$ , 连接  $DN$ , 试猜想  $BE$ 、 $BN$ 、 $DN$  之间有何等量关系并证明你的结论.

### 【思路点拨】

(1) 先根据  $SAS$  证明  $\triangle ACD \cong \triangle AEB$ , 可得  $CD = BE$ , 再说明  $\triangle BCE$  是直角三角形, 然后根据勾股定理求出  $CE$ , 进而求出答案即可;

(2) 延长  $NM$  至  $K$ , 使  $MN = MK$ , 连接  $CK$ ,  $DK$ , 设  $NE$  交  $AD$  于点  $O$ , 与  $CD$  的交点为  $J$ . 先根据 “ $SAS$ ” 证明  $\triangle BMN \cong \triangle CMK$ , 可得  $BN = CK$ ,  $\angle MNB = \angle CKM$ , 进而判定  $CK \parallel NE$ , 可说明  $CD \perp CK$ , 再根据勾股定理得  $DK^2 = DC^2 + CK^2$ , 然后根据垂直平分线的性质得  $DK = DN$ , 即可得出答案.

### 【解题过程】

(1)  $\because$  等腰直角  $\triangle ABD$  和等腰直角  $\triangle ACE$ ,

$$\therefore AB = AD, AC = AE, \angle EAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle DAE = \angle EAC + \angle DAE,$$

即  $\angle EAB = \angle CAD$ ,

在  $\triangle EAB$  和  $\triangle CAD$  中,  $\begin{cases} AB = AD \\ \angle EAB = \angle CAD, \\ AE = AC \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$ ,

$\therefore CD = BE$ .

$\because \angle ACB = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ECA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ,

在  $\text{Rt} \triangle ACE$  中,  $AC = AE = 2$ ,

$\therefore CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = 2\sqrt{2}$ .

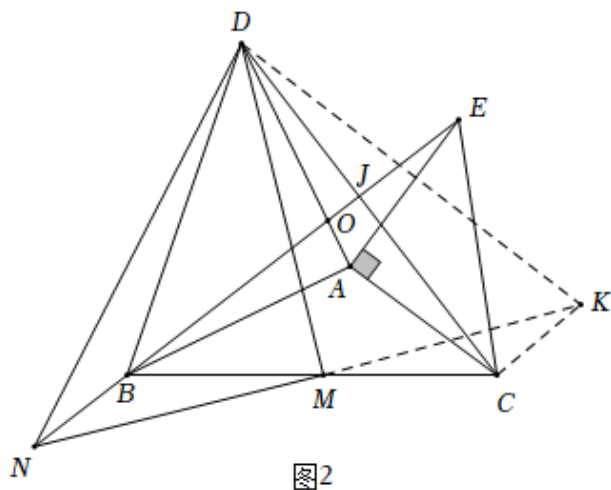
$\because BC = 5$ ,

$\therefore BE = \sqrt{CE^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{33}$ ,

$\therefore CD = BE = \sqrt{33}$ ;

(2) 结论:  $DN^2 = BE^2 + BN^2$ .

理由: 如图 2 中, 延长  $NM$  至  $K$ , 使  $MN = MK$ , 连接  $CK, DK$ , 设  $NE$  交  $AD$  于点  $O$ , 与  $CD$  的交点为  $J$ .



$\because \triangle ACD \cong \triangle AEB$ ,

$\therefore \angle EBA = \angle CDA, BE = CD$ .

$\because \angle AOB = \angle DOJ$ ,

$\therefore \angle OAB = \angle DJO = 90^\circ$ ,

$\therefore BE \perp CD$ .

$\because MB = MC, \angle BMN = \angle CMK, MN = MK$ ,

$\therefore \triangle BMN \cong \triangle CMK$ ,

$$\therefore BN = CK, \angle MNB = \angle CKM,$$

$$\therefore CK \parallel NE.$$

$$\because CD \perp EN,$$

$$\therefore CD \perp CK,$$

$$\therefore \angle DCK = 90^\circ,$$

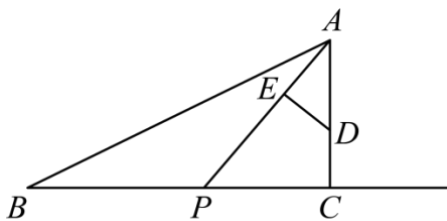
$$\therefore DK^2 = DC^2 + CK^2.$$

$$\because MN = MK, DM \perp NK,$$

$$\therefore DK = DN,$$

$$\therefore DN^2 = BE^2 + BN^2.$$

3. (2023 上·四川成都·八年级校考期中) 如图, 已知在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 16$ ,  $D$  是  $AC$  上的一点,  $CD = 3$ , 点  $P$  从  $B$  点出发沿射线  $BC$  方向以每秒 2 个单位的速度向右运动, 设点  $P$  的运动时间为  $t$ , 连接  $AP$ .



(1) 当  $t = 3$  秒时, 求  $\triangle BPA$  的面积;

(2) 若  $AP$  平分  $\angle CAB$ , 求  $t$  的值;

(3) 过点  $D$  作  $DE \perp AP$  于点  $E$ . 在点  $P$  的运动过程中, 当  $t$  为何值时, 能使  $DE = CD$ ?

#### 【思路点拨】

(1) 根据动点的运动速度和时间先求出  $BP$ , 再利用三角形的面积计算公式解答即可求解;

(2) 作  $PM \perp AB$  于  $M$ , 利用角平分线的性质分别求得  $BM$ 、 $PM$ , 再利用勾股定理  $PB^2 = PM^2 + BM^2$ , 解得  $PC = 4\sqrt{5} - 4$ , 最后利用  $BP = 2t = 16 - (4\sqrt{5} - 4)$ , 求得  $t$  的值即可;

(3) 根据动点运动的不同位置利用勾股定理解答即可求解;

本题考查了全等三角形的判定和性质、勾股定理, 三角形的面积, 根据题意, 正确作出辅助线是解题的关键.

#### 【解题过程】

(1) 解: 由题意可得,  $BP = 2t$ ,

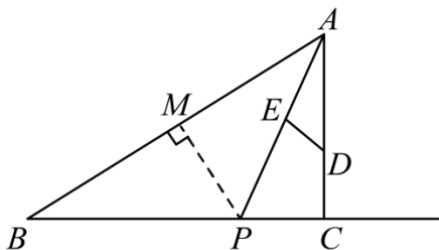
$$\because t = 3, AC = 8,$$

$$\therefore BP = 2 \times 3 = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle BPA} = \frac{1}{2} BP \cdot AC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$\therefore$ 当 $t = 3$ 秒时，求 $\triangle BPA$ 的面积为24；

(2) 解：当线段 $AP$ 恰好平分 $\angle CAB$ 时，作 $PM \perp AB$ 于 $M$ ，如图，



$\therefore$ 线段 $AP$ 平分 $\angle CAB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $PM \perp AB$ ，

$\therefore \angle PAC = \angle PAM$ ， $\angle ACP = \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$ ，

又 $\therefore AP = AP$ ，

$\therefore \triangle ACP \cong \triangle AMP$ (AAS)，

$\therefore PC = PM$ ， $AC = AM = 8$ ，

$\therefore AB = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$ ，

$\therefore BM = AB - AM = 8\sqrt{5} - 8$ ，

在 $\text{Rt} \triangle BPM$ 中， $PB^2 = PM^2 + BM^2$ ，

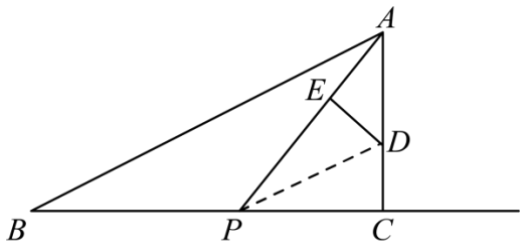
$\therefore (16 - PC)^2 = PC^2 + (8\sqrt{5} - 8)^2$ ，

