

专题 01 绝对值中的四类最值模型

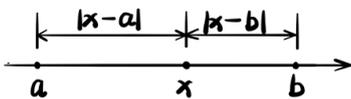
最值问题一直都是初中数学中的最难点，但也是高分的必须突破点，而绝对值中的最值模型是初中学生第一次接触最值类问题，该类最值模型解题的主要依据是绝对值的几何意义或代数意义。本专题就绝对值中的四种最值模型进行梳理及对应试题分析，方便大家掌握。

绝对值的性质：①正数的绝对值是它本身，即 $|a| = a$ ；②0的绝对值是0，即 $|0| = 0$ ；③负数的绝对值是它的相反数，即 $|a| = -a$ ；④绝对值具有非负性，即 $|a| \geq 0$ 。

模型 1. $|x-a|+|x-b|$ 的最小值模型

【模型解读】式子 $|x-a|+|x-b|$ 在 $a \leq x \leq b$ 时，取得最小值为 $|a-b|$ 。

【最值原理】 $|x-a|+|x-b|$ 目的是在数轴上找一点 x ，使 x 到 a 和 b 的距离和的最小值：

分类情况（ x 的取值范围）	图示	$ x-a + x-b $ 取值情况
当 $x < a$ 时		无法确定
当 $a \leq x \leq b$ 时		$ x-a + x-b $ 的值为定值，即为 $ a-b $
当 $x > b$ 时		无法确定

另解：也可用绝对值的代数意义（即分类讨论思想）完成绝对值的最值问题。

例 1. (2023·广东七年级期中) 阅读下面材料：数轴是数形结合思想的产物。有了数轴以后，可以用数轴上的点直观地表示实数，这样就建立起了“数”与“形”之间的联系。在数轴上，若点 A ， B 分别表示数 a ， b ，则 A ， B 两点之间的距离为 $AB = |a-b|$ 。反之，可以理解式子 $|x-3|$ 的几何意义是数轴上表示实数 x 与实数3两点之间的距离。则当 $|x+2|+|x-5|$ 有最小值时， x 的取值范围是（ ）

- A. $x < -2$ 或 $x > 5$ B. $x \leq -2$ 或 $x \geq 5$ C. $-2 < x < 5$ D. $-2 \leq x \leq 5$

例 2. (2022·江苏·七年级期中) 我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，数形结合是解决数学问题的重要思想方法。例如，代数式 $|x-2|$ 的几何意义是数轴上 x

专题 01 绝对值中的四类最值模型

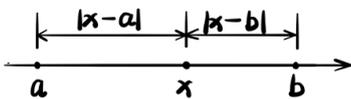
最值问题一直都是初中数学中的最难点，但也是高分的必须突破点，而绝对值中的最值模型是初中学生第一次接触最值类问题，该类最值模型解题的主要依据是绝对值的几何意义或代数意义。本专题就绝对值中的四种最值模型进行梳理及对应试题分析，方便大家掌握。

绝对值的性质：①正数的绝对值是它本身，即 $|a|=a$ ；②0的绝对值是0，即 $|0|=0$ ；③负数的绝对值是它的相反数，即 $|a|=-a$ ；④绝对值具有非负性，即 $|a|\geq 0$ 。

模型 1. $|x-a|+|x-b|$ 的最小值模型

【模型解读】式子 $|x-a|+|x-b|$ 在 $a\leq x\leq b$ 时，取得最小值为 $|a-b|$ 。

【最值原理】 $|x-a|+|x-b|$ 目的是在数轴上找一点 x ，使 x 到 a 和 b 的距离和的最小值：

分类情况（ x 的取值范围）	图示	$ x-a + x-b $ 取值情况
当 $x < a$ 时		无法确定
当 $a \leq x \leq b$ 时		$ x-a + x-b $ 的值为定值，即为 $ a-b $
当 $x > b$ 时		无法确定

另解：也可用绝对值的代数意义（即分类讨论思想）完成绝对值的最值问题。

例 1. (2023·广东七年级期中) 阅读下面材料：数轴是数形结合思想的产物。有了数轴以后，可以用数轴上的点直观地表示实数，这样就建立起了“数”与“形”之间的联系。在数轴上，若点 A ， B 分别表示数 a ， b ，则 A ， B 两点之间的距离为 $AB=|a-b|$ 。反之，可以理解式子 $|x-3|$ 的几何意义是数轴上表示实数 x 与实数3两点之间的距离。则当 $|x+2|+|x-5|$ 有最小值时， x 的取值范围是（ ）

- A. $x < -2$ 或 $x > 5$ B. $x \leq -2$ 或 $x \geq 5$ C. $-2 < x < 5$ D. $-2 \leq x \leq 5$

例 2. (2022·江苏·七年级期中) 我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，数形结合是解决数学问题的重要思想方法。例如，代数式 $|x-2|$ 的几何意义是数轴上 x

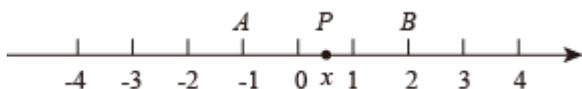
所对应的点与 2 所对应的点之间的距离：因为 $|x+1|=|x-(-1)|$ ，所以 $|x+1|$ 的几何意义就是数轴上 x 所对应的点与 -1 所对应的点之间的距离。（i）发现问题：代数式 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值是多少？

（ii）探究问题：如图，点 A 、 B 、 P 分别表示数 -1 、 2 、 x ， $AB=3$

$\therefore |x+1|+|x-2|$ 的几何意义是线段 PA 与 PB 的长度之和，

\therefore 当点 P 在线段 AB 上时， $PA+PB=3$ ，当点 P 在点 A 的左侧或点 B 的右侧时， $PA+PB>3$

$\therefore |x+1|+|x-2|$ 的最小值是 3



请你根据上述自学材料，探究解决下列问题：

(1) $|x-3|+|x+2|$ 的最小值是_____；(2) 利用上述思想方法解不等式： $|x+3|+|x-1|>4$ ；

(3) 当 a 为何值时，代数式 $|x+a|+|x-4|$ 的最小值是 2

变式 1.（2022·浙江·七年级专题练习）阅读下面的材料：

点 A 、 B 在数轴上分别表示实数 a 、 b ， A 、 B 两点之间的距离表示为 $|AB|$ ，当 A 、 B 两点中有一点在原点时，不妨设点 A 在原点，如图 1， $|AB|=|OB|=|b|=|a-b|$ ；当 A 、 B 两点都不在原点时：



图 1

图 2

图 3

图 4

①如图 2，点 A 、 B 都在原点的右边： $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|$ ；

②如图 3，点 A 、 B 都在原点的左边： $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=-b-(-a)=|a-b|$ ；

③如图 4，点 A 、 B 在原点的两边： $|AB|=|OA|+|OB|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$ ，

综上，数轴上 A 、 B 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$ 。

回答下列问题：(1) 数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是_____，数轴上表示 -2 和 -5 的两点之间的距离是_____，数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是_____；

(2)数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是_____，如果 $|AB|=2$ ，那么 x 为_____。

