

2024 年高考数学模拟试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

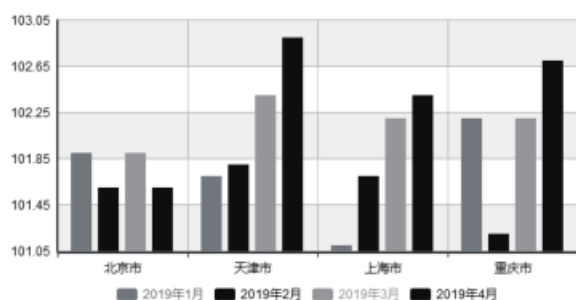
1. 一个四面体所有棱长都是 4，四个顶点在同一个球上，则球的表面积为（ ）

- A. 24π B. $8\sqrt{6}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. 12π

2. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $\triangle SAD$ 是等边三角形，且 $SA = AB = 2\sqrt{3}$ ；若点 P 在四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球面上运动，记点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 d ，若平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，则 d 的最大值为（ ）

- A. $\sqrt{13}+1$ B. $\sqrt{13}+2$
C. $\sqrt{15}+1$ D. $\sqrt{15}+2$

3. 以下两个图表是 2019 年初的 4 个月我国四大城市的居民消费价格指数（上一年同月=100）变化图表，则以下说法错误的是（ ）



图表一



图表二

（注：图表一每个城市的条形图从左到右依次是 1、2、3、4 月份；图表二每个月份的条形图从左到右四个城市依次是北京、天津、上海、重庆）

- A. 3 月份四个城市之间的居民消费价格指数与其它月份相比增长幅度较为平均
B. 4 月份仅有三个城市居民消费价格指数超过 102
C. 四个月的数据显示北京市的居民消费价格指数增长幅度波动较小
D. 仅有天津市从年初开始居民消费价格指数的增长呈上升趋势

4. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = a^x - a^{-x} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，若 $g(2) = a$

，则函数 $f(x^2 + 2x)$ 的单调递增区间为 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

5. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $[m, 2m]$ 上的值域为 $[m, 2m]$, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{16}$ 或 $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 4

6. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为矩形, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E 在线段 BC 上, 以 AD 为直径的圆过点 E . 若

$SA = \sqrt{3}AB = 3$, 则 $\triangle SED$ 的面积的最小值为 ()

- A. 9 B. 7 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 过右顶点 A 且与 x 轴垂直的直线交双曲线的一条渐近线于 M

点, MF 的中点恰好在双曲线 C 上, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 30° , $\vec{a} = (1, \sqrt{2})$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ ()

- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{7}$

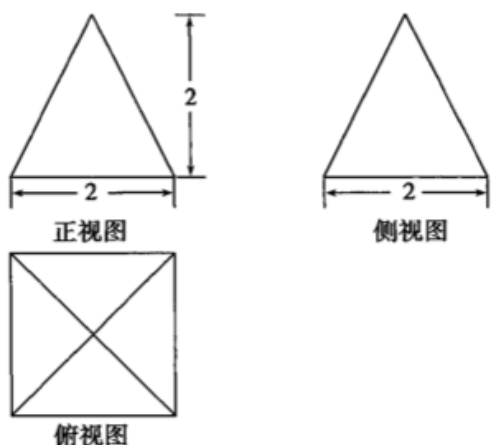
9. 已知 $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha$ 的值等于 ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

10. 已知数列 $a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ 是首项为 8, 公比为 $\frac{1}{2}$ 得等比数列, 则 a_3 等于 ()

- A. 64 B. 32 C. 2 D. 4

11. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的表面积是 ()



- A. 8cm^2 B. 12cm^2 C. $(4\sqrt{5}+2)\text{cm}^2$ D. $(4\sqrt{5}+4)\text{cm}^2$

12. 若 AB 为过椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ 中心的弦, F_1 为椭圆的焦点, 则 $\triangle F_1AB$ 面积的最大值为 ()

- A. 20 B. 30 C. 50 D. 60

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x$ $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域为_____.

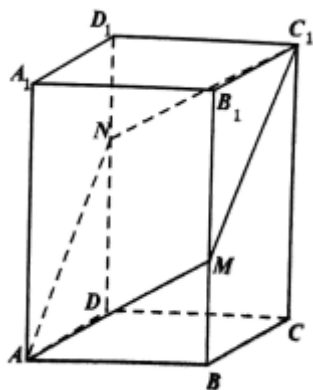
14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, PAB 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形, $ABCD$ 为矩形, $AD=2$, $PC=PD=\sqrt{22}$. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点均在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为_____.

15. 不等式 $\sqrt{x-1} < 1$ 的解集为_____

16. 在 $(1+ax)^2(1-x)^5$ 的展开式中, 所有 x 的奇数次幂项的系数和为 -64, 则实数 a 的值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, $AA_1=3$, 过顶点 A, C_1 的平面与棱 BB_1, DD_1 分别交于 M, N 两点 (不在棱的端点处)。



(1) 求证: 四边形 AMC_1N 是平行四边形;

(2) 求证: AM 与 AN 不垂直;

(3) 若平面 AMC_1N 与棱 BC 所在直线交于点 P , 当四边形 AMC_1N 为菱形时, 求 PC 长.