解得 $PC = 4\sqrt{5} - 4$ ，

$\therefore BP = 2t = 16 - (4\sqrt{5} - 4)$ ，

解得 $t = 10 - 2\sqrt{5}$ ；

(3) 解：①点 $P$ 在线段 $BC$ 上时，过点 $D$ 作 $DE \perp AP$ 于 $E$ ，连接 $PD$ ，如图，



则 $\angle AED = \angle PED = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PED = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore PD$ 平分 $\angle APC$ ，

$$\therefore \angle EPD = \angle CPD,$$

$$\text{又} \because PD = PD,$$

$$\therefore \triangle PDE \cong \triangle PDC (\text{AAS}),$$

$$\therefore ED = CD = 3, \quad PE = PC = 16 - 2t,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 8 - 3 = 5,$$

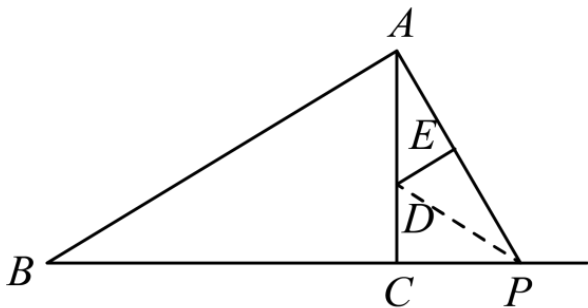
$$\therefore AE = 4,$$

$$\therefore AP = AE + PE = 4 + 16 - 2t = 20 - 2t,$$

$$\text{在Rt} \triangle APC \text{中, 由勾股定理得: } 8^2 + (16 - 2t)^2 = (20 - 2t)^2,$$

$$\text{解得 } t = 5;$$

②点P在线段BC的延长线上时, 过点D作 $DE \perp AP$ 于E, 如图,



$$\text{同①得 } \triangle PDE \cong \triangle PDC (\text{AAS}),$$

$$\therefore ED = CD = 3, \quad PE = PC = 2t - 16,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore AE = 4,$$

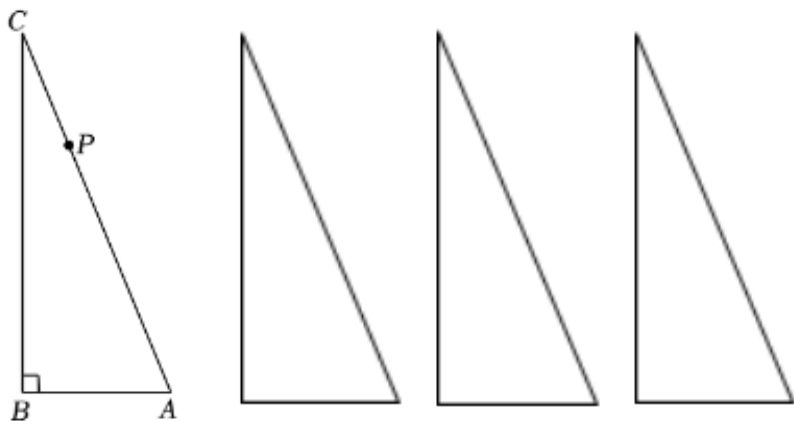
$$\therefore AP = AE + PE = 4 + 2t - 16 = 2t - 12,$$

$$\text{在Rt} \triangle APC \text{中, 由勾股定理得: } 8^2 + (2t - 16)^2 = (2t - 12)^2,$$

$$\text{解得 } t = 11;$$

综上所述, 在点P的运动过程中, 当t的值为5或11时, 能使 $DE = CD$ .

4. (2024上·河南南阳·八年级校考阶段练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AC = 13$ ,  $BA = 5$ , 点P从点C出发, 以每秒3个单位长度的速度沿折线 $C - A - B$ 运动. 设点P的运动时间为 $t (t > 0)$ 秒.



- (1) 求斜边  $AC$  上的高线长；
- (2) ① 当  $P$  在  $AB$  上时， $AP$  的长为\_\_\_\_\_， $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_。（用含  $t$  的代数式表示）；
- ② 若点  $P$  在  $\angle BCA$  的角平分线上，则  $t$  的值为\_\_\_\_\_；
- (3) 在整个运动过程中，当  $\triangle PAB$  是等腰三角形时  $t$  的值为\_\_\_\_\_。

### 【思路点拨】

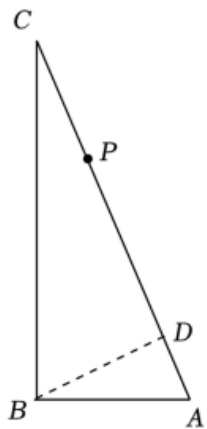
- (1) 过点  $B$  作  $BD \perp AC$  于点  $D$ ，利用面积法求解；
- (2) ① 根据点  $P$  的运动路径及速度可解；② 过点  $P$  作  $PE \perp AC$  于  $E$ ，利用角平分线的性质可知  $PB = PE$ ，再证  $\text{Rt} \triangle BCP \cong \text{Rt} \triangle ECP$  (HL)，推出  $EC = BC = 12$ ，最后利用勾股定理解  $\text{Rt} \triangle AEP$  即可；
- (3) 分  $AB = AP = 5$  和  $AB = BP = 5$  两种情况，利用等腰三角形的性质、勾股定理分别求解即可；

本题主要考查了勾股定理在动点问题中的应用，数形结合、分类讨论并熟练掌握相关性质及定理是解题的关键。

### 【解题过程】

- (1) 在  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = 13$ ， $BA = 5$ ，  
 $\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ，

如图所示，过点  $B$  作  $BD \perp AC$  于点  $D$ ，



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BD, \text{ 即 } BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13},$$

$\therefore$  斜边  $AC$  上的高线长为  $\frac{60}{13}$ ;

(2) ①  $\because$  点  $P$  从点  $C$  出发, 以每秒 3 个单位长度的速度沿折线  $C-A-B$  运动,  $AC = 13$ ,

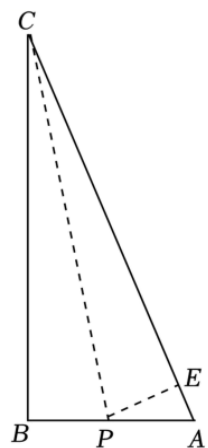
$$\therefore AP = 3t - AC = (3t - 13),$$

$$\therefore \frac{AC}{3} \leq t \leq \frac{AC+AB}{3}, \text{ 即 } \frac{13}{3} \leq t \leq \frac{13+5}{3},$$

$$\therefore \frac{13}{3} \leq t \leq 6,$$

故答案为:  $(3t - 13), \frac{13}{3} \leq t \leq 6$ ;

② 点  $P$  在  $\angle BCA$  的角平分线上时, 过点  $P$  作  $PE \perp AC$  于  $E$ , 如图所示,



$\because CP$  平分  $\angle BCA$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $PE \perp AC$ ,

$$\therefore PB = PE.$$

又  $\because PC = PC$ ,

$$\therefore \text{Rt} \triangle BCP \cong \text{Rt} \triangle ECP (\text{HL}),$$

$\therefore EC = BC = 12$ , 则  $AE = AC - CE = 13 - 12 = 1$ , 由 (2) 知  $AP = 3t - 13$ ,

$$\therefore BP = AB - AP = 5 - (3t - 13) = 18 - 3t,$$

$$\therefore PE = 18 - 3t,$$

在  $\text{Rt} \triangle AEP$  中,  $AP^2 = AE^2 + EP^2$ , 即  $(3t - 13)^2 = 1^2 + (18 - 3t)^2$ ,

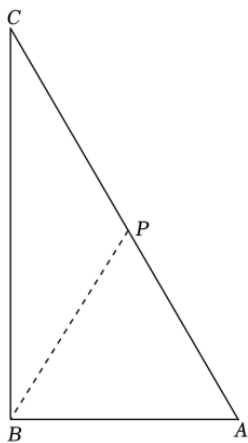
$$\text{解得 } t = \frac{26}{5},$$

$\therefore$  点  $P$  在  $\angle BAC$  的角平分线上时,  $t = \frac{26}{5}$

故答案为:  $\frac{26}{5}$ ;

