

公式的证明方法:

(1) 用简单的公式证明略为复杂的公式。

例2.1.1 证明吸收律 $A + \overline{A}B = A + B$

$$\begin{aligned}\text{证: } A + \overline{A}B &= A(B + \overline{B}) + \overline{A}B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B = AB + AB + A\overline{B} + \overline{A}B \\ &= A(B + \overline{B}) + B(A + \overline{A}) = A + B\end{aligned}$$

(2) 用真值表证明, 即检验等式两边函数的真值表是否一致。

例2.1.2 用真值表证明反演律 $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

表 3.1.2 证明 $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

二、逻辑代数的基本规则

1. 代入规则

对于任何一个逻辑等式，以某个逻辑变量或逻辑函数同时取代等式两端任何一个逻辑变量后，等式依然成立。

例如，在反演律中用 BC 去代替等式中的 B ，则新的等式仍成立：

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

2. 对偶规则

将一个逻辑函数 L 进行下列变换：

$$\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot$$

$$0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$$

所得新函数表达式叫做 L 的**对偶式**，用 L' 表示。

对偶规则的基本内容是：**如果两个逻辑函数表达式相等，那么它们的对偶式也一定相等。**

基本公式中的公式1和公式2就互为对偶式。

3.反演规则

将一个逻辑函数 L 进行下列变换：

$$\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot;$$

$$0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0;$$

原变量 $\rightarrow$ 反变量, 反变量 $\rightarrow$ 原变量。

所得新函数表达式叫做 L 的**反函数**，用 $\bar{L}$ 表示。

利用反演规则，可以非常方便地求得一个函数的反函数

例2.1.3 求以下函数的反函数： $L = \bar{A}C + B\bar{D}$

解：
$$\bar{L} = (A + \bar{C}) \cdot (\bar{B} + D)$$

例2.1.4 求以下函数的反函数： $L = A \cdot \overline{B + C + D}$

解：
$$\bar{L} = \bar{A} + \overline{\bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D}$$

在应用反演规则求反函数时要注意以下两点：

- 1 保持运算的优先顺序不变，必要时加括号表明，如例2.1.3。
- 2 变换中，几个变量（一个以上）的公共非号保持不变，如例2.1.4。

三、逻辑函数的代数化简法

1. 逻辑函数式的常见形式

一个逻辑函数的表达式不是唯一的，可以有多种形式，并且能互相转换。例如：

$L = AC + \overline{A}B$	与—或表达式
$= (A + B)(\overline{A} + C)$	或—与表达式
$= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{\overline{A}B}}$	与非—与非表达式
$= \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{A} + C}}$	或非—或非表达式
$= \overline{\overline{AC} + \overline{\overline{A}B}}$	与—或非表达式

其中，与—或表达式是逻辑函数的最基本表达形式。

2. 逻辑函数的最简“与—或表达式”的标准

- 1 与项最少，即表达式中“+”号最少。
- 2 每个与项中的变量数最少，即表达式中“·”号最少。

3. 用代数法化简逻辑函数

(1) 并项法。

运用公式 $A + \bar{A} = 1$ ，将两项合并为一项，消去一个变量。如

$$\begin{aligned} L &= A(BC + \bar{B}\bar{C}) + A(\bar{B}C + B\bar{C}) = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} = AB(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) \\ &= AB + \bar{A}\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A \end{aligned}$$

2 吸收法。

运用吸收律 $A + AB = A$ ，消去多余的与项。如 $L = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}(C + DE) = \bar{A}\bar{B}$

3 消去法。

运用吸收律 $A + \bar{A}B = A + B$ 消去多余的因子。如

$$L = \bar{A} + AB + \bar{B}E = \bar{A} + B + \bar{B}E = \bar{A} + B + E$$

4 配项法。

先通过乘以 $A + \bar{A}$ 或加上 $A\bar{A}$ ，增加必要的乘积项，再用以上方法化简。如

$$L = AB + \bar{A}C + BCD = AB + \bar{A}C + BCD(A + \bar{A}) = AB + \bar{A}C + ABCD + \bar{A}BCD = AB + \bar{A}C$$

在化简逻辑函数时，要灵活运用上述方法，才能将逻辑函数化为最简。

再举几个例子：

例2.1.6 化简逻辑函数：

$$L = AD + \overline{A}\overline{D} + AB + \overline{A}C + BD + \overline{A}\overline{B}EF + \overline{B}EF$$

