

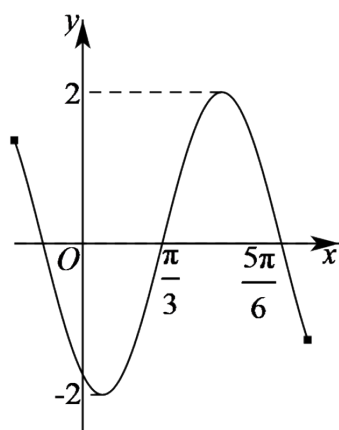
2023-2024 学年安徽省巢湖市第一中学高考全国统考预测密卷数学试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度，再将图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $g(x)$ 为奇函数，则 m 的最小值为（ ）
A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{2\pi}{9}$ C. $\frac{\pi}{18}$ D. $\frac{\pi}{24}$
2. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \pi$) 的图象如图所示，则下列说法错误的是（ ）



- A. 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{17\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}]$ 上单调递减
 - B. 函数 $f(x)$ 在 $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增
 - C. 函数 $f(x)$ 的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$)
 - D. 函数 $f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
3. 已知 i 为虚数单位，则 $\frac{2+3i}{(1-2i)i} =$ （ ）
A. $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$
 4. 集合 $A = \{-2, -1, 1\}, B = \{4, 6, 8\}, M = \{x | x = a + b, b \in B, x \in B\}$, 则集合 M 的真子集的个数是

- A. 1 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 7 个

5. 若函数 $f(x) = a^{2x-4}$ ($a > 0, a \neq 1$) 满足 $f(1) = \frac{1}{9}$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$
C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2]$

6. 若复数 z 满足 $2z - \bar{z} = 3 + 12i$, 其中 i 为虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则复数 $|z| = (\quad)$

- A. $3\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 4 D. 5

7. 已知点 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0, c = \sqrt{a^2 + b^2}$) 上一点, 若点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{1}{4}c^2$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = -3$, $S_{12} = 24$, 若 $a_i + a_j = 0$ ($i, j \in \mathbb{N}^*$, 且 $1 \leq i < j$), 则 i 的取值集合是 ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{6, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

11. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{c}| = 1, |\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}| = 5$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

12. 复数 $\frac{1-i}{2-i}$ 的共轭复数对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线上任一点, 且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 -7

，则该双曲线的离心率是_____.

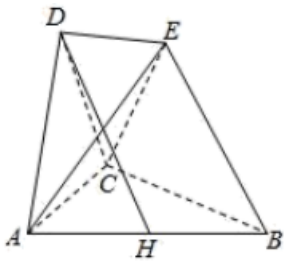
14. $(1-x)(1+x)^4$ 展开式中，含 x^2 项的系数为_____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，满足 $a_1 = 2$ ， $3S_n = (n+m)a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}$)，且 $a_n b_n = n+1$. 若任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $\lambda \leq T_{2n} - T_n$ 成立，则实数 λ 的取值范围为_____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，直线 l 与抛物线 C 相切于 M 点， N 是 l 上一点 (不与 M 重合)，若以线段 MN 为直径的圆恰好经过 F ，则点 N 到抛物线顶点 O 的距离 $|ON|$ 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，空间几何体 $ABCDE$ 中， $\triangle ACD$ 是边长为 2 的等边三角形， $EB = EC = \sqrt{6}$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ，且平面 $EBC \perp$ 平面 ABC ， H 为 AB 中点.



(1) 证明： $DH \parallel$ 平面 BCE ；

(2) 求二面角 $E-AB-C$ 平面角的余弦值.

18. (12 分) 以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴，且在两种坐标系中取相同的长度单位，建立极坐标系，判断

直线 $l: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \end{cases}$ (t 为参数) 与圆 $C: \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$ 的位置关系.

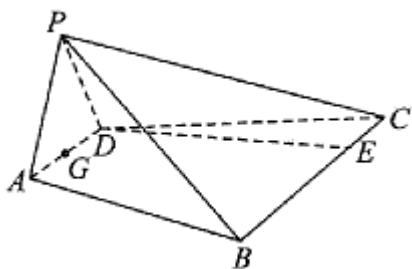
19. (12 分) 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过点 F 且斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 与椭圆 W 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 M ， O 为坐标原点.