(3)  $\triangle PAB$ 是以 $AB$ 为一腰的等腰三角形时，有两种情况：

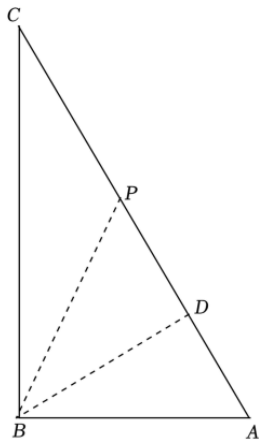
当 $AB = AP = 5$ 时，如图所示，



则 $CP = AC - AP = 13 - 5 = 8$ ,

$$\therefore t = \frac{CP}{3} = \frac{8}{3};$$

当 $AB = BP = 5$ 时，过点 $B$ 作 $BD \perp AC$ 于点 $D$ ，如图所示，



由(2)知 $BD = \frac{60}{13}$ ,  $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \frac{25}{13}$ ,

$\therefore AB = BP$ ,  $BD \perp AC$ ,

$$\therefore AP = 2AD = \frac{50}{13},$$

$$\therefore CP = AC - AP = 13 - \frac{50}{13} = \frac{119}{13},$$

$$\therefore t = \frac{CP}{3} = \frac{119}{39},$$

$\triangle PAB$ 是以 $AB$ 为底的等腰三角形时， $t$ 的值为 $\frac{13}{6}$ ,

综上， $\triangle PAB$ 是等腰三角形时 $t$ 的值为 $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{119}{39}$ 或 $\frac{13}{6}$ .

5. (2023 上·重庆南岸·八年级校考开学考试) 如图, 四边形  $ABCD$  中,  $AC = AD = AB$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ .

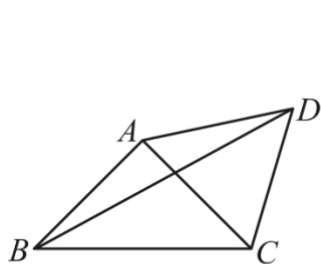


图1

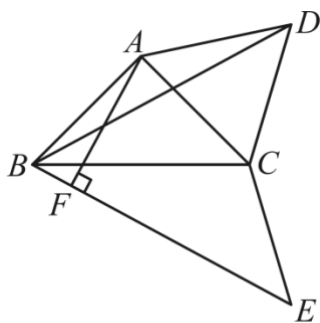


图2

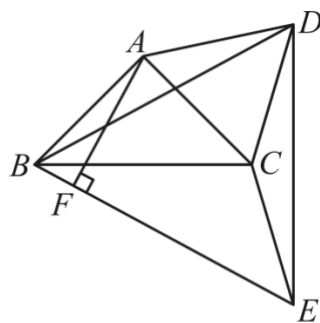


图3

(1) 把  $\triangle BCD$  沿  $BC$  翻折得到  $\triangle BCE$ , 过点  $A$  作  $AF \perp BE$ , 垂足为  $F$ , 求证:  $BE = 2AF$ ;

(2) 在 (2) 的条件下, 连接  $DE$ , 四边形  $ABCD$  的面积为 45,  $AD = 5\sqrt{2}$ ,  $BC = 10$ , 求  $DE$  的长.

### 【思路点拨】

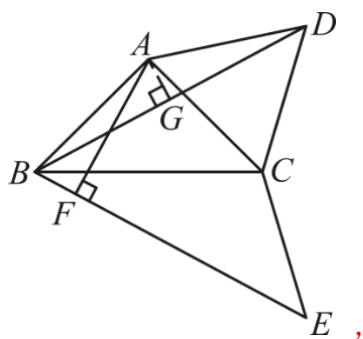
(1) 作  $AG \perp BD$  于  $G$ , 由等腰三角形的性质可得  $\angle ABD = \angle ADB$ ,  $BG = DG = \frac{1}{2}BD$ , 由折叠的性质可得:

$BE = BD$ ,  $CE = CD$ ,  $\angle CBE = \angle CBD$ , 证明  $\triangle ABF \cong \triangle BAG$  得到  $AF = BG$ , 即可得出结论;

(2) 作  $BM \perp AD$  于  $M$ ,  $CN \perp AD$  于  $N$ , 延长  $BC$  交  $DE$  于  $H$ , 则  $CH \perp DE$ ,  $DH = EH$ , 求出  $\triangle ACD$  的面积为 20, 求出  $CN = 4\sqrt{2}$ , 由勾股定理可得  $AN = 3\sqrt{2}$ , 证明  $\triangle ABM \cong \triangle CAN$  (AAS) 得到  $BM = AN = 3\sqrt{2}$ , 求出  $\triangle ABD$  的面积为 15, 得到  $\triangle BCD$  的面积  $= \frac{1}{2}BC \times DH = 30$ , 求出  $DH = 6$ , 即可得出答案.

### 【解题过程】

(1) 证明: 如图, 作  $AG \perp BD$  于  $G$ ,



则  $\angle AGB = 90^\circ$ ,

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ ,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$ ,

$\because AB = AD$ ,  $AG \perp BD$ ,

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ,  $BG = DG = \frac{1}{2}BD$ ,  $\angle AGB = 90^\circ$ ,

由折叠的性质可得:  $BE = BD$ ,  $CE = CD$ ,  $\angle CBE = \angle CBD$ ,

设 $\angle CBE = \angle CBD = x$ ，则 $\angle ABG = 45^\circ - x$ ， $\angle ABF = 45^\circ + x$ ，

$\because AF \perp BE$ ，

$\therefore \angle BFA = \angle AGB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle ABF = 90^\circ - (45^\circ + x) = 45^\circ - x$ ，

$\therefore \angle ABG = \angle BAF$ ，

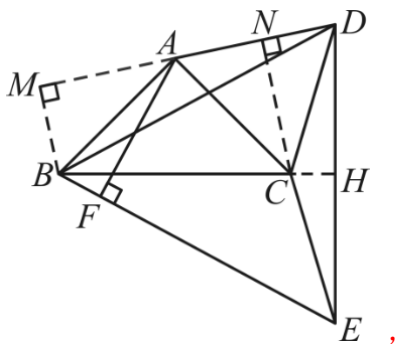
在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle BAG$ 中，
$$\begin{cases} \angle BFA = \angle AGB \\ \angle BAF = \angle ABG, \\ AB = BA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle BAG$ (AAS)，

$\therefore AF = BG$ ，

$\therefore BE = 2AF$ ；

(2) 解：如图，作 $BM \perp AD$ 于 $M$ ， $CN \perp AD$ 于 $N$ ，延长 $BC$ 交 $DE$ 于 $H$ ，



由折叠的性质可得： $CH \perp DE$ ， $CE = CD$ ，

$\because CE = CD$ ， $CH \perp DE$ ，

$\therefore DH = EH$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $AD = AB = AC = 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 25$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 45，

$\therefore \triangle ACD$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times AD \times CN = 45 - 25 = 20$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times CN = 20$ ，

$\therefore CN = 4\sqrt{2}$ ，

$\therefore AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAM + \angle ABM = \angle BAM + \angle CAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle CAN,$$

$$\text{在} \triangle ABM \text{和} \triangle CAN \text{中}, \begin{cases} \angle AMB = \angle CNA = 90^\circ \\ \angle ABM = \angle CAN \\ AB = CA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CAN (\text{AAS}),$$

$$\therefore BM = AN = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle ABD \text{的面积} = \frac{1}{2} AD \times BM = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{的面积} = \frac{1}{2} BC \times DH = 45 - 15 = 30,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 10 \times DH = 30,$$

$$\therefore DH = 6,$$

$$\therefore DE = 2DH = 12.$$

6. (2023 上·山东济南·八年级统考期末) 已知  $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ,  $OA = OB = 10$ ,  $OC = OD = 8$

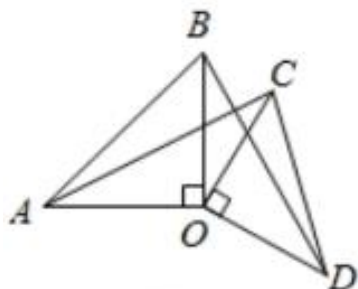


图1

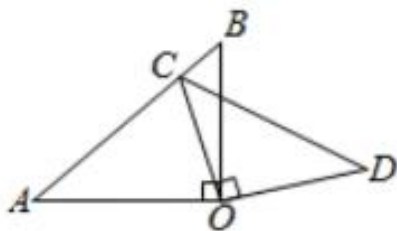
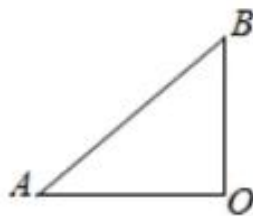


图2



备用图

(1) 如图1, 连接  $AC$ 、 $BD$ , 问  $AC$  与  $BD$  相等吗? 并说明理由.