(3)当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是_____。

变式 2. (2022 秋·河南郑州·七年级统考阶段练习)【探究问题】点 A 、 B 在数轴上分别表示有理数 x_1 、 x_2 ，

A 、 B 两点之间的距离表示为 AB ，在数轴上 A 、 B 两点之间的距离 $AB=|x_1-x_2|$ 或 $AB=|x_2-x_1|$ ；利用数形

结合思想解决探究问题：

【方法感悟】如图 1，从数轴上看，若点 A 、 B 表示的数分别是 1 、 4 ，则 $AB=|4-1|=3$ 或 $AB=|1-4|=3$ ；

若点 A 、 B 表示的数分别是 -1 、 4 ，则 $AB=|4-(-1)|=|4+1|=5$ 或 $AB=|-1-4|=|-5|=5$ ；

若点 A 、 B 表示的数分别是 -1 、 -4 ，则 $AB=|-1-(-4)|=|-1+4|=3$ 或 $AB=|-4-(-1)|=|-4+1|=3$ 。

【归纳】若点 A 、 B 表示的数分别是 x_1 、 x_2 ，则 $AB=|x_1-x_2|$ 或 $AB=|x_2-x_1|$ ；

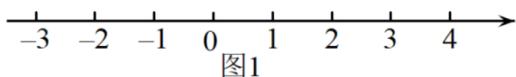


图1

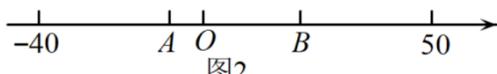


图2

【知识迁移】(1)点 A 、 B 表示的数分别是 -2.5 、 b ，且 $AB=3$ ，则 $b=$ _____；

(2)如图 2，若点 A 、 B 表示的数分别是 x_1 、 x_2 ，令 $AB=n$ ，若把线段 AB 向左平移 n 个单位，则点 A 与 -40

重合；若把线段 AB 向右平移 n 个单位，则点 B 与 50 重合，那么 $x_1=$ _____， $x_2=$ _____；

(3)利用数轴求出 $|x+3|+|x-4|$ 的最小值为_____，此时 x 可取哪些整数_____。

模型 2. $|x-a|-|x-b|$ 的最小值和最大值模型

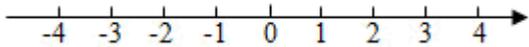
【模型解读】式子 $|x-a|-|x-b|$ 在 $x \leq a$ 时，取得最小值为 $-|a-b|$ ；在 $x \geq b$ 时，取得最大值 $|a-b|$ 。

【最值原理】 $|x-a|-|x-b|$ 目的是在数轴上找一点 x ，使 x 到 a 和 b 的距离差的最大值和最小值：

分类情况 (x 的取值范围)	图示	$ x-a - x-b $ 取值情况
当 $x < a$ 时		$ x-a - x-b $ 的值为定值，即为 $- a-b $
当 $a \leq x \leq b$ 时		$- a-b \leq x-a - x-b \leq a-b $
当 $x > b$ 时		$ x-a - x-b $ 的值为定值，即为 $ a-b $

例 1. (2022·福建泉州·七年级校考期中)若代数式 $|x-1|-|x+2|$ 的最大值为 a ，最小值为 b ，则 ab 的值_____.

例 2. (2022·重庆·七年级期末)数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$. 数轴上表示数 a 的点与表示数 b 的点的距离记作 $|a-b|$ ，如 $|3-5|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 5 的点的距离， $|3+5|=|3-(-5)|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 -5 的点的距离， $|a-3|$ 表示数轴上表示数 a 的点与表示数 3 的点的距离.



根据以上材料回答下列问题：(将结果直接填写在答题卡相应位置，不写过程)

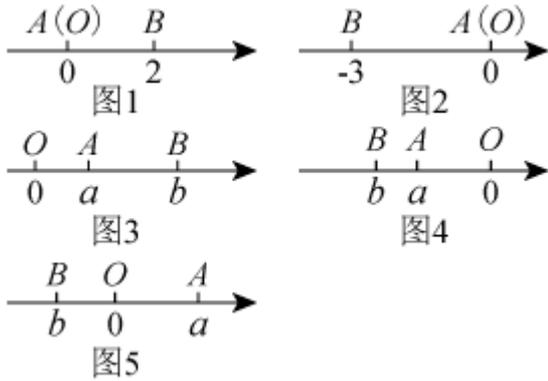
(1) 若 $|x-2|=|x+2|$ ，则 $x=_____$ ，若 $|x-3|=|x+1|$ ，则 $x=_____$ ；

(2) 若 $|x-3|+|x+1|=4$ ，则 x 能取到的最小值是_____；最大值是_____；

(3) 若 $|x-3|-|x+1|=4$ ，则 x 能取到的最大值是_____；(4) 关于 x 的式子 $|x-2|+|x+1|$ 的取值范围是_____.

变式 1. (2022·陕西西安·七年级校考期中)点 A 、 B 在数轴上分别表示有理数 a 、 b ，则在数轴上 A 、 B 两点之间的距离为 $AB=|a-b|$ ，利用数轴上两点间距离，可以得到 $|x+1|-|x-3|$ 的最大值是_____.

变式 2. (2022 秋·山东青岛·七年级校考阶段练习) 我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，数形结合是解决数学问题的重要思想方法. 我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点到原点的距离，也就是说 $|x|$ 表示在数轴上数 x 与数 0 对应点之间的距离.



提出问题: 有理数 a, b 在数轴上对应的点分别记为点 A 和点 B , AB 两点之间的距离记为 $|AB|$, 那么 $|AB|$ 与有理数 a, b 有怎样的关系?

探究问题: 探究一: 如果 A, B 两点中有一点在原点, 不妨假设 A 点在原点, 即 $a=0$.

当 $b=2$ 时, $|AB|=|2|=2$, 如图 1 所示; 当 $b=-3$ 时, $|AB|=|-3|=3$, 如图 2 所示;

由此可以推断当 $b=n$ 时, $|AB|=$ _____.

探究二: 如果 A, B 两点都不在原点, 即 $a \neq 0, b \neq 0$.

(1) 当 A, B 两点都在原点的右侧时, 如图 3 所示: $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=-(a-b)=|a-b|$;

(2) 当 A, B 两点都在原点的左侧时, 如图 4 所示: $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=$ _____ $=|a-b|$;

(3) 当 A, B 两点在原点的两侧时, 如图 5 所示, 请你仿照上述探究过程, 写出 A, B 两点之间的距离 $|AB|=$ _____.

解决问题: 有理数 a, b 在数轴上对应的点分别记为点 A 和点 B , AB 两点之间的距离记为 $|AB|$, 那么 $|AB|=$ _____. (用含有 a, b 的式子表示)

实际应用: (1) 数轴上, 表示有理数 -6 和 -1 的两点之间的距离是_____;

(2) 数轴上, 表示 x 和 2 的两点 P 和 Q 之间的距离是 5 , 则 $x=$ _____.

拓展延伸: 结合数轴回答下列问题: (1) $|x+3|+|x-1|$ 的最小值是_____; (2) $|x+4|-|x-5|$ 的最大值是_____.

变式 3. (2022·湖北武汉·七年级期中) 我们知道, $|a|$ 的几何意义是数轴上表示数 a 的点与原点的距离, 一般地, 点 A, B 在数轴上分别表示数 a, b , 那么 A, B 之间的距离可表示为 $|a-b|$, 请根据绝对值的几何意义并结合数轴解答下列问题:

(1) 数轴上的数 x 与 1 所对应的点的距离为____, 数 x 与 -1 所对应的点的距离为____; (2) 求 $|x+1|-|x-1|$ 的最大值; (3) 直接写出 $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|-|x-1|-|x-2|-|x-3|-|x-4|$ 的最大值为_____.

模型 3. $|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_{n-1}|+|x-a_n|$ 的最小值模型

【模型解读及原理】

①当两个绝对值相加: 若已知 $a < b$, $|x-a|+|x-b|$ 的最小值为 $b-a$, 且数 x 的点在数 a, b 的点的中间;

②当三个绝对值相加: 若已知 $a < b < c$, $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值为 $c-a$, 且此时 $x=b$;

③当有 $2n+1$ (奇数) 个绝对值相加:

$|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_{2n}|+|x-a_{2n+1}|$ 且 $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}$, 则 x 取中间数, 即 $x=a_{n+1}$ 时,

$|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_{2n}|+|x-a_{2n+1}|$ 取得最小值 $(a_{2n+1}-a_1)+(a_{2n}-a_2)+\dots+(a_{n+2}-a_n)+0$;

④当有 $2n$ (偶数) 个绝对值相加:

$|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_{2n-1}|+|x-a_{2n}|$, 且 $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-1} < a_{2n}$,

则 x 取中间段, 即当 $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ 时, $|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_{2n-1}|+|x-a_{2n}|$ 取得最小值为:

$(a_{2n}-a_1)+(a_{2n-1}-a_2)+\dots+(a_{n-2}-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)$ 。

例 1. (2022·天津初一月考) 若 x 是有理数, 则 $|x-2|+|x-4|+|x-6|+|x-8|+\dots+|x-2018|$ 的最小值是_____.