(1) 证明：点 M 在 y 轴的右侧；

(2) 设线段 AB 的垂直平分线与 x 轴、 y 轴分别相交于点 C, D . 若 $\triangle ODC$ 与 $\triangle CMF$ 的面积相等，求直线 l 的斜率 k

20. (12 分) 已知 $f(x) = ax^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq 1$)，求 $f(x)$ 的最小值.

21. (12 分) 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是等腰梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $BC = 4$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\triangle PAD$ 为等边三角形，且点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 AD 的中点 G ，点 E 在线段 BC 上，且 $CE:EB = 1:3$.



(1) 求证: $DE \perp$ 平面 PAD .

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 2$, $S_n = \lambda n a_n + \mu a_{n-1}$, 其中 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda, \mu \in R$.

(1) 若 $\lambda = 0$, $\mu = 4$, $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 λ, μ 的值;

(3) 若 $a_2 = 3$, 且 $\lambda + \mu = \frac{3}{2}$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据三角函数的变换规则表示出 $g(x)$, 根据 $g(x)$ 是奇函数, 可得 m 的取值, 再求其最小值.

【详解】

解: 由题意知, 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 得 $y = \sin\left[3\left(x - m\right) + \frac{\pi}{6}\right]$, 再将

$y = \sin\left[3x - 3m + \frac{\pi}{6}\right]$ 图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图像,

$$\therefore g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - 3m + \frac{\pi}{6}\right),$$

因为 $g(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } -3m + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in Z, \text{ 解得 } m = \frac{\pi}{18} - \frac{k\pi}{3}, k \in Z,$$

因为 $m > 0$ ，所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{18}$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查三角函数的变换以及三角函数的性质，属于基础题。

2、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，结合余弦函数的单调性与对称性逐项判断即可。

【详解】

由图象可得，函数的周期 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ 。

将点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$ 代入 $f(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ 中，得 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $\varphi = 2k\pi - \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，由

$0 < \varphi \leq \pi$ ，可得 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ，所以 $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$ 。

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，

故函数 $y = f(x)$ 在 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12} \right] (k \in \mathbb{Z})$ 上单调递减，

当 $k = -1$ 时，函数 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{17}{12}\pi, -\frac{11}{12}\pi \right]$ 上单调递减，故 A 正确；

令 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $k\pi - \frac{11\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，

故函数 $y = f(x)$ 在 $\left[k\pi - \frac{11\pi}{12}, k\pi - \frac{5\pi}{12} \right] (k \in \mathbb{Z})$ 上单调递增。

当 $k = 2$ 时，函数 $y = f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right]$ 上单调递增，故 B 错误；

令 $2x + \frac{5\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，故函数 $y = f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0 \right) (k \in \mathbb{Z})$ ，故 C

正确；

令 $2x + \frac{5\pi}{6} = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 故函数 $y = f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 故 D 正确.

故选: B.

【点睛】

本题考查由图象求余弦型函数的解析式, 同时也考查了余弦型函数的单调性与对称性的判断, 考查推理能力与计算能力, 属于中等问题.

3、A

【解析】

根据复数乘除运算法则, 即可求解.

【详解】

$$\frac{2+3i}{(1-2i)i} = \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查复数代数运算, 属于基础题.

4、B

【解析】

由题意, 结合集合 A, B , 求得集合 M , 得到集合 M 中元素的个数, 即可求解, 得到答案.

【详解】

由题意, 集合 $A = \{-2, -1, 1\}, B = \{4, 6, 8\}$, $x \in A$,

则 $M = \{x \mid x = a + b, x \in A, b \in B, x \in B\} = \{4, 6\}$,

所以集合 M 的真子集的个数为 $2^2 - 1 = 3$ 个, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查了集合的运算和集合中真子集的个数个数的求解, 其中作出集合的运算, 得到集合 M , 再由真子集个数的公式 $2^n - 1$ 作出计算是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力.

5、B

【解析】

由 $f(1) = \frac{1}{9}$ 得 $a^2 = \frac{1}{9}$,

$\therefore a = \frac{1}{3}$ 或 $a = -\frac{1}{3}$ (舍),

即 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|2x-4|}$. 由于 $y = |2x-4|$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 故选 B.

6、D

【解析】

根据复数的四则运算法则先求出复数 z , 再计算它的模长.