(2) 若将  $\triangle COD$  绕点  $O$  逆时针旋转, 如图2, 当点  $C$  恰好在  $AB$  边上时, 请写出  $AC$ 、 $BC$ 、 $OC$  之间关系, 并说明理由.

(3) 若  $\triangle COD$  绕点  $O$  旋转, 当  $\angle AOC = 15^\circ$  时, 直线  $CD$  与直线  $AO$  交于点  $F$ , 求  $AF$  的长.

### 【思路点拨】

(1) 根据题意可证得  $\triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS})$ , 据此即可解答;

(2) 连接  $BD$ , 可证得  $\angle AOC = \angle BOD$ , 据此即可证得  $\triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS})$ ,  $AC = BD$ ,  $\angle CAO = \angle DBO$ , 根据勾股定理可得  $CD^2 = 2OC^2$ , 再根据等腰直角三角形的性质可证得  $\angle CBD = 90^\circ$ , 根据勾股定理即可证得结论;

(3) 过点  $O$  作  $OE \perp CD$  于点  $E$ , 利用勾股定理可求得  $CD = 8\sqrt{2}$ , 根据面积公式可求得  $OE = 4\sqrt{2}$ , 再分两

种情况，分别计算即可求得.

**【解题过程】**

(1) 解:  $AC$  与  $BD$  相等;

理由如下:

$$\because \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC,$$

$$\text{即 } \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\text{在 } \triangle AOC \text{ 和 } \triangle BOD \text{ 中, } \begin{cases} OA = OB \\ \angle AOC = \angle BOD \\ OC = OD \end{cases}$$

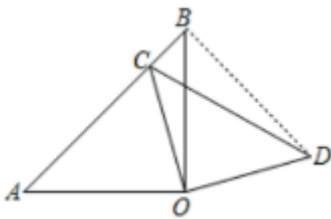
$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BD;$$

(2) 解: 结论:  $BC^2 + AC^2 = 2OC^2$

理由如下:

如图: 连接  $BD$ ,



$$\because \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB - \angle BOC = \angle COD - \angle BOC,$$

$$\text{即 } \angle AOC = \angle BOD$$

$$\text{在 } \triangle AOC \text{ 和 } \triangle BOD \text{ 中, } \begin{cases} OA = OB \\ \angle AOC = \angle BOD \\ OC = OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BD, \angle CAO = \angle DBO,$$

$$\because \angle AOB = \angle COD = 90^\circ, OA = OB, OC = OD,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ABO = 45^\circ, CD^2 = OC^2 + OD^2 = 2OC^2,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle DBO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABO + \angle DBO = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BC^2 + BD^2 = CD^2,$$

$$\therefore BC^2 + AC^2 = 2OC^2;$$

(3) 解：如图：过点  $O$  作  $OE \perp CD$  于点  $E$ ,

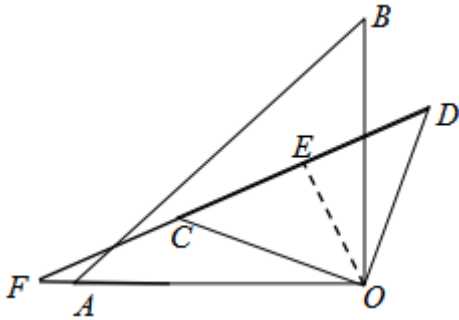
$$\because \angle COD = 90^\circ, OC = OD = 8,$$

$$\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2},$$

$$\because S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OC \cdot OD = \frac{1}{2}CD \cdot OE,$$

$$\therefore OE = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{8 \times 8}{8\sqrt{2}} = 4\sqrt{2},$$

如图：当点  $F$  在  $OA$  的延长线上时，



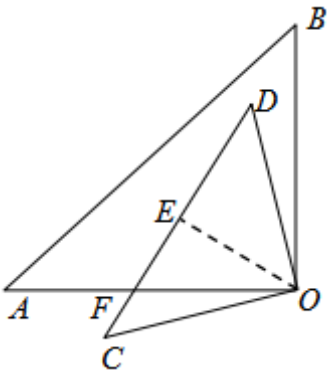
$$\because \angle DCO = 45^\circ, \angle AOC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle DCO - \angle AOC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore OF = 2OE = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore AF = OF - OA = 8\sqrt{2} - 10;$$

如图：当点  $F$  在线段  $OA$  上时，



$$\because \angle DCO = 45^\circ, \angle AOC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DFO = \angle DCO + \angle AOC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FOE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}OF,$$

$$\because OF^2 = EF^2 + OE^2,$$

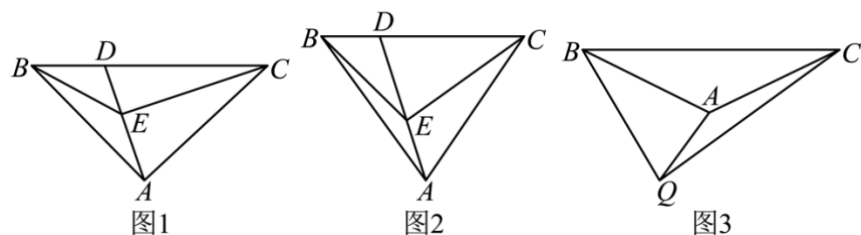
$$\therefore OF^2 = \left(\frac{1}{2}OF\right)^2 + (4\sqrt{2})^2,$$

$$\text{解得 } OF = \frac{8}{3}\sqrt{6},$$

$$\therefore AF = OA - OF = 10 - \frac{8}{3}\sqrt{6},$$

综上,  $AF$  的长为  $8\sqrt{2} - 10$  或  $10 - \frac{8}{3}\sqrt{6}$ .

7. (2023 下·湖北武汉·八年级校考阶段练习) 在等腰  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $D$  为  $BC$  上一点,  $E$  为  $AD$  上一点, 连接  $BE$ ,  $CE$ ,  $\angle BAC = \angle CED = 2\angle BED = 2x$ .



(1) 如图 1, 若  $x = 45^\circ$ , 求证:  $CE = 2AE$

(2) 如图 2, 若  $x = 30^\circ$ ,  $AB = AC = \sqrt{7}$ . 求  $CE$  的长.

(3) 如图 3, 若  $x = 60^\circ$ ,  $AB = AC = 2\sqrt{3}$ , 点  $Q$  为  $\triangle ABC$  外一点, 且  $\angle BQA = 60^\circ$ ,  $AQ = 2$ , 求线段  $QC$  的长.