例 2. (2022 秋·浙江杭州·七年级校联考阶段练习) 【方法感悟】阅读下面材料:

点 A, B 在数轴上分别表示实数 a, b , A, B 两点之间的距离表示为 $|AB|$. 如图 1, 从数轴上看, 若点 A, B

表示的分别是 1, 4 则 $|AB|=|4-1|=3$ 或 $|AB|=|1-4|=3$;

若点 A, B 表示的数分别是 -1, 4 则 $|AB|=|4-(-1)|=4+1=5$ 或 $|AB|=|-1-4|=|-5|=5$;

若点 A, B 表示的数分别是 -1, -4, 则 $|AB|=|(-1)-(-4)|=|-1+4|=3$ 或 $|AB|=|-4-(-1)|=|-4+1|=3$.

【归纳】 若点 A, B 表示的数分别是 x_1, x_2 则 $|AB|=|x_1-x_2|$ 或 $|AB|=|x_2-x_1|$.

【知识迁移】 (1)如图 1, 点 A, B 表示的数分别是 -4.5, b 且 $|AB|=3$, 则 $b=$ _____;

(2)如图 2, 点 A, B 表示的数分别是 x_1, x_2 , 若把 AB 向左平移 $|AB|$ 个单位, 则点 A 与 -50 重合, 若把 AB 向右平移 $|AB|$ 个单位, 则点 B 与 70 重合, 那么 $x_1=$ _____, $x_2=$ _____;

【拓展应用】 (3)一天, 美羊羊去问村长爷爷的年龄, 村长爷爷说: “我若是你现在这么大, 你还要 40 年才出生呢, 你若是我现在这么大, 我已经是老寿星了, 116 岁了, 哈哈!” 美羊羊纳闷, 请问村长爷爷现在到底是多少岁? 美羊羊现在又是几岁? 请写出解题思路.

(4)结合几何意义, 求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$ 最小值.

变式 1. (2022 秋·陕西西安·七年级校考阶段练习) 数学探究

点 A, B 在数轴上分别表示有理数 a, b , A, B 两点之间的距离表示为 AB , 在数轴上 A, B 两点之间的距离 $AB=|a-b|$.

利用数形结合思想回答下列问题: (1)数轴上表示 2 和 7 两点之间的距离是_____;

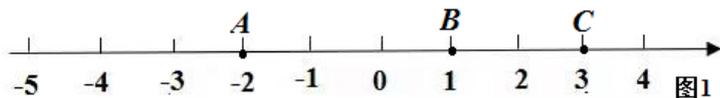
(2)数轴上有理数 x 与有理数 -7 所对应两点之间的距离用绝对值符号可以表示为_____;

(3)若 x 表示一个有理数, 且 $|x+1|+|x-3| \geq 4$, 则有理数 x 的取值范围是_____;

(4)若 x 表示一个有理数, 则 $|x-3|+|x+2|+|x-1|$ 有最_____值为_____, 此时 $x=$ _____.

变式 2. (2022 秋·浙江·七年级专题练习) 已知数轴上两个点之间的距离等于这两个点表示的数的差的绝对值. 如图 1, 在数轴上点 A 表示的数为 -2, 点 B 表示的数为 1, 点 C 表示的数为 3, 则 B, C 之间的距离表示为: $BC=|3-1|$, A, C 之间的距离表示为: $AC=|3-(-2)|=|3+2|$.

若点 P 在数轴上表示的数为 x , 则 P, A 之间的距离表示为: $PA=|x-(-2)|=|x+2|$, P, B 之间的距离表示为: $PB=|x-1|$.



- (1) 如图 1, ①若点 P 在点 A 左侧, 化简 $|x+2|+|x-1|$ = _____;
- ②若点 P 在线段 AB 上, 化简 $|x+2|+|x-1|$ = _____; ③若点 P 在点 B 右侧, 化简 $|x+2|+|x-1|$ = _____;
- ④由图可知, $|x+2|+|x-1|$ 的最小值是_____.

(2) 请按照 (1) 问的方法思考: $|x+3|+|x-1|+|x-2|$ 的最小值是_____.

(3) 如图 2, 在一条笔直的街道上有 E, F, G, H 四个小区, 且相邻两个小区之间的距离均为 200m. 已知 E, F, G, H 四个小区各有 2 个, 2 个, 3 个, 1 个小朋友在同一所小学的同一年级上学, 安全起见, 这 8 个小朋友约定先在街道上某处汇合, 再一起去学校. 聪明的小朋友们通过分析, 发现在街道上的 M 处汇合会使所有小朋友从小区门口到汇合地点的路程之和最小, 请直接写出汇合地点 M 的位置和所有小朋友从小区门口到汇合地点的路程之和的最小值.



变式 3. (2022 秋·浙江·七年级校联考阶段练习) 我们知道, $|a|$ 可以理解为 $|a-0|$, 它表示: 数轴上表示数 a 的点到原点的距离, 这是绝对值的几何意义. 进一步地, 数轴上的两个点 A, B , 分别用数 a, b 表示, 那么 A, B 两点之间的距离为 $AB=|a-b|$, 反过来, 式子 $|a-b|$ 的几何意义是: 数轴上表示数 a 的点和表示数 b 的点之间的距离. 利用此结论, 回答以下问题: (一) 数轴上表示数 -8 的点和表示数 3 的点之间的距离是_____. (二) 数轴上点 A 用数 a 表示, (1) 若 $|a-3|=5$, 那么 a 的值是_____. (2) 当 $|a+2|+|a-3|=5$ 时, 这样的整数 a 有_____个. (3) $|a-3|+|a+2022|$ 最小值是_____. (4) $3|a-3|+|a+2022|+|a+3|$ 最小值是_____. (5) $|3a+3|+|a+4|+|4a-8|$ 最小值是_____.

模型 4. 绝对值的最值的其他应用

例 1. (2023·重庆沙坪坝·校考一模) 在多项式 $a+b-m-n-e$ 中, 除首尾项 $a, -e$ 外, 其余各项都可闪退, 闪退项的前面部分和其后面部分都加上绝对值, 并用减号连接, 则称此为“闪减操作”. 每种“闪减操作”可以闪退的项数分别为一项, 两项, 三项. “闪减操作”只针对多项式 $a+b-m-n-e$ 进行. 例如: $+b$

“闪减操作”为 $|a| - |-m - n - e|$ ， $-m$ 与 $-n$ 同时“闪减操作”为 $|a + b| - |-e|$ ，...，下列说法：

- ①存在对两种不同的“闪减操作”后的式子作差，结果不含与 e 相关的项；
- ②若每种操作只闪退一项，则对三种不同“闪减操作”的结果进行去绝对值，共有8种不同的结果；
- ③若可以闪退的三项 $+b$ ， $-m$ ， $-n$ 满足：

$$(|+b| + |+b+2|)(|-m+1| + |-m+4|)(|-n+1| + |-n-6|) = 42, \text{ 则 } 2b+m+n \text{ 的最小值为 } -9.$$

其中正确的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

变式 1. (2022 秋·湖南郴州·七年级校联考期末) 对于有理数 x, y, a, t ，若 $|x-a| + |y-a| = t$ ，则称 x 和 y 关于 a 的“美好关联数”为 t ，例如，则 $|2-1| + |3-1| = 3$ ，则 2 和 3 关于 1 的“美好关联数”为 3.

