

绝密★启用前

河北省 2024 届高三年级大数据应用调研联合测评（V）

数学

注意事项

- 1.答卷前，考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(1-2i) \cdot z = i^{2024}$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z} =$ ()
A. $\frac{1+2i}{5}$ B. $\frac{1-2i}{5}$ C. $-\frac{1+2i}{5}$ D. $\frac{2i-1}{5}$
2. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为平面向量，其中 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot \vec{b}=1$ ，则 $|\vec{b}-2\vec{a}| =$ ()
A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4
3. 德国数学家康托尔在其著作《集合论》中给出正交集合并的定义：若集合 A 和 B 是全集 U 的子集，且无公共元素，则称集合 A, B 互为正交集合并，规定空集是任何集合的正交集合并. 若全集 $U = \{x | 1 < \log_2(x+1) \leq 3, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0, x \in \mathbf{N}\}$ ，则集合 A 关于集合 U 的正交集合并 B 的个数为 ()
A. 8 B. 16 C. 32 D. 64
4. 某小学为提高课后延时服务水平和家长满意度，对该校学生家长就服务质量、课程内容、学生感受、家长认可度等问题进行随机电话回访. 某天共回访 5 位家长，通话时长和评分情况如下表：

时长 x (分钟)	10	12	14	15	19
评分 y	60	m	75	$1.2m+5$	90

根据散点图分析得知 y 与 x 具有线性相关关系且求得回归方程为 $\hat{y} = 3.2x + 29.8$ ，则

$m = (\quad)$

A. 61

B. 63

C. 65

D. 67

5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 满足对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|$. 若

函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有一个零点, 则 ω 的最大值为 ()

A. 3

B. $\frac{21}{4}$

C. $\frac{15}{4}$

D. 5

6. 已知 a, b 均为正实数, 且满足 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 2$, 则 $\frac{2}{2a-1} + \frac{3}{2b-3}$ 的最小值为 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{6}$

7. 陀螺是中国传统民俗体育游戏, 流传甚广, 打陀螺已被列入第五批国家级非物质文化遗产代表性项目名录. 陀螺结构分为上下两部分: 上部分为木质件, 下部分为球形钢珠. 其中木质件的形状为上部是底面半径为 2.2cm, 高为 1.63cm 的圆柱, 下部为上底半径为 2.2cm, 下底半径为 0.21cm, 高为 0.78cm 的圆台. 若陀螺的木质件由一个球形原料经车床一次性车制而成, 那么原料的半径最小为 ()



A. 2.21cm

B. 2.22cm

C. 2.23cm

D.

$2\sqrt{2}\text{cm}$

8. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 上有一动点 P , 圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 上有一动点 Q , 直线 $l: x - y + 3 = 0$ 上有一动点 M , 直线 PM 与圆 C_1 相切, 直线 QM 与圆 C_2 相切, 则

$|PM| + |QM|$ 的最小值为 ()

A. 4

B. 5

C. $2\sqrt{6}$

D.

$\sqrt{14 + \sqrt{2}}$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0

分.

9. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 则 ()

A. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$

B. $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$

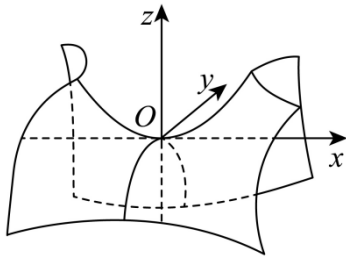
C. $\sin 2\alpha = \frac{63}{65}$

D. $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{33}{7}$

10. 双曲线抛物线又称马鞍面, 其形似马具中的马鞍表面而得名. 其在力学、建筑学、美学中有着广泛的应用. 在空间直角坐标系中, 将一条 xOz 平面内开口向上的抛物线沿着另一条 yOz 平面内开口向下的抛物线滑动 (两条抛物线的顶点重合) 所形成的就是马鞍面, 其

坐标原点被称为马鞍面的鞍点, 其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z (a > 0, b > 0)$, 则下列说法正