解： $L = A + AB + \overline{A}C + BD + \overline{A}\overline{B}EF + \overline{B}EF$ （利用 $A + \overline{A} = 1$ ）

$$= A + \overline{A}C + BD + \overline{B}EF \quad \text{（利用 } A + AB = A \text{）}$$

$$= A + C + BD + \overline{B}EF \quad \text{（利用 } A + \overline{A}B = A + B \text{）}$$

例2.1.7 化简逻辑函数: $L = AB + A\bar{C} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$

解: $L = \overline{ABC} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$ (利用反演律)

$$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G) \quad (\text{利用 } A + \bar{A}B = A + B)$$

$$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B \quad (\text{利用 } A + AB = A)$$

$$= A + \bar{B}C(D + \bar{D}) + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B(C + \bar{C}) \quad (\text{配项法})$$

$$= A + \bar{B}CD + \bar{B}C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}BC + \bar{D}B\bar{C}$$

$$= A + \bar{B}C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}BC \quad (\text{利用 } A + AB = A)$$

$$= A + C\bar{D}(\bar{B} + B) + \bar{C}B + \bar{B}D$$

$$= A + C\bar{D} + \bar{C}B + \bar{B}D \quad (\text{利用 } A + \bar{A} = 1)$$

例2.1.8 化简逻辑函数: $L = A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$

解法1:
$$\begin{aligned} L &= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B + A\bar{C} \quad (\text{增加冗余项 } A\bar{C}) \\ &= A\bar{B} + \bar{B}C + \bar{A}B + A\bar{C} \quad (\text{消去 1 个冗余项 } B\bar{C}) \\ &= \bar{B}C + \bar{A}B + A\bar{C} \quad (\text{再消去 1 个冗余项 } A\bar{B}) \end{aligned}$$

解法2:
$$\begin{aligned} L &= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B + \bar{A}C \quad (\text{增加冗余项 } \bar{A}C) \\ &= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}B + \bar{A}C \quad (\text{消去 1 个冗余项 } \bar{B}C) \\ &= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}C \quad (\text{再消去 1 个冗余项 } \bar{A}B) \end{aligned}$$

- 由上例可知，逻辑函数的化简结果不是唯一的。

代数化简法的优点是不受变量数目的限制。

缺点是：没有固定的步骤可循；需要熟练运用各种公式和定理；在化简一些较为复杂的逻辑函数时还需要一定的技巧和经验；有时很难判定化简结果是否最简。

2.2 逻辑函数的卡诺图化简法

一、 最小项的定义与性质

最小项的定义

n 个变量的逻辑函数中，包含全部变量的乘积项称为最小项。 n 变量逻辑函数的全部最小项共有 2^n 个。

表 3.2.1 三变量逻辑函数的最小项及编号

最小项	变量取值	编号
	A B C	
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	0 0 0	m_0
$\overline{A}\overline{B}C$	0 0 1	m_1
$\overline{A}B\overline{C}$	0 1 0	m_2
$\overline{A}BC$	0 1 1	m_3
$A\overline{B}\overline{C}$	1 0 0	m_4
$A\overline{B}C$	1 0 1	m_5
$AB\overline{C}$	1 1 0	m_6
ABC	1 1 1	m_7

二、逻辑函数的最小项表达式

任何一个逻辑函数表达式都可以转换为一组最小项之和，称为最小项表达式。

例1：将以下逻辑函数转换成最小项表达式：

$$L(A, B, C) = AB + \bar{A}C$$

解：

$$\begin{aligned} L(A, B, C) &= AB + \bar{A}C = AB(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) \\ &= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C = m_7 + m_6 + m_3 + m_1 \end{aligned}$$

例2.2.2 将下列逻辑函数转换成最小项表达式：

$$F = AB + \overline{AB + \bar{A}\bar{B} + C}$$

解：

$$\begin{aligned} F &= AB + \overline{AB + \bar{A}\bar{B} + C} \\ &= AB + \overline{AB} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}} \cdot \bar{C} = AB + (\bar{A} + \bar{B})(A + B)\bar{C} = AB + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \\ &= AB(C + \bar{C}) + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_5 = \sum m(3, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