(1) -3 和 5 关于 2 的“美好关联数”为_____；(2) 若 x 和 2 关于 3 的“美好关联数”为 4，求 x 的值；

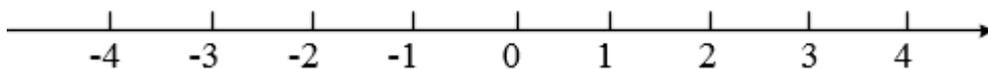
(3) 若 x_0 和 x_1 关于 1 的“美好关联数”为 1， x_1 和 x_2 关于 2 的“美好关联数”为 1， x_2 和 x_3 关于 3 的“美好关联数”为 1，...， x_{40} 和 x_{41} 的“美好关联数”为 1，... ① $x_0 + x_1$ 的最小值为_____；② $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{40}$ 的值为_____.

变式 2. (2022·重庆渝北·七年级校考期中) 阅读下列材料：一般地，我们把按一定顺序排列的三个数 x_1, x_2, x_3 ，叫做数列 x_1, x_2, x_3 ，计算： $|x_1|, \frac{|x_1+x_2|}{2}, \frac{|x_1+x_2+x_3|}{3}$ ，我们把计算结果的最小值称为数列 x_1, x_2, x_3 的价值. 例如，对于数列 2, -1, 3，因为 $|2|=2, \frac{|2+(-1)|}{2} = \frac{1}{2}, \frac{|2+(-1)+3|}{3} = \frac{4}{3}$. 所以数列 2, -1, 3 的价值为 $\frac{1}{2}$ ，改变这三个数的顺序按照上述方法可计算出其它数列的价值. 比如，数列 -1, 2, 3 的价值为 $\frac{1}{2}$ ；数列 3, -1, 2 的价值为 1，通过计算，发现：对于“2, -1, 3”这三个数，按照不同的排列顺序可得到不同的数列，这些数列的价值的最小值为 $\frac{1}{2}$.

根据以上材料，解答下列问题：(1) 求数列 -2, 7, 1 的价值；(2) 由“-2, 7, 1”这三个数按照不同的顺序排列共有多少种不同的数列，写出这些数列，并求出它们的价值的最小值和最大值；(3) 将 2, -7, a ($a > 1$) 这三个数按照不同的顺序排列，可得到若干个数列. 若这些数列的价值的最小值为 1，请直接写出 a 的值.

变式 3. (2022 秋·成都市七年级专题练习) 数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作

$|a|$. 数轴上表示数 a 的点与表示数 b 的点距离记作 $|a-b|$, 如 $|3-5|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 5 的点的距离, $|3+5|=|3-(-5)|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 -5 的点的距离, $|a-3|$ 表示数轴上表示数 a 的点与表示数 3 的点的距离.



根据以上材料回答下列问题:

(1) 若 $|x-1|=|x+1|$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$. 若 $|x+4|+|x+1|=5$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $|x-1|+|x+3|=4$, 则 x 能取到的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 当 $(|x-2|+|x+1|)(|y+1|+|y-2|)(|z-3|+|z+1|)=36$, 求 $x+2y+3z$ 的最大值和最小值.

1. (2023 秋·贵州铜仁·七年级统考期末) 在解决数学实际问题时, 常常用到数形结合思想, 比如: $|x+2|$ 的几何意义是数轴上表示数 x 的点与表示数 -2 的点的距离, $|x-3|$ 的几何意义是数轴上表示数 x 的点与表示数 3 的点的距离. 当 $|x+2|+|x-3|$ 取得最小值时, x 的取值范围是 ()

- A. $x \leq -2$ B. $-2 \leq x \leq 3$ C. $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$ D. $x \geq 3$

2. (2022 秋·广西·七年级期末) 对于有理数 a, b, n , 若 $|a-n|+|b-n|=1$, 则称 b 是 a 关于 n 的“相关数”, 例如, $|2-2|+|3-2|=1$, 则 3 是 2 关于 2 的“相关数”. 若 x_1 是 x 关于 1 的“相关数”, x_2 是 x_1 关于 2 的“相关数”, ..., x_4 是 x_3 关于 4 的“相关数”. 则 $x_1+x_2+x_3=$ _____. (用含 x 的式子表示)

3. (2022·湖北十堰·七年级期中) 设 $-1 \leq x \leq 3$, 则 $|x-3| - \frac{1}{2}|x|+|x+2|$ 的最大值与最小值之和为__.

4. (2023 秋·陕西西安·七年级校考期末) 实数 a, b 满足 $|a+1|+|2-a|=8-|b+3|-|b+8|$, 则 $a+b$ 的最小值为_____.

5. (2023 春·黑龙江哈尔滨·七年级校考阶段练习) 同学们都知道, $|5-1|$ 表示 5 与 1 差的绝对值, 也可以表示数轴上 5 和 1 这两点间的距离; $|3-(-2)|$ 表示 3 与 -2 之差的绝对值, 实际上也可理解为 3 与 -2 在数轴上所对的两点之间的距离; 自然地, 对 $|3-(-2)|$ 进行变式得 $|3+2|$, 同样可以表示 3 与 -2 两数在数轴上所对的两点之间的距离. 试探索:

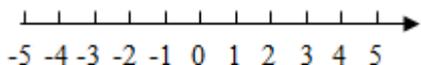
(1) $|3-(-2)|=$ _____ ; (2) $|x-2|$ 表示 x 与_____ 之间的距离; $|x+3|$ 表示 x 与_____ 之间的距离;

(3) 当 $|x-2|+|x+3|=5$ 时, x 可取整数_____ . (写出一个符合条件的整数 x 即可)

(4) 由以上探索, 结合数轴猜想: 对于任何有理数 x , $|x+4|+|x-6|$ 的最小值为_____ .

6. (2022 秋·浙江·七年级专题练习) 同学们都知道, $|5-(-2)|$ 表示 5 与 -2 之差的绝对值, 实际上也可理解为 5 与 -2 两数在数轴上所对的两点之间的距离. 试探索: (1) 计算 $|5-(-2)|=$ _____ ; (2) 使得 $|x-1|+|x+5|=6$ 这样的整数有_____ (写出所有符合条件的整数); (3) 由以上探索猜想对于任何有理数 x , 式子 $|x-2|+|x+3.5|$ 是否有最小值? 如果有, 请写出其最小值, 如果没有, 请说明理由.

7. (2022 秋·浙江·七年级专题练习) 结合数轴与绝对值的知识回答下列问题:



- (1) 数轴上表示 4 和 1 的两点之间的距离是 _____；表示 -3 和 2 两点之间的距离是 _____；一般地，数轴上表示数 m 和数 n 的两点之间的距离等于 $|m-n|$ 。如果表示数 a 和 -2 的两点之间的距离是 3，那么 $a =$ _____；
- (2) 若数轴上表示数 a 的点位于 -4 与 2 之间，求 $|a+4|+|a-2|$ 的值；
- (3) 当 a 取何值时， $|a+5|+|a-1|+|a-4|$ 的值最小，最小值是多少？请说明理由。

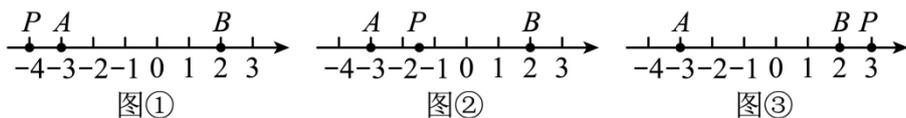
8. (2022 秋·湖北武汉·七年级校考阶段练习) (1) 阅读材料：从代数角度上看，数轴上两点间的距离等于这两点所对应的数的差的绝对值；从几何角度上看，数轴上两点间的距离等于以这两点为端点组成的线段的长度。例如：点 A 、 B 在数轴上分别对应的数为 a 、 b ，则 A 、 B 两点间的距离可表示为 $|a-b|=AB$ 。(完成下面填空)