确的是 ()



A. 用平行于 xOy 平面的面截马鞍面, 所得轨迹为双曲线

B. 用法向量为 $(1, 0, 0)$ 的平面截马鞍面所得轨迹为抛物线

C. 用垂直于 y 轴的平面截马鞍面所得轨迹为双曲线

D. 用过原点且法向量为 $(1, 1, 0)$ 的平面截马鞍面所得轨迹为抛物线

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续可导函数, 且满足①

$f(2-x) - f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, ② $f(x)$ 为奇函数, 令 $g(x) = f(x) + x^3$, 则下列

说法正确的是 ()

A. $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

B. $f'(1) = -3$

C. $f(2024) = 2024^3$

D. $f'(2023) = -3 \times 2023^2$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.第 14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

12. 已知 $(x+2)^4(2x^2+3x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$ ，则 $a_4=$ _____.

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 为第一象限内椭圆上一点， $\triangle F_1PF_2$ 的内心为 $I(1, \sqrt{3})$ ，且 $\angle F_1PI=30^\circ$ ，则椭圆的离心率为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$ ，且 $a_{n+1}=a_n^2+4a_n+2$ ，则 $a_n=$ _____；令

$b_n=\frac{1}{a_n+3}+\frac{1}{a_{n+1}+1}$ ，若 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_n=$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x^2}-\frac{1}{2}(m>0)$.

(1) 当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

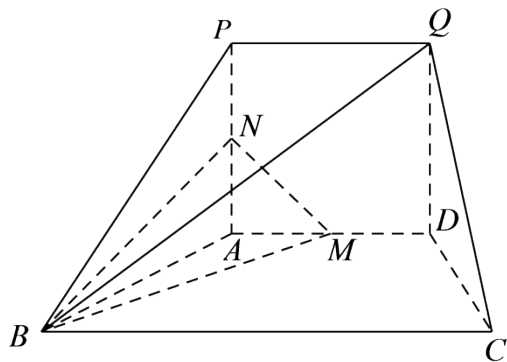
(2) 若 $f(x)\geq\frac{1}{2}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点 F 到一条渐近线的距离为 1，且双曲线左支上任意一点 M 到 F 的距离的最小值为 $2+\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 已知直线 $l:y=kx+1$ 交 C 于 A, B 两点， O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$ ，求直线 l 的斜率 k 的值.

17. 已知在多面体 $PQABCD$ 中，平面 $PADQ\perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD\parallel BC$ ，四边形 $PADQ$ 为矩形，其中 M 和 N 分别为 AD 和 AP 的中点，
 $AB=\sqrt{7}, BC=5, AD=DC=2$.



(1) 证明：平面 $BMN \perp$ 平面 QDC ；

(2) 若二面角 $N-BM-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求直线 BQ 与平面 BMN 所成角的正弦

值。

18. 现有红、绿、蓝三种颜色的箱子，其中红箱中有 4 个红球，2 个绿球，2 个蓝球；绿箱中有 2 个红球，4 个绿球，2 个蓝球；蓝箱中有 2 个红球，2 个绿球，4 个蓝球，所有球的大小、形状、质量完全相同。第一次从红箱中随机抽取一球，记录颜色后将球放回去；第二次要从与第一次记录颜色相同的箱子中随机抽取一球，记录颜色后将球放回去；以此类推，第 $k+1$ 次是从与第 k 次记录颜色相同的箱子中随机抽取一球，记录颜色后放回去，记第 n 次取出的球是红球的概率为 P_n 。

(1) 求第 3 次取出的球是蓝球的概率；

(2) 求 P_n 的解析式。

19. 设 a, b 为非负整数， m 为正整数，若 a 和 b 被 m 除得的余数相同，则称 a 和 b 对模 m 同余，记为 $a \equiv b \pmod{m}$ 。