三、卡诺图

1. 相邻最小项

如果两个最小项中只有一个变量互为反变量，其余变量均相同，则称这两个最小项为逻辑相邻，简称相邻项。

例如，最小项 ABC 和 $A\bar{B}C$ 就是相邻最小项。

如果两个相邻最小项出现在同一个逻辑函数中，可以合并为一项，同时消去互为反变量的那个量。如

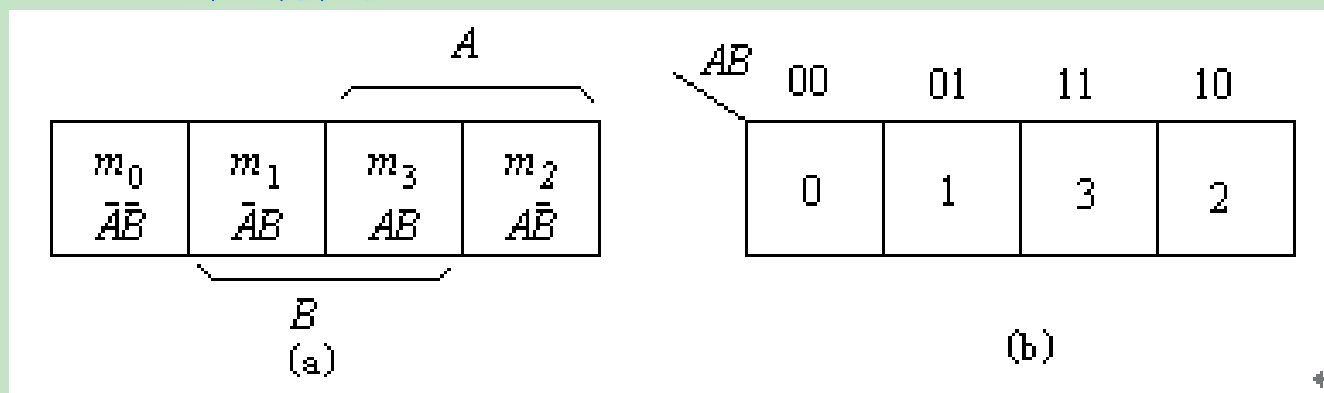
$$ABC + A\bar{B}C = AC(B + \bar{B}) = AC$$

2 . 卡诺图

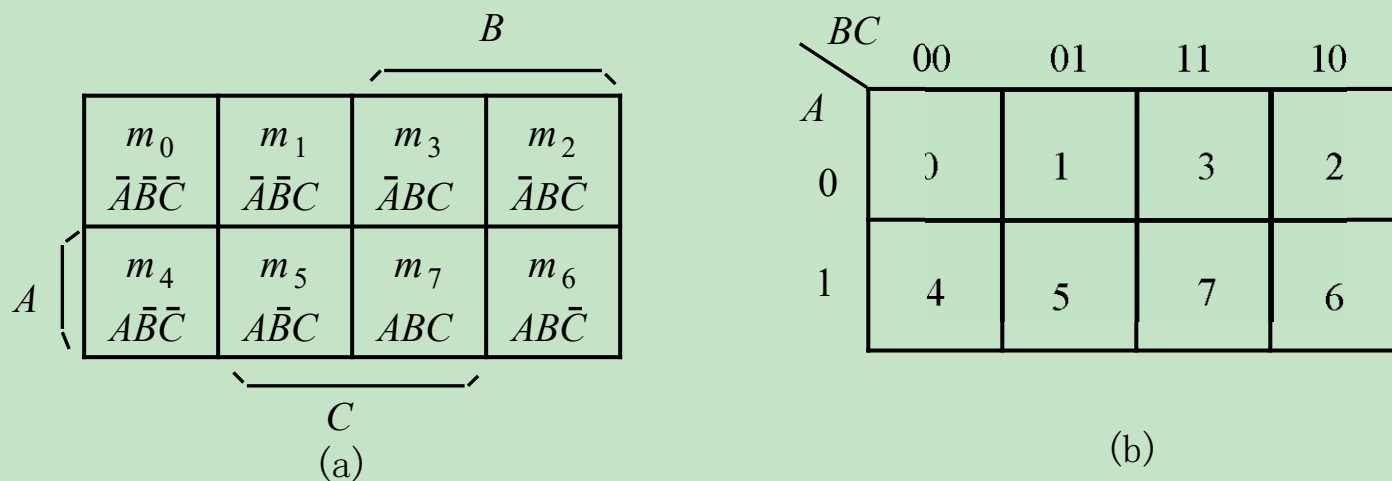
用小方格来表示最小项，一个小方格代表一个最小项，然后将这些最小项按照相邻性排列起来。即用小方格几何位置上的相邻性来表示最小项逻辑上的相邻性。