I. 数轴上有三点 A 、 B 、 P ，分别对应的数为 -3、2、 x ，

如图①，当 $x \leq -3$ 时， $|x+3|+|x-2|=PA+PB=PA+PA+AB=2PA+AB=2PA+5$ ；

如图②，当 $-3 \leq x \leq 2$ 时， $|x+3|+|x-2|=PA+PB=$ _____ $=5$ ；

如图③，当 $x \geq 2$ 时， $|x+3|+|x-2|=PA+PB=PB+AB+PB=$ _____ $+AB=2PB+5$ ；



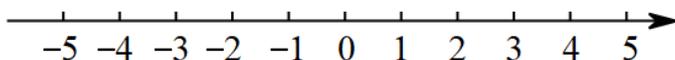
II. 由 I 可得： $\because PA \geq 0, PB \geq 0$ ，

$\therefore 2PA+5 \geq 5, 2PB+5 \geq 5, \therefore |x+3|+|x-2|$ 在 $-3 \leq x \leq 2$ 时有最小值为 _____。

(2) 直接应用：求 $|x-4|+|x+5|$ 的最小值。

(3) 应用拓展：若 $S=|x-1|+|x+2|+|x-6|$ ，当 $-2 \leq x \leq 6$ 时，直接写出 S 的取值范围 _____。

. (2022 秋·浙江温州·七年级校考阶段练习) 数形结合是数学解题中的一种重要思想, 利用数轴可以将数与形完美结合. 一般地, 数轴上表示数 m, n 的两点之间的距离等于 $|m-n|$, 如: 数轴上表示 4 和 -1 的两点之间的距离是 $|4-(-1)|=5$, 根据以上材料, 结合数轴与绝对值的知识回答下列问题:



(1) 若数轴上表示数 x 的点位于表示 -2 与 5 的点之间, 求 $|x+2|+|x-5|$ 的值.

(2) 若 P 是数轴上一点, 它表示数 p , 若 $|p+2|+|p-1|+|p-5| \geq a$ 对任意的有理数 p 都成立, 求 a 的最大值.

10. (2022·湖南·长沙市怡海中学七年级阶段练习) 如图 1, 点 A, B, C 是数轴上从左到右排列的三个点, 分别对应的数为 -5, $b, 4$. 某同学将刻度尺如图 2 放置, 使刻度尺上的数字 0 对齐数轴上的点 A , 发现点 B 对齐刻度 1.8cm, 点 C 对齐刻度 5.4cm.

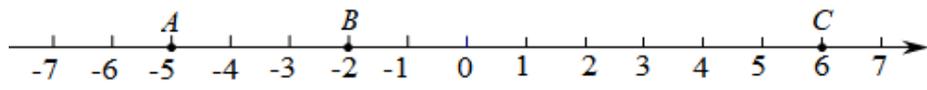
(1) 求数轴上点 B 所对应的数 b ;

(2) 点 P 是图 1 数轴上一点, P 到 A 的距离是到 B 的距离的两倍, 求点 P 所表示的数;

(3) 若点 Q 在数轴上表示的数为 x , 则 $|x+5|+|x-4|$ 的最小值为 _____, $|x+5|-|x-4|$ 的最大值为 _____.

11. (2022 秋·江苏苏州·七年级校考期中) 同学们都知道, $|5-(-2)|$ 表示 5 与 -2 之差的绝对值, 实际上也可理解为 5 与 -2 两数在数轴上所对的两点之间的距离. 试探索: (1) 求 $|5-(-2)|=$ _____. (2) 找出所有符合条件的整数 x , 使得 $|x+5|+|x-2|=7$ 这样的整数是 _____. (3) 由以上探索猜想对于任何有理数 x , $|x-a+1|+|x-a-6|$ 是否有最小值? 如果有请列式并写出最小值如果没有请说明理由.

12. (2022 秋·重庆·七年级期末) 如图, 请回答问题:



(1)点 B 表示的数是 _____, 点 C 表示的数是 _____.

(2)折叠数轴, 使数轴上的点 B 和点 C 重合, 则点 A 与数字 _____ 重合.

(3) m 、 n 两数在数轴上所对的两点之间的距离可以表示为 $|m - n|$, 如 5 与 -2 两数在数轴上所对的两点之间的距离可以表示为 $|5 - (-2)|$, 从而很容易就得出在数轴上表示 5 与 -2 两点之间的距离是 7.

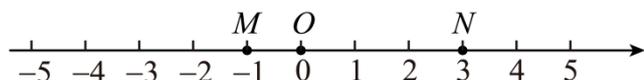
①若 x 表示一个有理数, 则 $|x - 3| + |x - 6|$ 的最小值 = _____.

②若 x 表示一个有理数, 且 $|x - 4| + |x + 3| = 7$, 则满足条件的所有整数 x 的和是 _____.

③当 $x =$ _____ 时, $2|x - 2| + 2|x - 3| + 5|x - 4|$ 取最小值.

④当 x 取何值时, $2|2x - 1| + 3|x - 2| + |x - \frac{5}{2}| + |2x - 7| + |3x - 9|$ 取最小值? 最小值为多少?

13. (2023 秋·江苏扬州·七年级校考期末) 数轴是初中数学的一个重要工具, 利用数轴可以将数与形进行完美地结合. 研究数轴我们发现了很重要的规律, 例如: 数轴上点 M 、点 N 表示的数分别为 m 、 n , 则 M 、 N 两点之间的距离 $MN = |m - n|$, 线段 MN 的中点表示的数为 $\frac{m+n}{2}$. 如图, 数轴上点 M 表示的数为 -1, 点 N 表示的数为 3.



(1)直接写出: 线段 MN 的长度是 _____, 线段 MN 的中点表示的数为 _____;

(2) x 表示数轴上任意一个有理数, 利用数轴探究下列问题,

直接回答: $|x + 1| + |x - 3| = 6$, 则 $x =$ _____; $|x + 1| + |x - 3|$ 有最小值是 _____;

(3)点 S 在数轴上对应的数为 x , 且 x 是方程 $2x - 1 = \frac{7}{6}x + 4$ 的解, 动点 P 在数轴上运动, 若存在某个位置, 使得 $PM + PN = PS$, 则称点 P 是关于点 M 、 N 、 S 的“幸运点”, 请问在数轴上是否存在“幸运点”? 若存在, 则求出所有“幸运点”对应的数; 若不存在, 则说明理由.

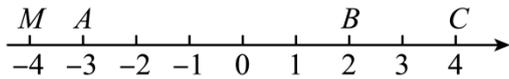
14. (2022 秋·山西朔州·七年级校考阶段练习) 问题提出

(1)点 A , B 在数轴上分别表示实数 a , b , A , B 两点之间的距离可表示为 $AB = |a - b|$.

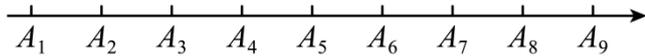
代数式 $|x + 1| + |x - 2|$ 的几何意义是表示有理数 x 的点到表示数 2 的点与表示数 -1

的点的距离之和. 利用几何意义, 可求得 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值为_____.

(2)问题探究: 如图, 点 M, A, B, C 在数轴上分别表示的数为 $-4, -3, 2, 4$, N 是数轴上一动点, 从点 M 出发以每秒 2 个单位长度的速度向右运动, 当点 N 出发_____秒后, 到 A, B, C 三点的距离和最小, 此时点 N 所处位置对应的数字为_____, 此时 N 到 A, B, C 三点的距离之和的最小值为_____.

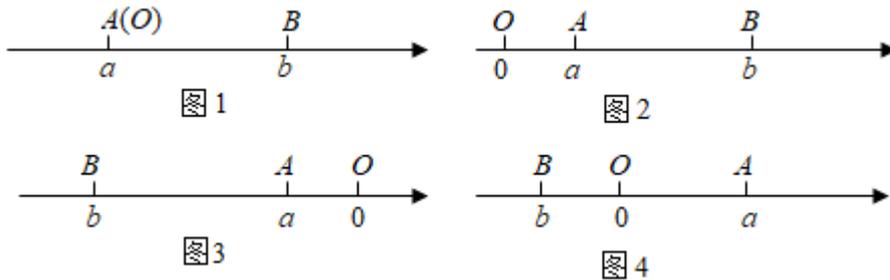


(3)问题解决: 同心抗疫, 情暖居民. 疫情防控期间, 某一直线沿街有 9 个小区, 依次记为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$, 假定相邻两个小区间隔相同, 将这个间隔记为 100 米. 社区想为这 9 个小区的居民提供防疫物资, 决定在路旁建立一个物资供应站 P . 请问点 P 选在何处, 才能使这 9 个小区的居民到点 P (物资供应站) 的距离总和最小? 最小值是多少?