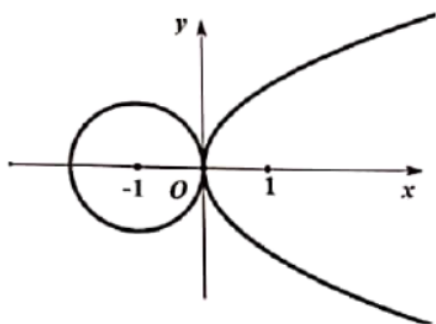
18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin x + \ln x - 1$.

(I) 求 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程;

(II) 求证: $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的极大值;

(III) 直接写出函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的零点个数.

19. (12 分) 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上横坐标为 3 的点与抛物线焦点的距离为 4.



(1) 求 p 的值;

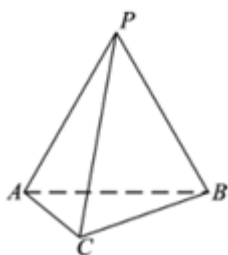
(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($0 < x_0 \leq 2$) 为抛物线 C_1 上的动点, 过 P 作圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线分别与 y 轴交于 A 、 B 两点. 求 $|AB|$ 的取值范围.

20. (12 分) 设函数 $f(x) = (1 + e^{-2})e^x + kx - 1$ (其中 $x \in (0, +\infty)$), 且函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线与直线 $(e^2 + 2)x - y = 0$ 平行.

(1) 求 k 的值;

(2) 若函数 $g(x) = -x \ln x$, 求证: $f(x) > g(x)$ 恒成立.

21. (12 分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC = BC = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧面 PAB 为等边三角形, 侧棱 $PC = 2\sqrt{2}$.



- (1) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ；
 (2) 求三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\cos^2 x + m$ 在 R 上的最大值为 3.

- (1) 求 m 的值及函数 $f(x)$ 的单调递增区间；
 (2) 若锐角 $\triangle ABC$ 中角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，且 $f(A) = 0$ ，求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

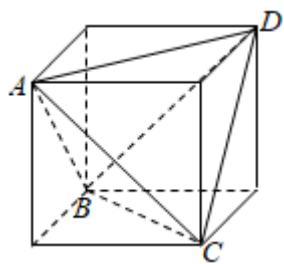
1、A

【解析】

将正四面体补成正方体，通过正方体的对角线与球的半径关系，求解即可.

【详解】

解：如图，将正四面体补形成一个正方体，正四面体的外接球与正方体的外接球相同，



$\because$ 四面体所有棱长都是 4,

$\therefore$ 正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$,

设球的半径为 r ,

则 $2r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2}$, 解得 $r = \sqrt{6}$,

所以 $S = 4\pi r^2 = 24\pi$,

故选：A.

【点睛】

本题主要考查多面体外接球问题，解决本题的关键在于，巧妙构造正方体，利用正方体的外接球的直径为正方体的对角线，从而将问题巧妙转化，属于中档题.

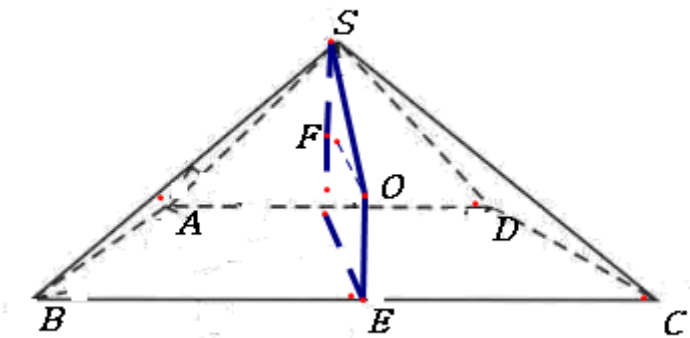
2、A

【解析】

根据平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，则球心在过 BC 的中点 E 的面的垂线上，又 $\triangle SAD$ 是等边三角形，所以球心也在过 $\triangle SAD$ 的外心 F 面的垂线上，从而找到球心，再根据已知量求解即可.

【详解】

依题意如图所示：



取 BC 的中点 E ，则 E 是等腰梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心，
取 F 是 $\triangle SAD$ 的外心，作 $OE \perp$ 平面 $ABCD$, $OF \perp$ 平面 SAB ，
则 O 是四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球球心，且 $OF = 3$, $SF = 2$ ，

设四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球半径为 R ，则 $R^2 = SF^2 + OF^2 = 13$ ，而 $OE = 1$ ，

所以 $d_{\max} = R + OE = \sqrt{13} + 1$ ，

故选：A.

【点睛】

本题考查组合体、球，还考查空间想象能力以及数形结合的思想，属于难题.

3、D

【解析】

采用逐一验证法，根据图表，可得结果.