(1) 求证： $2^{33} + 1 \equiv 65 \pmod{7}$ ；

(2) 若 p 是素数， n 为不能被 p 整除的正整数，则 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，这个定理称之为费马小定理。应用费马小定理解决下列问题：

① 证明：对于任意整数 x 都有 $x^{13} - x \equiv 0 \pmod{546}$ ；

② 求方程 $x^9 + x^7 - x^3 - x \equiv 0 \pmod{35}$ 的正整数解的个数。

绝密★启用前

河北省 2024 届高三年级大数据应用调研联合测评 (V)

数学

注意事项

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(1-2i) \cdot z = i^{2024}$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1+2i}{5}$ B. $\frac{1-2i}{5}$ C. $-\frac{1+2i}{5}$ D. $\frac{2i-1}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数除法的运算法则、虚数单位乘方的运算性质, 结合共轭复数的定义进行求解即可.

【详解】 $(1-2i) \cdot z = i^{2024} \Rightarrow z = \frac{i^{506 \times 4}}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{5} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1-2i}{5}$,

故选: B

2. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为平面向量, 其中 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot \vec{b}=1$, 则 $|\vec{b}-2\vec{a}|=$ ()

- A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】结合题意利用 $|\vec{b}-2\vec{a}| = \sqrt{(\vec{b}-2\vec{a})^2}$, 展开代入计算即可.

【详解】结合题意可得: 因为 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot \vec{b}=1$,

$$|\vec{b}-2\vec{a}| = \sqrt{(\vec{b}-2\vec{a})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a}^2} = \sqrt{4 - 4 + 4} = 2.$$

故选: B.

3. 德国数学家康托尔在其著作《集合论》中给出正交集合的定义：若集合 A 和 B 是全集 U 的子集，且无公共元素，则称集合 A, B 互为正交集合，规定空集是任何集合的正交集合．若全集 $U = \{x | 1 < \log_2(x+1) \leq 3, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0, x \in \mathbf{N}\}$ ，则集合 A 关于集合 U 的正交集合 B 的个数为（ ）

- A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

【答案】B

【解析】

【分析】利用一元二次不等式及对数不等式的解法求出集合 A, U ，再计算正交集合的个数即可．

【详解】结合题意：因为 $1 < \log_2(x+1) \leq 3$ ，所以 $\log_2 2 < \log_2(x+1) \leq \log_2 8$ ，
解得 $2 < x+1 \leq 8$ ，即 $1 < x \leq 7$ ，

所以全集 $U = \{x | 1 < \log_2(x+1) \leq 3, x \in \mathbf{N}\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，

由 $x^2 - 7x + 10 < 0$ 可得 $2 < x < 5$ ，所以 $A = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0, x \in \mathbf{N}\} = \{3, 4\}$ ，

则集合 A 关于集合 U 的正交集合 B 的个数为 $2^4 = 16$ ．

故选：B.

4. 某小学为提高课后延时服务水平和家长满意度，对该校学生家长就服务质量、课程内容、学生感受、家长认可度等问题进行随机电话回访．某天共回访 5 位家长，通话时长和评分情况如下表：

时长 x (分钟)	10	12	14	15	19
评分 y	60	m	75	$1.2m + 5$	90

根据散点图分析得知 y 与 x 具有线性相关关系且求得回归方程为 $\hat{y} = 3.2x + 29.8$ ，则

$m =$ ()

- A. 61 B. 63 C. 65 D. 67

【答案】C

【解析】

【分析】先由题意求得 $\bar{x}, \bar{y}$ ，再利用样本中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 在回归直线上列式即可得解．

【详解】依题意，得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (10+12+14+15+19) = 14$ ，

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \times (60+m+75+1.2m+5+90) = 46+0.44m,$$

将样本中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 代入回归方程 $\hat{y} = 3.2x + 29.8$ ，

得 $46+0.44m = 3.2 \times 14 + 29.8$ ，解得 $m = 65$ 。

故选：C。

5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 满足对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|$ 。若

函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有一个零点，则 ω 的最大值为 ()