3. 卡诺图的结构

(1) 二变量卡诺图



(2) 三变量卡诺图



(3) 四变量卡诺图

C			
m_0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	m_1 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	m_3 $\bar{A}\bar{B}CD$	m_2 $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
m_4 $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	m_5 $\bar{A}B\bar{C}D$	m_7 $\bar{A}BCD$	m_6 $\bar{A}BC\bar{D}$
m_{12} $AB\bar{C}\bar{D}$	m_{13} $AB\bar{C}D$	m_{15} $ABCD$	m_{14} $ABC\bar{D}$
m_8 $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	m_9 $A\bar{B}\bar{C}D$	m_{11} $A\bar{B}CD$	m_{10} $A\bar{B}C\bar{D}$
D			

(a)

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

仔细观察可以发现，**卡诺图具有很强的相邻性：**

- 1 直观相邻性，只要小方格在几何位置上相邻（不管上下左右），它代表的最小项在逻辑上一定是相邻的。
- 2 对边相邻性，即与中心轴对称的左右两边和上下两边的小方格也具有相邻性。

四、用卡诺图表示逻辑函数

1. 从真值表到卡诺图

例2.2.3 某逻辑函数的真值表如表3.2.3所示，用卡诺图表示该逻辑函数

解： 该函数为三变量，先画出三变量卡诺图，然后根据真值表将8个最小项 L 的取值0或者1填入卡诺图中对应的小方格中即可。

表 3.2.3 真值表

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

L BC		00	01	11	10
		A			
0		0	0	1	0
1		0	1	1	1

2. 从逻辑表达式到卡诺图

(1) 如果表达式为最小项表达式，则可直接填入卡诺图。

例2.2.4 用卡诺图表示逻辑函数： $F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$