15. (2022 秋·山东·七年级专题练习) 阅读下面材料, 回答问题:

已知点 A, B 在数轴上分别表示有理数 a, b , A, B 两点之间的距离表示为 AB .



(1)若表示数 a 和 -3 的两点之间的距离是 5, 那么 $a =$ _____;

(2)若数轴上表示数 a 的点位于 -1 与 8 之间, 则 $|a+1|+|a-8|$ 的值为_____;

(3)若 x 表示一个有理数, 且 $|x-2|+|x+4|>6$, 求有理数 x 的取值范围;

(4)若未知数 x, y 满足 $(|x-4|+|x+3|)(|y+2|+|y-2|)=28$, 求代数式 $x+y$ 的最小值和最大值.

专题 01 绝对值中的四类最值模型

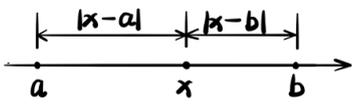
最值问题一直都是初中数学中的最难点，但也是高分的必须突破点，而绝对值中的最值模型是初中学生第一次接触最值类问题，该类最值模型解题的主要依据是绝对值的几何意义或代数意义。本专题就绝对值中的四种最值模型进行梳理及对应试题分析，方便大家掌握。

绝对值的性质：①正数的绝对值是它本身，即 $|a| = a$ ；②0的绝对值是0，即 $|0| = 0$ ；③负数的绝对值是它的相反数，即 $|a| = -a$ ；④绝对值具有非负性，即 $|a| \geq 0$ 。

模型 1. $|x-a|+|x-b|$ 的最小值模型

【模型解读】式子 $|x-a|+|x-b|$ 在 $a \leq x \leq b$ 时，取得最小值为 $|a-b|$ 。

【最值原理】 $|x-a|+|x-b|$ 目的是在数轴上找一点 x ，使 x 到 a 和 b 的距离和的最小值：

分类情况（ x 的取值范围）	图示	$ x-a + x-b $ 取值情况
当 $x < a$ 时		无法确定
当 $a \leq x \leq b$ 时		$ x-a + x-b $ 的值为定值，即为 $ a-b $
当 $x > b$ 时		无法确定

另解：也可用绝对值的代数意义（即分类讨论思想）完成绝对值的最值问题。

例 1.（2023·广东七年级期中）阅读下面材料：数轴是数形结合思想的产物。有了数轴以后，可以用数轴上的点直观地表示实数，这样就建立起了“数”与“形”之间的联系。在数轴上，若点 A ， B 分别表示数 a ， b ，则 A ， B 两点之间的距离为 $AB = |a-b|$ 。反之，可以理解式子 $|x-3|$ 的几何意义是数轴上表示实数 x 与实数3两点之间的距离。则当 $|x+2|+|x-5|$ 有最小值时， x 的取值范围是（ ）

- A. $x < -2$ 或 $x > 5$ B. $x \leq -2$ 或 $x \geq 5$ C. $-2 < x < 5$ D. $-2 \leq x \leq 5$

【答案】D

【分析】根据题意将 $|x+2|+|x-5|$

可以理解为数轴上表示实数 x 与实数 -2 的距离，实数 x 与实数 5 的距离，两者的和，分三种情况分别化简，根据解答即可得到答案.

【解析】方法 1：几何法（根据绝对值的几何意义）

$|x+2|+|x-5|$ 可以理解为数轴上表示实数 x 与实数 -2 的距离，实数 x 与实数 5 的距离，两者的和，

通过数轴分析发现当 $-2 \leq x \leq 5$ 时， $|x+2|+|x-5|$ 有最小值，最小值为 7 。故选：D.

方法 2：代数法（借助零点分类讨论）

当 $x < -2$ 时， $|x+2|+|x-5| = (-2-x) + (5-x) = 3-2x$ ；

当 $-2 \leq x \leq 5$ 时， $|x+2|+|x-5| = (x+2) + (5-x) = 7$ ；

当 $x > 5$ 时， $|x+2|+|x-5| = (x+2) + (x-5) = 2x-3$ ；

$\therefore |x+2|+|x-5|$ 有最小值，最小值为 7 ，此时 $-2 \leq x \leq 5$ ，故选：D.

【点睛】此题考查依据绝对值的性质化简绝对值，正确理解题意，得到 $|x+2|+|x-5|$ 表示的意义，再利用分类思想解答问题.

例 2.（2022·江苏·七年级期中）我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，数形结合是解决数学问题的重要思想方法. 例如，代数式 $|x-2|$ 的几何意义是数轴上 x 所对应的点与 2 所对应的点之间的

距离：因为 $|x+1| = |x-(-1)|$ ，所以 $|x+1|$ 的几何意义就是数轴上 x 所对应的点与 -1 所对应的点之间的

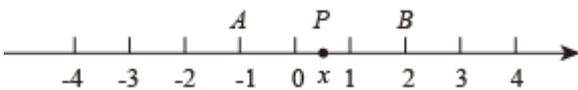
距离.（i）发现问题：代数式 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值是多少？

（ii）探究问题：如图，点 A 、 B 、 P 分别表示数 -1 、 2 、 x ， $AB=3$

$\therefore |x+1|+|x-2|$ 的几何意义是线段 PA 与 PB 的长度之和，

\therefore 当点 P 在线段 AB 上时， $PA+PB=3$ ，当点 P 在点 A 的左侧或点 B 的右侧时， $PA+PB > 3$

$\therefore |x+1|+|x-2|$ 的最小值是 3



请你根据上述自学材料，探究解决下列问题：

(1) $|x-3|+|x+2|$ 的最小值是_____；(2) 利用上述思想方法解不等式： $|x+3|+|x-1| > 4$ ；

(3)当 a 为何值时, 代数式 $|x+a|+|x-4|$ 的最小值是 2

【答案】(1)5(2) $x < -3$ 或 $x > 1$ (3)-2 或 -6

【分析】(1) 把原式转化看作是数轴上表示 x 的点与表示 3 与 -2 的点之间的距离最小值，进而问题可求解；

(2) 根据题意画出相应的图形，然后根据数轴可直接进行求解；

(3) 根据原式的最小值为 2，得到表示 4 的点的左边和右边，且到 4 距离为 2 的点即可。

【详解】(1) 解： $|x-3|+|x+2|=|x-3|+|x-(-2)|$ ，表示 P 到 A 与到 B 的距离之和，



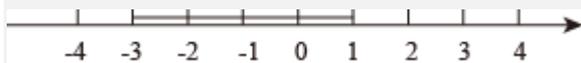
当点 P 在线段 AB 上， $PA+PB=5$ ，

当点 P 在点 A 的左侧或点 B 的右侧时， $PA+PB > 5$ ， $\therefore |x-3|+|x+2|$ 的最小值是 5；

(2) 解：如图所示，满足 $|x+3|+|x-1|=|x-(-3)|+|x-1| > 4$ ，表示到 -3 和 1 距离之和大于 4 的范围，

当点在 -3 和 1 之间时，距离之和为 4，不满足题意；

当点在 -3 的左边或 1 的右边时，距离之和大于 4，则 x 范围为 $x < -3$ 或 $x > 1$ ；



(3) 解：当 a 为 -2 或 -6 时，代数式 $|x+a|+|x-4|$ 为 $|x-2|+|x-4|$ 或 $|x-6|+|x-4|$ ，

Q 数轴上表示数 2 的点到表示数 4 的点的距离为 2，数轴上表示数 6 的点到表示数 4 的点的距离也为 2，因此当 a 为 -2 或 -6 时，原式的最小值是 2。