- A. 3 B. $\frac{21}{4}$ C. $\frac{15}{4}$ D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意得到 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，从而三角函数的性质得到关于 ω 的不等式组，解之即可得解。

【详解】因为 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|$ ，则 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 取得最值，

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，且 $\frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

又函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有一个零点，设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ，

所以 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{4} < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$ ，即 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2\omega} < \frac{5\pi}{24}$ ，所以 $\frac{12}{5} < \omega \leq 3$ 。

所以 ω 的最大值为 3。

故选：A。

6. 已知 a, b 均为正实数，且满足 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 2$ ，则 $\frac{2}{2a-1} + \frac{3}{2b-3}$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 2$ 化为 $3a + b = 2ab$ ，把待求不等式先通分，再利用均值不等式可得.

【详解】因为 a, b 均为正实数，且 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 2$ ，得 $3a + b = 2ab$ ，

$$\text{所以 } \frac{2}{2a-1} + \frac{3}{2b-3} = \frac{6a+4b-9}{(2a-1)(2b-3)} = \frac{6a+4b-9}{4ab-6a-2b+3} = \frac{6a+4b-9}{3},$$

$$\text{又 } 6a+4b = \frac{1}{2}(6a+4b)\left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(18 + \frac{4b}{a} + \frac{18a}{b}\right) \geq 9 + 6\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{4b}{a} = \frac{18a}{b}, \\ \frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ b = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4} \end{cases} \text{ 时取等号, 所以 } \frac{2}{2a-1} + \frac{3}{2b-3} \geq 2\sqrt{2}.$$

故选：B.

7. 陀螺是中国传统民俗体育游戏，流传甚广，打陀螺已被列入第五批国家级非物质文化遗产代表性项目名录．陀螺结构分为上下两部分：上部分为木质件，下部分为球形钢珠．其中木质件的形状为上部是底面半径为2.2cm，高为1.63cm的圆柱，下部为上底半径为2.2cm，下底半径为0.21cm，高为0.78cm的圆台．若陀螺的木质件由一个球形原料经车床一次性车制而成，那么原料的半径最小为（ ）



A. 2.21cm

B. 2.22cm

C. 2.23cm

D.

$2\sqrt{2}\text{cm}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定信息，可得陀螺的木质件几何体内接于原料球，再作出轴截面，结合勾股定理计算即得.

【详解】依题意，当陀螺的木质件几何体内接于原料球，即圆柱的上底面圆与圆台下底面圆均为球的截面小圆时，所用原料的半径最小，

如图，取几何体的轴截面，其中 O 为球心， O_2, O_1 分别为圆柱的上底面圆与圆台下底面圆的圆心，

因为直线 PM 与圆 C_1 相切, 直线 QM 与圆 C_2 相切,

$$\text{所以 } |PM| + |QM| = \sqrt{|MC_1|^2 - 4} + \sqrt{|MC_2|^2 - 1},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } |PM| + |QM| &= \sqrt{x_0^2 + (x_0 + 3)^2 - 4} + \sqrt{(x_0 - 2)^2 + x_0^2 - 1} \\ &= \sqrt{2x_0^2 + 6x_0 + 5} + \sqrt{2x_0^2 - 4x_0 + 3} = \sqrt{2} \left(\sqrt{x_0^2 + 3x_0 + \frac{5}{2}} + \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + \frac{3}{2}} \right), \end{aligned}$$

$$\text{即 } |PM| + |QM| = \sqrt{2} \left[\sqrt{\left(x_0 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{(x_0 - 1)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right],$$

$$\text{设 } A\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), N(x_0, 0),$$

$$\text{则 } |PM| + |QM| = \sqrt{2}(|AN| + |BN|) \geq \sqrt{2}|AB| = \sqrt{14 + \sqrt{2}},$$

当且仅当 A, B, N 三点共线时取等号.

故选: D.

【点睛】关键点点睛: 本题的解题关键是利用直线与圆相切表示出 $|PM| + |QM|$, 并进行转化为为 A, B 到 N 点的距离问题.