### 【思路点拨】

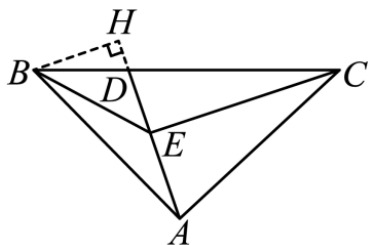
(1) 作  $BH \perp AD$ , 交  $AD$  的延长线于  $H$ , 证明  $\triangle ACE \cong \triangle BAH$  (AAS), 得到  $BH = AE$ ,  $CE = AH$ , 即可得证;

(2) 在  $AD$  上取点  $H$ , 使  $BH = EH$ , 作  $BF \perp AD$  于  $F$ , 同 (1) 法可得,  $\triangle ACE \cong \triangle BAH$  (AAS), 得到  $CE = AH$ ,  $AE = BH$ , 在  $\text{Rt} \triangle ABF$  中, 利用勾股定理进行求解即可;

(3) 以  $AQ$  为边作等腰三角形  $AQM$ , 使  $\angle QAM = 120^\circ$ ,  $AQ = AM$ , 连接  $BM$ , 证明  $\triangle BAM \cong \triangle CAQ$  (SAS), 得到  $BM = CQ$ , 过点  $A$  作  $AG \perp QM$  于点  $G$ , 勾股定理求出  $BM$  的长, 即可得解.

### 【解题过程】

(1) 证明: 作  $BH \perp AD$ , 交  $AD$  的延长线于  $H$ ,



$$\therefore x = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CED = 2\angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle EAC + \angle ACE, \angle BAC = \angle EAC + \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle H = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BAH (\text{AAS}),$$

$$\therefore BH = AE, CE = AH,$$

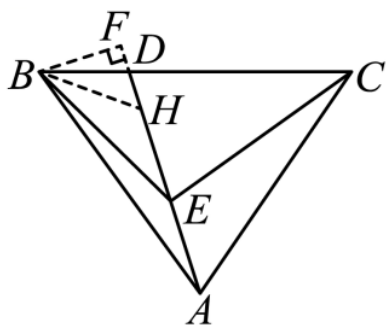
$$\therefore \angle BEH = 45^\circ, \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = EH,$$

$$\therefore AE = EH = \frac{1}{2}CE,$$

$$\therefore CE = 2AE;$$

(2) 在AD上取点H, 使 $BH = EH$ , 作 $BF \perp AD$ 于F,



$$\text{则} \angle BHE = \angle AEC = 120^\circ,$$

$$\text{同 (1) 法可得, } \triangle ACE \cong \triangle BAH (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AH, AE = BH,$$

$$\text{设 } BH = EH = AE = 2x,$$

$$\therefore \angle BHF = 60^\circ,$$

$$\therefore HF = x, BF = \sqrt{3}x,$$

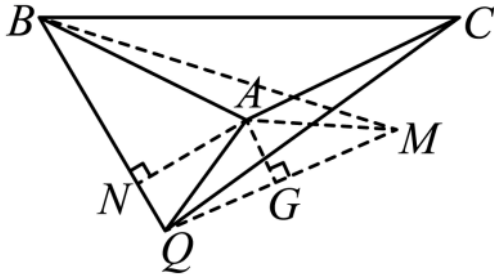
---

在Rt  $\triangle ABF$ 中，由勾股定理得： $(\sqrt{3}x)^2 + (5x)^2 = (\sqrt{7})^2$ ，

解得： $x = \frac{1}{2}$ （负值舍去），

$\therefore CE = AH = 4x = 2$ ；

（3）解：以AQ为边作等腰三角形AQM，使 $\angle QAM = 120^\circ$ ， $AQ = AM$ ，连接BM，



$\because \angle BAC = \angle QAM = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle CAM = \angle QAM + \angle CAM$ ，

即 $\angle BAM = \angle CAQ$ ，

又 $\because AB = AC$ ，

$\therefore \triangle BAM \cong \triangle CAQ$ (SAS)，

$\therefore BM = CQ$ ，

$\because AQ = AM, \angle QAM = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle AQM = 30^\circ$ ，

$\because \angle BQA = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BQM = \angle BQA + \angle AQM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ，

过点A作 $AN \perp BQ$ 于点N，

$\because AQ = 2, \angle AQN = 60^\circ$ ，

$\therefore NQ = AN = \sqrt{3}$

$\because AB = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ ．

$\therefore BQ = BN + NQ = 3 + 1 = 4$ ，

过点A作 $AG \perp QM$ 于点G，

$\because \angle AQG = 30^\circ, AQ = 2$ ，

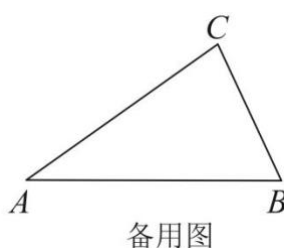
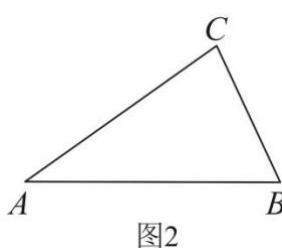
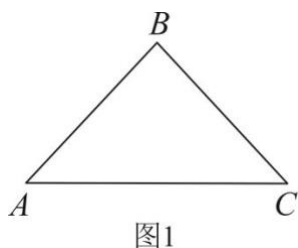
$$\therefore AG = 1, GQ = \sqrt{3},$$

$$\therefore QM = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore BM = \sqrt{BQ^2 + QM^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore CQ = 2\sqrt{7}.$$

8. (2023 下·浙江金华·八年级浙江省义乌市后宅中学校考阶段练习) 定义: 在  $\triangle ABC$ , 若  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $a, b, c$  满足  $b^2 = ac + a^2$  则称这个三角形为“和谐勾股三角形”. 请根据以上定义解决下列问题:



(1) 命题: “直角三角形都是和谐勾股三角形”是\_ (填“真”或“假”) 命题;

(2) 如图 1, 若等腰  $\triangle ABC$  是“和谐勾股三角形”, 其中  $AB = BC$ ,  $AC > AB$ , 求  $\angle A$  的度数;

(3) 如图 2, 在三角形  $ABC$  中,  $\angle B = 2\angle A$ , 且  $\angle C > \angle A$ .

①当  $\angle A = 32^\circ$  时, 你能把这个三角形分成两个等腰三角形吗? 若能, 请在图 2 中画出分割线, 并标注被分割后的两个等腰三角形的顶角度数; 若不能, 请说明理由;

②请证明  $\triangle ABC$  为“和谐勾股三角形”

### 【思路点拨】

(1) 先假设  $\text{Rt } \triangle ABC$  是和谐勾股三角形, 得出  $ab + a^2 = c^2$ , 再由勾股定理得  $a^2 + b^2 = c^2$ , 即可判断出此直角三角形是等腰直角三角形;

(2) 由“和谐勾股三角形”定义判断出此三角形是等腰直角三角形, 即可得出结论;

(3) ①分三种情况, 利用等腰三角形的性质即可得出结论;

②先求出  $CD = CB = a$ ,  $AD = CD = a$ ,  $BD = AB - AD = c - a$ ,  $DG = BG = \frac{1}{2}(c - a)$ ,  $AG = \frac{1}{2}(a + c)$ ,

在  $\text{Rt } \triangle ACG$  与  $\text{Rt } \triangle BCG$  利用勾股定理分别求  $CG^2$ , 建立方程即可得出结论.