【详解】

解: 复数 $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$;

$$\because 2z - \bar{z} = 3 + 12i,$$

$$\therefore 2(a + bi) - (a - bi) = 3 + 12i,$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a - a = 3 \\ 2b + b = 12 \end{cases},$$

解得 $a = 3$, $b = 4$,

$$\therefore z = 3 + 4i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

故选 D.

【点睛】

本题主要考查了复数的计算问题, 要求熟练掌握复数的四则运算以及复数长度的计算公式, 是基础题.

7、A

【解析】

设点 P 的坐标为 (m, n) , 代入椭圆方程可得 $b^2 m^2 - a^2 n^2 = a^2 b^2$, 然后分别求出点 P 到两条渐近线的距离, 由距离之积为 $\frac{1}{4}c^2$, 并结合 $b^2 m^2 - a^2 n^2 = a^2 b^2$, 可得到 a, b, c 的齐次方程, 进而可求出离心率的值.

【详解】

设点 P 的坐标为 (m, n) , 有 $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1$, 得 $b^2 m^2 - a^2 n^2 = a^2 b^2$.

双曲线的两条渐近线方程为 $bx - ay = 0$ 和 $bx + ay = 0$, 则点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为

$$\frac{|bm - an|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \frac{|bm + an|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2 m^2 - a^2 n^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

所以 $\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$, 则 $4a^2(c^2 - a^2) = c^4$, 即 $(c^2 - 2a^2)^2 = 0$, 故 $c^2 - 2a^2 = 0$, 即 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$, 所以 $e = \sqrt{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率，构造 a, b, c 的齐次方程是解决本题的关键，属于中档题.

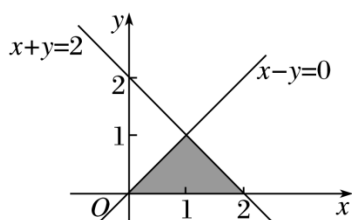
8、D

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

作出不等式组表示的平面区域如下图所示阴影部分所示，



$z = 2x + y$ 等价于 $y = -2x + z$ ，作直线 $y = -2x$ ，向上平移，

易知当直线经过点 $(2, 0)$ 时 z 最大，所以 $z_{\max} = 2 \times 2 + 0 = 4$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

9、C

【解析】

首先求出等差数列的首项和公差，然后写出数列即可观察到满足 $a_i + a_j = 0$ 的 i 的取值集合.

【详解】

设公差为 d ，由题知 $a_4 = -3 \Rightarrow a_1 + 3d = -3$ ，

$$S_{12} = 24 \Rightarrow 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d = 24,$$

解得 $a_1 = -9$ ， $d = 2$ ，

所以数列为 $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ ，

故 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

故选：C.

【点睛】

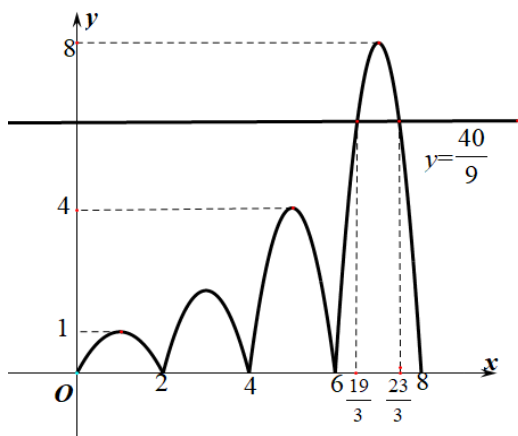
本题主要考查了等差数列的基本量的求解，属于基础题.

10、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式，作出函数图象，数形结合即可得到答案.

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x-2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x-2n) = -2^n(x-2n)(x-2n-2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x-6)(x-8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x-6)(x-8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

11、B

【解析】

建立平面直角坐标系, 将已知条件转化为所设未知量的关系式, 再将 $\left| \vec{a} - \vec{b} \right|$ 的最小值转化为用该关系式表达的算式, 利用基本不等式求得最小值.

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示, 设 $\vec{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 且 $A(m, 0)$, $B(0, n)$, 由于

$$\left| \vec{a} - \vec{c} \right| = \left| \vec{b} - \vec{c} \right| = 5, \text{ 所以 } m, n \in [4, 6].$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (m - \cos \theta, -\sin \theta), \vec{b} - \vec{c} = (-\cos \theta, n - \sin \theta). \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 25 \\ n^2 - 2n \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 25 \end{cases}, \text{ 即 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976141131235010113>