【点睛】本题主要考查数轴上的动点问题及数轴上两点之间的距离，熟练掌握数轴上两点之间的距离问题是解题的关键。

变式 1. (2022·浙江·七年级专题练习) 阅读下面的材料：

点 A 、 B 在数轴上分别表示实数 a 、 b ， A 、 B 两点之间的距离表示为 $|AB|$ ，当 A 、 B 两点中有一点在原点时，

不妨设点 A 在原点，如图 1， $|AB|=|OB|=|b|=|a-b|$ ；当 A 、 B 两点都不在原点时：



图 1

图 2

图 3

图 4

①如图 2，点 A 、 B 都在原点的右边： $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|$ ；

②如图 3，点 A 、 B 都在原点的左边： $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=-b-(-a)=|a-b|$ ；

③如图 4，点 A 、 B 在原点的两边： $|AB|=|OA|+|OB|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$ ，

综上，数轴上 A 、 B 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$ 。

回答下列问题: (1)数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是_____，数轴上表示-2 和-5 的两点之间的距离是_____，数轴上表示 1 和-3 的两点之间的距离是_____；

(2)数轴上表示 x 和-1 的两点 A 和 B 之间的距离是_____，如果 $|AB|=2$ ，那么 x 为_____。

(3)当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是_____。

【答案】 (1)3, 3, 4 (2) $|x+1|$, 1 或-3 (3) $-1 \leq x \leq 2$

【分析】 (1) 根据材料提供的方法进行计算数轴上两点之间的距离，紧紧抓住在数轴上 A 、 B 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$ 解题即可。(2) 根据数轴上两点之间的距离得到 $|x-(-1)|=2$ ，然后根据绝对值的意义求出 x 的值。(3) 把原题看成点 x 到点-1 和点 2 的距离之和，即可得到答案。

【详解】 (1) 解：数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离为 $|5-2|=3$ ，

数轴上表示-2 和-5 的两点之间的距离为 $|-2-(-5)|=3$ ，

数轴上表示 1 和-3 的两点之间的距离为 $|1-(-3)|=4$ ；故答案为：3, 3, 4；

(2) 解：数轴上表示 x 和-1 的两点 A 和 B 之间的距离是 $|x-(-1)|=|x+1|$ ，

根据题意得 $|x+1|=2$ ，即 $x+1=\pm 2$ ，所以 $x=1$ 或-3，故答案为 $|x+1|$ ，1 或-3；

(3) 解：代数式 $|x+1|+|x-2|$ 可以看成 x 到-1 和 2 的距离和，只有在-1 和 2 之间才会有最小距离 3，所以 x 的取值为 $-1 \leq x \leq 2$ ，故答案为： $-1 \leq x \leq 2$ 。

【点睛】 本题考查了数轴上两点间的距离以及绝对值，重点是读懂题干的两点间的距离以及绝对值的意义是解题的关键。

变式 2. (2022 秋·河南郑州·七年级统考阶段练习) **【探究问题】** 点 A 、 B 在数轴上分别表示有理数 x_1 、 x_2 ，

A 、 B 两点之间的距离表示为 AB ，在数轴上 A 、 B 两点之间的距离 $AB=|x_1-x_2|$ 或 $AB=|x_2-x_1|$ ；利用数形结合思想解决探究问题：

【方法感悟】 如图1，从数轴上看，若点 A 、 B 表示的数分别是 1，4，则 $AB=|4-1|=3$ 或 $AB=|1-4|=3$ ；

若点 A 、 B 表示的数分别是 -1，4，则 $AB=|4-(-1)|=|4+1|=5$ 或 $AB=|-1-4|=|-5|=5$ ；

若点 A 、 B 表示的数分别是 -1，-4，则 $AB=|-1-(-4)|=|-1+4|=3$ 或 $AB=|-4-(-1)|=|-4+1|=3$ 。

【归纳】 若点 A 、 B 表示的数分别是 x_1 、 x_2 ，则 $AB=|x_1-x_2|$ 或 $AB=|x_2-x_1|$ ；

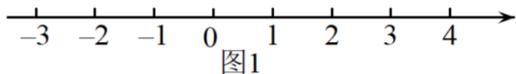


图1

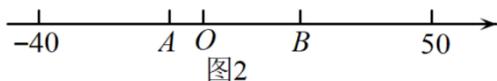


图2

【知识迁移】(1)点 A , B 表示的数分别是 -2.5 , b , 且 $AB=3$, 则 $b=$ _____;

(2)如图 2, 若点 A , B 表示的数分别是 x_1 , x_2 , 令 $AB=n$, 若把线段 AB 向左平移 n 个单位, 则点 A 与 -40 重合; 若把线段 AB 向右平移 n 个单位, 则点 B 与 50 重合, 那么 $x_1=$ _____, $x_2=$ _____;

(3)利用数轴求出 $|x+3|+|x-4|$ 的最小值为_____, 此时 x 可取哪些整数值_____

【答案】(1) -5.5 或 0.5 (2) -10 ; 20 (3) 7 ; -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4

【分析】(1) 根据两点间的距离公式, 列出绝对值方程进行计算即可;

(2) 根据把线段 AB 向左平移 n 个单位, 则点 A 与 -40 重合; 若把线段 AB 向右平移 n 个单位, 则点 B 与 50 重合, 得出 $3n=|-40-50|=90$, 求出 n 的值, 即可得出答案; (3) 根据数轴上两点之间的距离, 得出 $|x+3|$ 表示 x 在数轴上表示的数到 -3 的距离, $|x-4|$ 表示 x 在数轴上表示的数到 4 的距离, 得出当 $-3 \leq x \leq 4$ 时, $|x+3|+|x-4|$ 最小, 求出最小值即可, 找出 -3 与 4 之间的整数即可.

【详解】(1) 解: \because 点 A , B 表示的数分别是 -2.5 , b , 且 $AB=3$,

$$\therefore |-2.5-b|=3, \therefore -2.5-b=3 \text{ 或 } -2.5-b=-3,$$

解得: $b=-5.5$ 或 $b=0.5$. 故答案为: -5.5 或 0.5 .

(2) 解: $\because |-40-50|=90, \therefore 3n=90$, 解得: $n=30$,

$$\therefore x_1=-40+30=-10, x_2=50-30=20, \text{ 故答案为: } -10; 20.$$

(3) 解: $\because |x+3|$ 表示 x 在数轴上表示的数到 -3 的距离, $|x-4|$ 表示 x 在数轴上表示的数到 4 的距离,

\therefore 当 x 表示的数在数轴上位于 -3 与 4 之间, 即 $-3 \leq x \leq 4$ 时, $|x+3|+|x-4|$ 最小, 且最小值为 $|-3-4|=7$;

此时 x 可取的整数值有 -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ,

故答案为: 7 ; -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 .

【点睛】本题主要考查了数轴上两点之间的距离, 解题的关键是理解题意, 准确计算.