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 则 ()

A. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$

B. $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$

C. $\sin 2\alpha = \frac{63}{65}$

D. $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{33}{7}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由同角三角函数的平方关系计算 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha - \beta)$ 验证 AB 选项;

$\sin 2\alpha = \sin[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$, 由两角和的正弦公式计算验证 C 选项; 由 $\sin(\alpha + \beta)$ 和

$\sin(\alpha - \beta)$ 算出 $\sin \alpha \cos \beta$ 和 $\cos \alpha \sin \beta$, 计算 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 验证 D 选项.

【详解】 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}, \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5},$

则 $\alpha + \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha - \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$

$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{13},$ A 选项正确;

$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{4}{5},$ B 选项错误;

$\sin 2\alpha = \sin[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{63}{65}$

,

C 选项正确;

由 $\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \end{cases},$ 有 $\begin{cases} 2 \sin \alpha \cos \beta = \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \\ 2 \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \end{cases},$

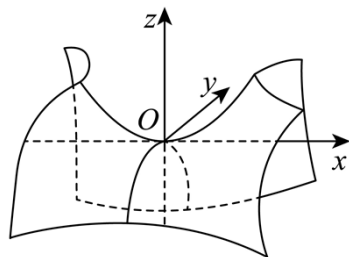
$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{12}{13} + \frac{3}{5}}{\frac{12}{13} - \frac{3}{5}} = \frac{33}{7},$ D 选项正确.

故选: ACD

10. 双曲线抛物线又称马鞍面, 其形似马具中的马鞍表面而得名. 其在力学、建筑学、美学中有着广泛的应用. 在空间直角坐标系中, 将一条 xOz 平面内开口向上的抛物线沿着另一条 yOz 平面内开口向下的抛物线滑动 (两条抛物线的顶点重合) 所形成的就是马鞍面, 其

坐标原点被称为马鞍面的鞍点, 其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z (a > 0, b > 0),$ 则下列说法正

确的是 ()



- A. 用平行于 xOy 平面的面截马鞍面, 所得轨迹为双曲线
- B. 用法向量为 $(1, 0, 0)$ 的平面截马鞍面所得轨迹为抛物线
- C. 用垂直于 y 轴的平面截马鞍面所得轨迹为双曲线
- D. 用过原点且法向量为 $(1, 1, 0)$ 的平面截马鞍面所得轨迹为抛物线

【答案】AB

【解析】

【分析】利用空间向量的相关知识, 结合马鞍面的标准方程, 逐一变换方程判断各选项即可得解.

【详解】因为马鞍面的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z (a > 0, b > 0)$,

对于 A, 平行于 xOy 平面的面中 z 为常数, 不妨设为 $z_0 (z_0 \neq 0)$,

得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z_0$, 故所得轨迹是双曲线, 故 A 正确;

对于 B, 法向量为 $(1, 0, 0)$ 的平面中 x 为常数, 不妨设为 x_0 ,

则 $y^2 = -2b^2z + \frac{b^2x_0^2}{a^2}$, 为抛物线方程, 故 B 正确;

对于 C, 垂直于 y 轴的平面中 y 为常数, 不妨设为 y_0 ,

则 $x^2 = 2a^2z + \frac{a^2y_0^2}{b^2}$, 为抛物线方程, 故 C 错误;

对于 D, 不妨设平面上的点坐标为 $A(x, y, z)$,

因为平面过原点且法向量为 $n = (1, 1, 0)$, 由 $\vec{OA} \cdot n = 0$, 得 $x + y = 0$,

故 $y = -x$, 代入马鞍面标准方程, 得 $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 = 2z$,

当 $a = b$ 时, 方程为 $z = 0$, 不是物物线, 故 D 错误.

故选: AB.

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续可导函数, 且满足①

$f(2-x) - f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, ② $f(x)$ 为奇函数, 令 $g(x) = f(x) + x^3$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/976154031041010205>