### 【解题过程】

(1) 解: 如图 1, 假设  $\text{Rt } \triangle ABC$  是和谐勾股三角形,

$$\therefore ab + a^2 = c^2,$$

在  $\text{Rt } \triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ , 根据勾股定理,

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore ab + a^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore ab = b^2$$

$$\therefore a = b,$$

$\therefore \triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$\therefore$  等腰直角三角形是和谐勾股三角形,

即原命题是假命题,

故答案为: 假;

$$(2) \because AB = BC, AC > AB$$

$$\therefore a = c, b > c,$$

$\therefore \triangle ABC$  是和谐勾股三角形,

$$\therefore ac + a^2 = b^2,$$

$$\therefore c^2 + a^2 = b^2,$$

$\therefore \triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle A = 45^\circ,$$

$$(3) \textcircled{1} \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle ABC = 2\angle BAC, \angle BAC = 32^\circ,$$

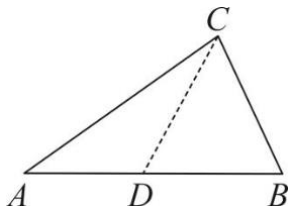
$$\therefore \angle ABC = 64^\circ,$$

根据三角形的内角和定理得,  $\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 84^\circ,$

$\therefore$  把这个三角形分成两个等腰三角形,

当射线经过点  $C$ ,

$$(I) \text{ 当 } \angle BCD = \angle BDC \text{ 时,}$$



$$\therefore \angle ABC = 64^\circ,$$

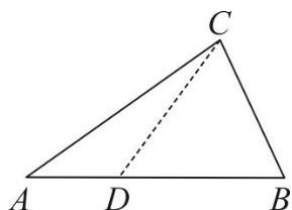
$$\therefore \angle BCD = \angle BDC = 58^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 84^\circ - 58^\circ = 26^\circ,$$

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BCD = 122^\circ,$$

$\therefore \triangle ACD$  不是等腰三角形, 此种情况不成立;

(II) 当 $\angle BCD = \angle ABC = 64^\circ$ 时,



$$\therefore \angle BDC = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 84^\circ - 64^\circ = 20^\circ, \angle ADC = 128^\circ,$$

$\therefore \triangle ACD$ 不是等腰三角形, 此种情况不成立;

(III) 当 $\angle BDC = \angle ABC = 64^\circ$ 时,

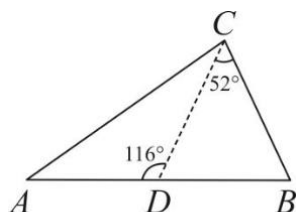


图2

$$\therefore \angle BCD = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 84^\circ - 52^\circ = 32^\circ = \angle BAC,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形,

即: 分割线和顶角标注如图 2 所示,

当射线经过点  $B$ , 同 (I) 的方法, 判断此种情况不成立;

当射线经过点  $A$ , 同 (II) 的方法, 判断此种情况不成立;

②如图 3, 在 $AB$ 边上取点  $D$ , 连接 $CD$ , 使 $\angle ACD = \angle A$ ,

作 $CG \perp AB$ 于  $G$ ,

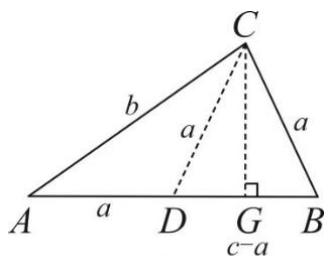


图3

$$\therefore \angle CDB = \angle ACD + \angle A = 2\angle A,$$

$$\because \angle B = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle B,$$

$$\therefore CD = CB = a,$$

$$\because \angle ACD = \angle A,$$

$$\therefore AD = CD = a,$$

$$\therefore BD = AB - AD = c - a,$$

$$\because CG \perp AB,$$

$$\therefore DG = BG = \frac{1}{2}(c - a),$$

$$\therefore AG = AD + DG = a + \frac{1}{2}(c - a) = \frac{1}{2}(a + c),$$

$$\text{在Rt} \triangle ACG \text{中}, CG^2 = AC^2 - AG^2 = b^2 - \left[\frac{1}{2}(c + a)\right]^2,$$

$$\text{在Rt} \triangle BCG \text{中}, CG^2 = BC^2 - BG^2 = a^2 - \left[\frac{1}{2}(c - a)\right]^2,$$

$$\therefore b^2 - \left[\frac{1}{2}(c + a)\right]^2 = a^2 - \left[\frac{1}{2}(c - a)\right]^2,$$

$$\therefore b^2 = ac + a^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为“和谐勾股三角形”.

9. (2023 下·湖北武汉·八年级校考阶段练习) 已知 $\triangle ABC$ 中,  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle ADB = \alpha$ .

(1) 如图 1, 若 $\alpha = 30^\circ$ , 则线段 $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$ 之间的数量关系为\_;

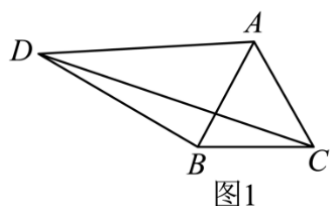


图1

(2) 若 $\alpha = 45^\circ$ ,

①如图 2; 线段 $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$ 满足怎样的数量关系? 证明你的结论;

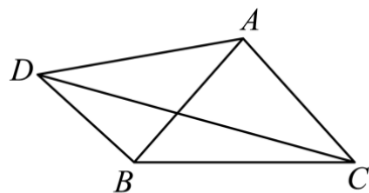


图2

②如图 3, 点 $E$ 在线段 $BD$ 上, 且 $\angle BAE = 45^\circ$ ,  $AD = 5$ ,  $BD = 4$ , 则 $DE =$ \_.

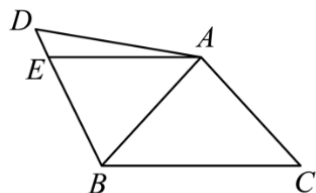


图3

### 【思路点拨】

(1) 结论:  $DC^2 = DA^2 + DB^2$ . 如图 1 中, 将  $\triangle DCB$  绕点  $C$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle MAC$ , 连接  $DM$ . 首先证明  $\triangle DCM$  是等边三角形, 再证明  $\triangle ADM$  是直角三角形即可解决问题;

(2) ①结论:  $DC^2 = DB^2 + 2DA^2$ . 如图 2 中, 作  $AM \perp AD$  交  $DB$  的延长线于  $M$ , 连接  $CM$ . 由  $\triangle DAB \cong \triangle MAC$ , 推出  $BD = CM$ ,  $\angle ADB = \angle AMC = 45^\circ$  推出  $\angle DMC = 90^\circ$ , 推出  $DC^2 = CM^2 + DM^2$ , 由  $CM = DB$ ,  $DM = \sqrt{2}AD$ , 即可证明; ②如图 3 中, 在图 2 的基础上将  $\triangle AMB$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle ADG$ . 则  $\triangle AEG \cong \triangle AEB$ ,  $\angle GDE = 90^\circ$ , 可得  $EB = EG$ , 设  $DE = x$ .  $EB = EG = 4 - x$ , 由  $AD = AM = 5$ , 推出  $DM = 5\sqrt{2}$ ,  $BM = DG = 5\sqrt{2} - 4$ , 在  $\text{Rt}\triangle DEG$  中, 根据  $DG^2 + DE^2 = EG^2$ , 列出方程即可解决问题.

### 【解题过程】

(1) 解: 结论:  $DC^2 = DA^2 + DB^2$ .

理由如下:

将  $\triangle DCB$  绕点  $C$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle MAC$ , 连接  $DM$ , 如图 1 所示:

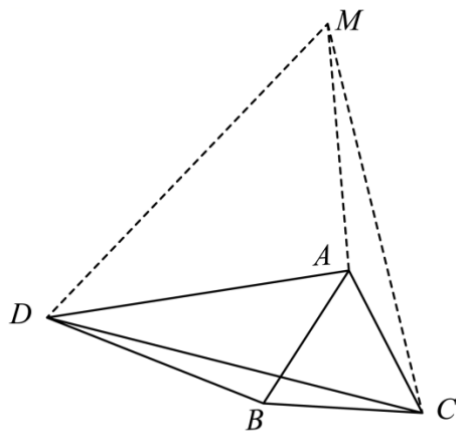


图1

$\because CD = CM, \angle DCM = 60^\circ,$

$\therefore \triangle DCM$  是等边三角形,

$\therefore DM = CD = CM,$

$\because \angle ADB = 30^\circ,$

$\therefore \angle DAB + \angle DBA = 150^\circ,$

$\because \angle MAC = \angle DBC,$

$\therefore \angle MAC + \angle DAB = \angle DBC + \angle DAB = \angle DBA + \angle ABC + \angle DAB = 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ,$

$\therefore \angle DAM = 360^\circ - 210^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$

$\therefore DM^2 = DA^2 + AM^2,$

$$\because AM = DB, DM = DC,$$

$$\therefore DC^2 = DA^2 + DB^2.$$

故答案为  $DC^2 = DA^2 + DB^2$ ;

(2) 解: ①结论:  $DC^2 = DB^2 + 2DA^2$ .