【详解】

A 正确，从图表二可知，

3 月份四个城市的居民消费价格指数相差不大

B 正确，从图表二可知，

4 月份只有北京市居民消费价格指数低于 102

C 正确, 从图表一中可知,

只有北京市 4 个月的居民消费价格指数相差不大

D 错误, 从图表一可知

上海市也是从年初开始居民消费价格指数的增长呈上升趋势

故选: D

【点睛】

本题考查图表的认识, 审清题意, 细心观察, 属基础题.

4、D

【解析】

根据函数的奇偶性用方程法求出 $f(x), g(x)$ 的解析式, 进而求出 a , 再根据复合函数的单调性, 即可求出结论.

【详解】

依题意有 $f(x) + g(x) = a^x - a^{-x} + 2$, ①

$f(-x) + g(-x) = a^{-x} - a^x + 2 = -f(x) + g(x)$, ②

①-②得 $f(x) = a^x - a^{-x}$, $g(x) = 2$, 又因为 $g(2) = a$,

所以 $a = 2$, $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $f(x)$ 在 R 上单调递增,

所以函数 $f(x^2 + 2x)$ 的单调递增区间为 $(-1, +\infty)$.

故选:D.

【点睛】

本题考查求函数的解析式、函数的性质, 要熟记复合函数单调性判断方法, 属于中档题.

5、C

【解析】

对 a 进行分类讨论, 结合指数函数的单调性及值域求解.

【详解】

分析知, $m > 0$. 讨论: 当 $a > 1$ 时, $\begin{cases} a^m = m \\ a^{2m} = 2m \end{cases}$, 所以 $a^m = 2$, $m = 2$, 所以 $a = \sqrt{2}$; 当 $0 < a < 1$ 时, $\begin{cases} a^m = 2m \\ a^{2m} = m \end{cases}$,

所以 $a^m = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{4}$, 所以 $a = \frac{1}{16}$. 综上, $a = \frac{1}{16}$ 或 $a = \sqrt{2}$, 故选 C.

【点睛】

本题主要考查指数函数的值域问题，指数函数的值域一般是利用单调性求解，侧重考查数学运算和数学抽象的核心素养。

6、C

【解析】

根据线面垂直的性质以及线面垂直的判定，根据勾股定理，得到 BE, EC 之间的等量关系，再用 BE, EC 表示出 $\triangle SED$ 的面积，利用均值不等式即可容易求得。

【详解】

设 $BE = x$ ， $EC = y$ ，则 $BC = AD = x + y$ 。

因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $ED \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $SA \perp ED$ 。

又 $AE \perp ED$ ， $SA \cap AE = A$ ，所以 $ED \perp$ 平面 SAE ，则 $ED \perp SE$ 。

易知 $AE = \sqrt{x^2 + 3}$ ， $ED = \sqrt{y^2 + 3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中， $AE^2 + ED^2 = AD^2$ ，

即 $x^2 + 3 + y^2 + 3 = (x + y)^2$ ，化简得 $xy = 3$ 。

在 $\text{Rt}\triangle SED$ 中， $SE = \sqrt{x^2 + 12}$ ， $ED = \sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{\frac{9}{x^2} + 3}$ 。

所以 $S_{\triangle SED} = \frac{1}{2} SE \cdot ED = \frac{1}{2} \sqrt{3x^2 + \frac{108}{x^2} + 45}$ 。

因为 $3x^2 + \frac{108}{x^2} \geq 2\sqrt{3x^2 \cdot \frac{108}{x^2}} = 36$ ，

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ ， $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立，所以 $S_{\triangle SED} \geq \frac{1}{2} \sqrt{36 + 45} = \frac{9}{2}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查空间几何体的线面位置关系及基本不等式的应用，考查空间想象能力以及数形结合思想，涉及线面垂直的判定和性质，属中档题。

7、A

【解析】

设 $M(a, b)$ ，则 MF 的中点坐标为 $(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$ ，代入双曲线的方程可得 a, b, c 的关系，再转化成关于 a, c

的齐次方程, 求出 $\frac{c}{a}$ 的值, 即可得答案.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 $A(a, 0)$, 右焦点为 $F(c, 0)$,

M 所在直线为 $x = a$, 不妨设 $M(a, b)$,

$$\therefore MF \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2} \right). \text{ 代入方程可得 } \frac{\left(\frac{a+c}{2} \right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b}{2} \right)^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore \frac{(a+c)^2}{4a^2} = \frac{5}{4}, \therefore e^2 + 2e - 4 = 0, \therefore e = \sqrt{5} - 1 \text{ (负值舍去)}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率, 考查函数与方程思想、转化与化归思想, 考查逻辑推理能力和运算求解能力, 求解时注意构造 a, c 的齐次方程.

8、A

【解析】

根据模长计算公式和数量积运算, 即可容易求得结果.

【详解】

$$\text{由于 } |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 \times 3 - 4 \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4} = 2,$$

故选: A.

【点睛】

本题考查向量的数量积运算, 模长的求解, 属综合基础题.

9、A

【解析】

由余弦公式的二倍角可得, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{9}$, 再由诱导公式有

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha, \text{ 所以 } \sin \alpha = -\frac{7}{9}$$

【详解】

$$\therefore \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976141112010011011>