模型 2. $|x-a|-|x-b|$ 的最小值和最大值模型

【模型解读】式子 $|x-a|-|x-b|$ 在 $x \leq a$ 时，取得最小值为 $-|a-b|$ ；在 $x \geq b$ 时，取得最大值 $|a-b|$ 。

【最值原理】 $|x-a|-|x-b|$ 目的是在数轴上找一点 x ，使 x 到 a 和 b 的距离差的最大值和最小值：

分类情况 (x 的取值范围)	图示	$ x-a - x-b $ 取值情况
当 $x < a$ 时		$ x-a - x-b $ 的值为定值，即为 $- a-b $
当 $a \leq x \leq b$ 时		$- a-b \leq x-a - x-b \leq a-b $
当 $x > b$ 时		$ x-a - x-b $ 的值为定值，即为 $ a-b $

例 1. (2022 秋·福建泉州·七年级校考期中) 若代数式 $|x-1|-|x+2|$ 的最大值为 a ，最小值为 b ，则 ab 的值

【答案】-9

【分析】分三种情况：当 $x \geq 1$ 时；当 $-2 < x < 1$ 时；当 $x \leq -2$ 时；进行讨论可求代数式 $|x-1|-|x+2|$ 的值，即可求出 a 与 b 的值。

【详解】解：当 $x \geq 1$ 时， $|x-1|-|x+2|=x-1-x-2=-3$ ；

当 $-2 < x < 1$ 时， $|x-1|-|x+2|=- (x-1) - (x+2) = -2x-1$ ；

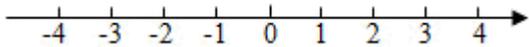
当 $x \leq -2$ 时， $|x-1|-|x+2|=- (x-1) + (x+2) = 3$ 。

\therefore 代数式 $|x-1|-|x+2|$ 的最大值为 a ，最小值为 b ，

$\therefore a=3, b=-3. \therefore ab=-9$ 。故答案为：-9。

【点睛】本题考查了绝对值，如果用字母 a 表示有理数，则数 a 绝对值要由字母 a 本身的取值来确定：①当 a 是正有理数时， a 的绝对值是它本身 a ；②当 a 是负有理数时， a 的绝对值是它的相反数 $-a$ ；③当 a 是零时， a 的绝对值是零。注意分类思想的运用。

例 2. (2022·重庆·七年级期末) 数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$ 。数轴上表示数 a 的点与表示数 b 的点的距离记作 $|a-b|$ ，如 $|3-5|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 5 的点的距离， $|3+5|=|3-(-5)|$ 表示数轴上表示数 3 的点与表示数 -5 的点的距离， $|a-3|$ 表示数轴上表示数 a 的点与表示数 3 的点的距离。



根据以上材料回答下列问题：（将结果直接填写在答题卡相应位置，不写过程）

- (1) 若 $|x-2|=|x+2|$ ，则 $x=$ _____，若 $|x-3|=|x+1|$ ，则 $x=$ _____；
- (2) 若 $|x-3|+|x+1|=4$ ，则 x 能取到的最小值是 _____；最大值是 _____；
- (3) 若 $|x-3|-|x+1|=4$ ，则 x 能取到的最大值是 _____；(4) 关于 x 的式子 $|x-2|+|x+1|$ 的取值范围是 _____。

【答案】 (1) 0, 1; (2) -1, 3; (3) -1; (4) 大于或等于 3

【分析】 (1) 根据绝对值表示的意义和中点计算方法得出答案；

(2) $|x-3|+|x+1|=4$ 表示的意义，得到 x 的取值范围，进而得到最大值和最小值；

(3) 若 $|x-3|-|x+1|=4$ ，所表示的意义，确定 x 的取值范围，进而求出最大值；

(4) 根据 $|x-2|+|x+1|$ 的意义，求出 $|x-2|+|x+1|$ 的最小值为 3，从而确定取值范围。

【详解】解：(1) $|x-2|=|x+2|$ 表示数轴上表示 x 的点到表示 2 和 -2 的距离相等，因此到 2 和 -2 距离相等的点表示的数为 $\frac{2-2}{2}=0$ ， $|x-3|=|x+1|$ 表示数轴上表示 x 的点到表示 3 和 -1 的距离相等，

因此到 3 和 -1 距离相等的点表示的数为 $\frac{3-1}{2}=1$ ，故答案为：0, 1；

(2) $|x-3|+|x+1|=4$ 表示的意义是数轴上表示 x 的点到表示 3 和 -1 两点的距离之和为 4，可得 $-1 \leq x \leq 3$ ，因此 x 的最大值为 3，最小值为 -1；故答案为：-1, 3；

(3) $|x-3|-|x+1|=4$ 表示的意义是数轴上表示数 x 的点与表示数 3 的点距离比它到表示 -1 的点的距离大 4，根据数轴直观可得， $x \leq -1$ ，即 x 的最大值为 -1，故答案为：-1；

(4) 式子 $|x-2|+|x+1|$ 表示的意义是数轴上表示 x 的点到表示 2 和 -1 两点的距离之和，由数轴直观可得， $|x-2|+|x+1|$ 最小值为 3，因此 $|x-2|+|x+1| \geq 3$ ，故答案为：大于或等于 3。

【点睛】 本题考查数轴表示数的意义，理解绝对值的意义和两点距离的计算方法是正确解答的关键。

变式 1. (2022·陕西西安·七年级校考期中) 点 A、B 在数轴上分别表示有理数 a 、 b ，则在数轴上 A、B 两点之间的距离为 $AB=|a-b|$ ，利用数轴上两点间距离，可以得到 $|x+1|-|x-3|$ 的最大值是 _____。

【答案】 4

【分析】 分 $x \leq -1$ 、 $-1 < x < 3$ 、 $x \geq 3$ 三种情况进行讨论求解，分别确定最大值即可得出结论。

【详解】解：根据题意， $|x+1|-|x-3|$ 表示 x 到 -1 和 3 的距离之差，又 -1 和 3 的距离为 $|-1-3|=4$ ，则

当 $x \leq -1$ 时, $|x+1|-|x-3| = -x-1+x-3 = -4$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $|x+1|-|x-3| = x+1+x-3 = 2x-2$, 则 $-4 < |x+1|-|x-3| < 4$, 此时 $|x+1|-|x-3|$ 无最大值;

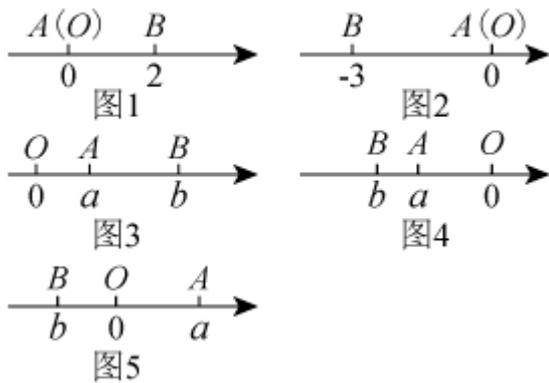
当 $x \geq 3$ 时, $|x+1|-|x-3| = x+1-x+3 = 4$,

综上, $|x+1|-|x-3|$ 的最大值为 4,

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查数轴和绝对值的意义, 理解题意, 利用分类讨论思想求解是解答的关键.

变式 2. (2022 秋·山东青岛·七年级校考阶段练习) 我国著名数学家华罗庚说过“数缺形时少直观, 形少数时难入微”, 数形结合是解决数学问题的重要思想方法. 我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点到原点的距离, 也就是说 $|x|$ 表示在数轴上数 x 与数 0 对应点之间的距离.



提出问题: 有理数 a, b 在数轴上对应的点分别记为点 A 和点 B , AB 两点之间的距离记为 $|AB|$, 那么 $|AB|$ 与有理数 a, b 有怎样的关系?

探究问题: 探究一: 如果 A, B 两点中有一点在原点, 不妨假设 A 点在原点, 即 $a=0$.

当 $b=2$ 时, $|AB|=|2|=2$, 如图 1 所示; 当 $b=-3$ 时, $|AB|=|-3|=3$, 如图 2 所示;

由此可以推断当 $b=n$ 时, $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

探究二: 如果 A, B 两点都不在原点, 即 $a \neq 0, b \neq 0$.

(1) 当 A, B 两点都在原点的右侧时, 如图 3 所示: $|AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = b - a = -(a - b) = |a - b|$;

(2) 当 A, B 两点都在原点的左侧时, 如图 4 所示: $|AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = \underline{\hspace{2cm}} = |a - b|$;

(3) 当 A, B 两点在原点的两侧时, 如图 5 所示, 请你仿照上述探究过程, 写出 A, B 两点之间的距离 $|AB| =$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976154004013010230>