理由如下:

作  $AM \perp AD$  交  $DB$  的延长线于  $M$ , 连接  $CM$ , 如图 2 所示:

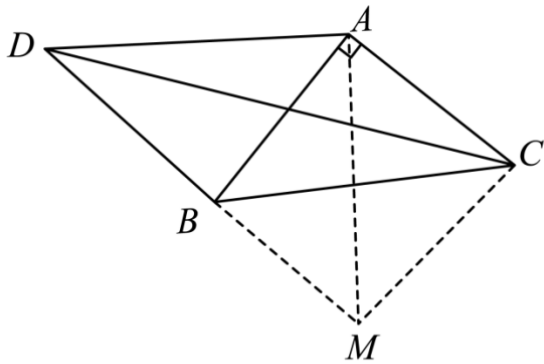


图2

$$\because \angle ADM = 45^\circ, \angle DAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle AMD = 45^\circ,$$

$$\therefore DA = AM, DM = \sqrt{2}DA,$$

$$\because \angle DAM = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle MAC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle MAC,$$

$$\therefore BD = CM, \angle ADB = \angle AMC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DMC = 90^\circ,$$

$$\therefore DC^2 = CM^2 + DM^2,$$

$$\because CM = DB, DM = \sqrt{2}AD,$$

$$\therefore DC^2 = DB^2 + 2DA^2;$$

②在图 2 的基础上将  $\triangle AMB$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle ADG$ , 如图 3 所示:

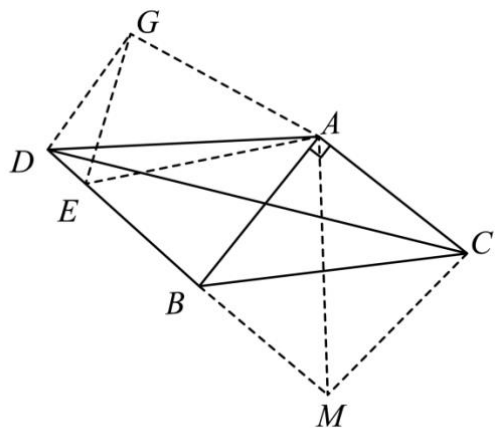


图3

则  $\triangle AEG \cong \triangle AEB$ ,  $\angle GDE = 90^\circ$ ,

$\therefore EB = EG$ ,

设  $DE = x$ , 则  $EB = EG = 4 - x$ ,

$\therefore AD = AM = 5$ ,

$\therefore DM = 5\sqrt{2}$ ,  $BM = DG = 5\sqrt{2} - 4$ ,

在  $\text{Rt}\triangle DEG$  中, 由勾股定理知  $DG^2 + DE^2 = EG^2$ , 则  $(5\sqrt{2} - 4)^2 + x^2 = (4 - x)^2$ , 解得  $x = \frac{20\sqrt{2} - 25}{4}$ ,

故答案为  $5\sqrt{2} - \frac{25}{4}$ .

10. (2023 下·重庆沙坪坝·八年级重庆一中校考期中) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $E$  为平面内一点, 连接  $AE$ 、 $CE$ .

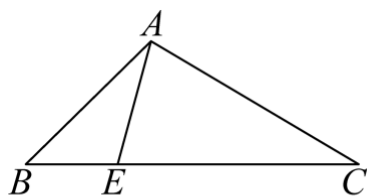


图1

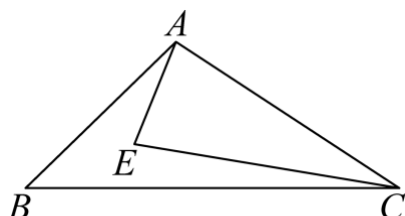


图2

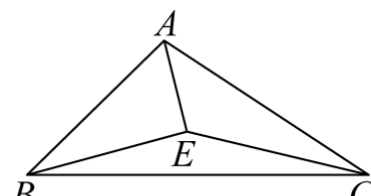


图3

(1) 如图 1, 若点  $E$  在线段  $BC$  上,  $AC = EC$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $BE = 3$ , 求线段  $AC$  的长;

(2) 如图 2, 若点  $E$  在  $\triangle ABC$  内部,  $AC = EC$ ,  $\angle BAE = \angle ACE$ , 求证:  $AE + 2AB = \sqrt{2}BC$ ;

(3) 如图 3, 若点  $E$  在  $\triangle ABC$  内部, 连接  $BE$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 6\sqrt{2}$ , 请直接写出  $\frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA$  的最小值.

### 【思路点拨】

(1) 过点  $A$  作  $AF \perp BC$  于  $F$ , 则可得  $\triangle AFB$  是等腰直角三角形, 由勾股定理可求得  $AF = BF = 4$ , 则可得

$EF = 1$ ，再设  $AC = x$ ，则  $CF = CE - EF = x - 1$ ，在  $\text{Rt} \triangle AFC$  中由勾股定理建立方程即可求解；

(2) 过  $C$  作  $CG \perp BC$  交  $BA$  的延长线于点  $G$ ，在  $AG$  上取  $AH = AE$ ，连接  $CH$ ；首先可证明  $\triangle AEC \cong \triangle AHC$ ，其次再证明  $\triangle ABC \cong \triangle HGC$ ，则得  $GH = AB$ ，从而由勾股定理即可证明结论成立；

(3) 过点  $B$  作  $BN \perp BE$ ，且  $BN = BE$ ，作  $BM \perp BC$ ， $BM = BC$ ，连接  $MN$ ；分别取  $BM$ 、 $BN$  的中点  $D$ 、 $F$ ，连接  $DF$ ，过  $A$  作  $AP \perp BD$  交  $DB$  延长线于点  $P$ ，连接  $EF$ 、 $AD$ 、 $FD$ ；证明  $\triangle BEC \cong \triangle BNM$ ，则  $MN = CE$ ，

由中点及中位线定理知  $BF = \frac{1}{2}BE$ ， $BD = \frac{1}{2}BC$ ， $DF = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CE$ ，在  $\text{Rt} \triangle EBF$  中，由勾股定理得  $EF =$

$\frac{\sqrt{5}}{2}BE$ ；则  $\frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA = DF + FE + AE$ ，则当点  $A$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $D$  四点共线时， $\frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA$  的最小

值为  $AD$  的长，由勾股定理求解即可。

### 【解题过程】

(1) 解：如图，过点  $A$  作  $AF \perp BC$  于  $F$ ，

则  $\angle AFB = \angle AFC = 90^\circ$ ，

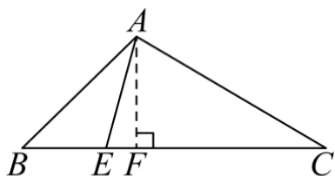


图1

$\therefore \angle FAB = \angle FBA = 45^\circ$ ，

$\therefore AF = BF$

即  $\triangle AFB$  是等腰直角三角形，

由勾股定理得：  $AF^2 + BF^2 = AB^2 = 32$ ，

$\therefore AF = BF = 4$ ，

$\therefore EF = BF - BE = 1$ ；

设  $AC = x$ ，则  $CE = AC = x$ ，

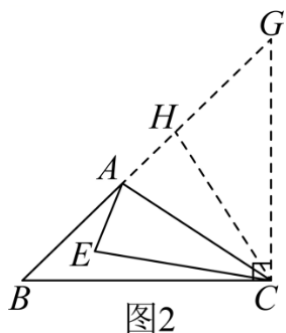
$\therefore CF = CE - EF = x - 1$ ；

在  $\text{Rt} \triangle AFC$  中，  $AF^2 + CF^2 = AC^2$ ，

即  $4^2 + (x - 1)^2 = x^2$ ，

解得：  $x = \frac{17}{2}$ ；

(2) 解：如图，过  $C$  作  $CG \perp BC$  交  $BA$  的延长线于点  $G$ ，在  $AG$  上取  $AH = AE$ ，连接  $CH$ ；



$$\because AC = CE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CEA;$$

$$\because \angle CAE + 2\angle CAE = 180^\circ, \angle BAE + \angle CAE + \angle CAH = 180^\circ, \angle BAE = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CAH,$$

$$\because AC = AC, AE = AH,$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle AHC(\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = CH,$$

$$\because CA = CE,$$

$$\therefore CA = CH,$$

$$\therefore \angle CHA = \angle CAH,$$

$$\therefore \angle CHG = \angle CAB;$$

$$\because CG \perp BC, \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle G = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle HGC(\text{AAS}),$$

$$\therefore GH = AB,$$

$$\therefore BG = AB + AH + CG = AE + 2AB;$$

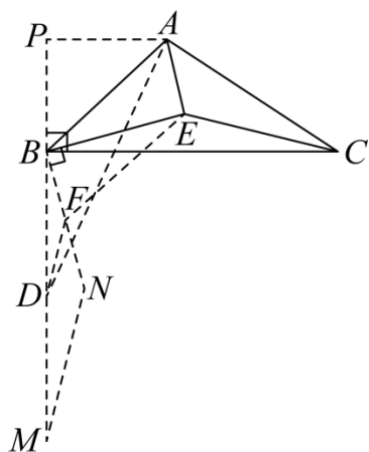
$$\because \angle G = \angle B = 45^\circ, CG \perp BC,$$

$$\therefore CB = CG,$$

$$\text{由勾股定理得: } BG = \sqrt{2}BC,$$

$$\therefore AE + 2AB = \sqrt{2}BC;$$

(3) 解: 如图, 过点  $B$  作  $BN \perp BE$ , 且  $BN = BE$ ; 作  $BM \perp BC$ ,  $BM = BC$ , 连接  $MN$ ; 分别取  $BM$ 、 $BN$  的中点  $D$ 、 $F$ , 连接  $DF$ ; 过  $A$  作  $AP \perp BD$  交  $DB$  延长线于点  $P$ , 连接  $EF$ 、 $AD$ ;



$$\because \angle EBN = \angle CBM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle NBM;$$

$$\because BN = BE, BC = BM,$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle BNM(\text{SAS}),$$

$$\therefore MN = CE,$$

$$\because BM、BN\text{的中点分别为 } D、F,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BE, BD = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CE,$$

$$\text{在Rt } \triangle EBF \text{ 中, 由勾股定理得 } EF = \sqrt{BF^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}BE;$$

$$\therefore \frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA = DF + FE + AE,$$

$$\therefore \text{当点 } A、E、F、D \text{ 四点共线时, } \frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA \text{ 取得最小值, 且最小值为 } AD \text{ 的长;}$$

$$\because BD \perp BCP, A \perp BP, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PBA = \angle PAB = 45^\circ,$$

$$\therefore PA = PB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 2\sqrt{2};$$

$$\because BM = BC = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BM = 3\sqrt{2},$$

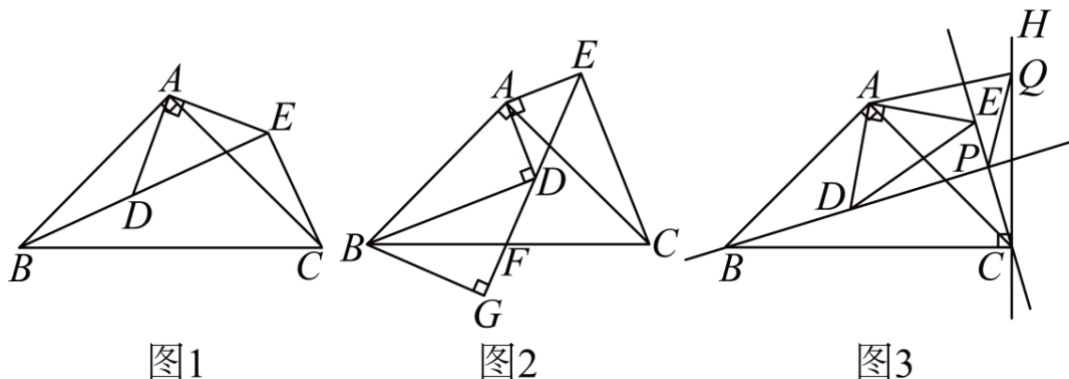
$$\therefore PD = PB + BD = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2};$$

$$\text{在Rt } \triangle PDA \text{ 中, 由勾股定理得 } AD = \sqrt{PA^2 + PD^2} = \sqrt{8 + 50} = \sqrt{58},$$

$$\therefore \frac{1}{2}EC + \frac{\sqrt{5}}{2}EB + EA \text{ 的最小值为 } \sqrt{58}.$$

11. (2023 上·重庆沙坪坝·八年级重庆八中校考开学考试) 已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形,  $\angle BAC =$

$\angle DAE = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $AD = AE$ , 连接  $BD$ 、 $CE$ .



- (1) 如图 1, 若点  $B$ 、 $D$ 、 $E$  在同一直线上, 已知  $AD = 2\sqrt{2}$ ,  $BD = 2$ , 求线段  $BC$  的长度.
- (2) 如图 2, 当  $\angle ADB = 90^\circ$  时, 过点  $B$  作  $BG \perp ED$  并交  $ED$  的延长线于点  $G$ ,  $EG$  与  $BC$  交于点  $F$ , 求证:  $DE = 2FG$ .
- (3) 如图 3, 已知若  $AB = 4$ , 直线  $BD$  与直线  $CE$  相交于点  $P$ , 过点  $C$  作直线  $CH$  垂直于  $CB$ , 点  $Q$  是直线  $CH$  上一点, 直接写出  $AQ + PQ$  的最小值.

### 【思路点拨】

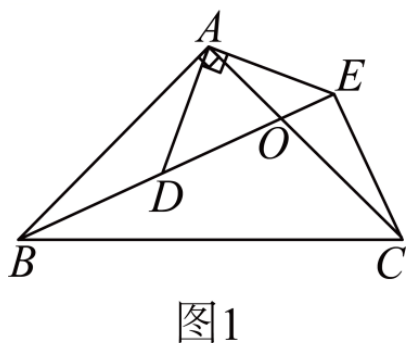
(1) 如图 1 中, 设  $AC$  与  $BE$  交于点  $O$ , 证明  $\triangle BAD \cong \triangle CAE$  (SAS), 推出  $BD = CE = 2$ ,  $\angle ABD = \angle ACE$ , 推出  $\angle CEO = \angle BAO = 90^\circ$ , 可得结论;

(2) 连接  $AF$ , 过点  $A$  作  $AN \perp EG$  于点  $N$ , 过点  $C$  作  $CM \perp EF$  与  $M$ , 则  $\angle CME = \angle ANF = 90^\circ$ , 依次证明  $\triangle BAD \cong \triangle CAE$  (SAS), 再求出  $\triangle GBD \cong \triangle MEC$  (AAS),  $\triangle BFG \cong \triangle CFM$  (AAS),  $\triangle BFG \cong \triangle FAN$ , 即可得出结论;

(3) 如图 3, 作点  $A$  关于  $CH$  的对称点  $J$ , 连接  $CJ$ ,  $AJ$ , 过点  $J$  作  $JM \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $M$ , 取  $BC$  的中点  $O$ , 连接  $OP$ ,  $OJ$ . 求出  $PJ$  的最小值, 可得结论.

### 【解题过程】

(1) 解: 如图 1 中, 设  $AC$  与  $BE$  交于点  $O$



$\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰直角三角形

$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976122121120010114>