解： 写成简化形式： $F = m_0 + m_3 + m_6 + m_7$

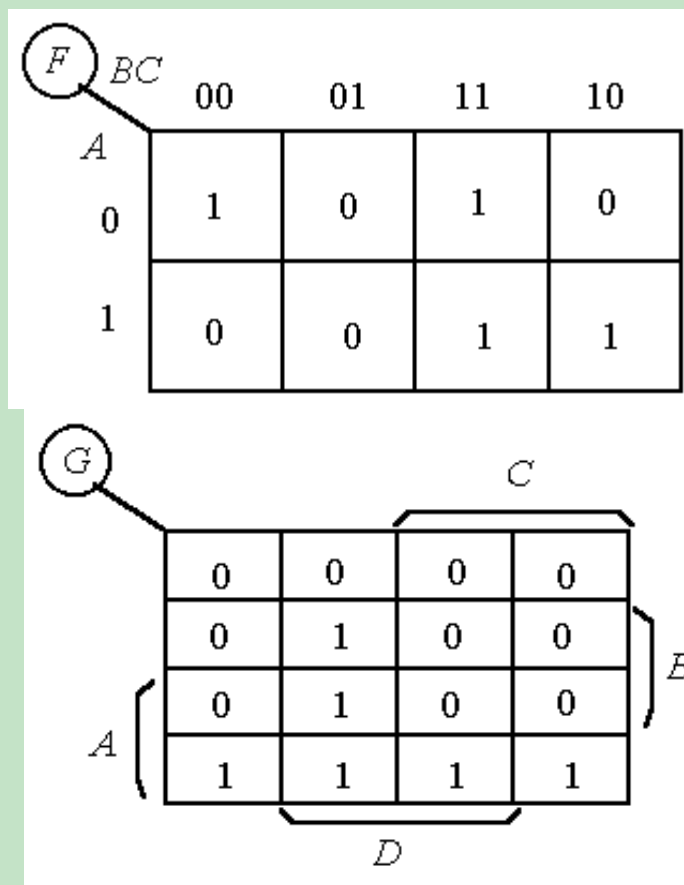
然后填入卡诺图：

(2) 如表达式不是最小项表达式，
但是“与-或表达式”，可将其先
化成最小项表达式，再填入卡诺
图。也可直接填入。

例2.2.5 用卡诺图表示逻辑函数

$$G = A\overline{B} + B\overline{C}D$$

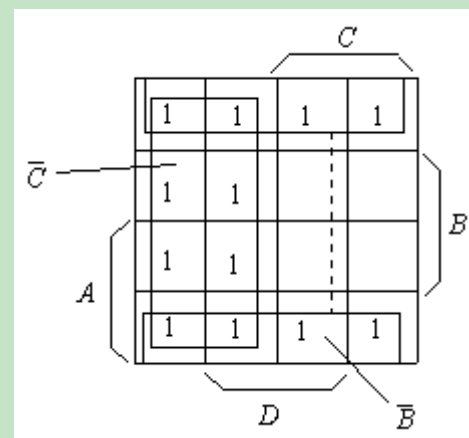
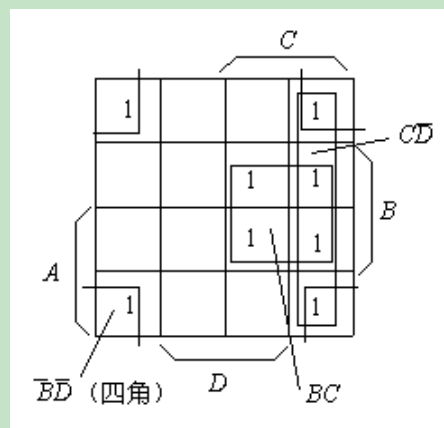
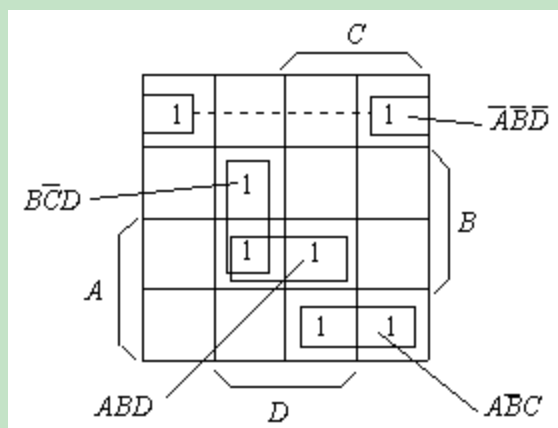
解： 直接填入：



五、逻辑函数的卡诺图化简法

1. 卡诺图化简逻辑函数的原理：

- (1) 2个相邻的最小项结合，可以消去1个取值不同的变量而合并为1项。
- (2) 4个相邻的最小项结合，可以消去2个取值不同的变量而合并为1项。
- (3) 8个相邻的最小项结合，可以消去3个取值不同的变量而合并为1项。



总之， 2^n 个相邻的最小项结合，可以消去 n 个取值不同的变量而合并为1项。

2. 用卡诺图合并最小项的原则（画圈的原则）

- 1 尽量画大圈，但每个圈内只能含有 2^n （ $n=0,1,2,3,\dots$ ）个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性。
- 2 圈的个数尽量少。
- 3 卡诺图中所有取值为1的方格均要被圈过，即不能漏下取值为1的最小项。
- 4 在新画的包围圈中至少要含有1个未被圈过的1方格，否则该包围圈是多余的。

3. 用卡诺图化简逻辑函数的步骤：

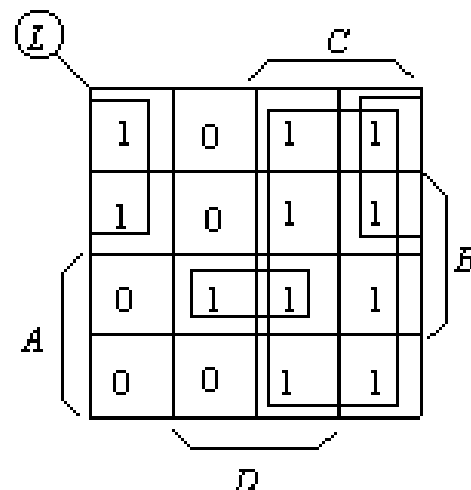
- 1 画出逻辑函数的卡诺图。
- 2 合并相邻的最小项，即根据前述原则画圈。
- 3 写出化简后的表达式。每一个圈写一个最简与项，规则是，取值为1的变量用原变量表示，取值为0的变量用反变量表示，将这些变量相与。然后将所有与项进行逻辑加，即得最简与—或表达式。

例2.2.6 用卡诺图化简逻辑函数：

$$L(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,4,6,7,10,11,13,14,15)$$

解：（1）由表达式画出
（2）画包围圈，合并
得简化的与-或表

$$L = C + \overline{A}\overline{D} + ABD$$

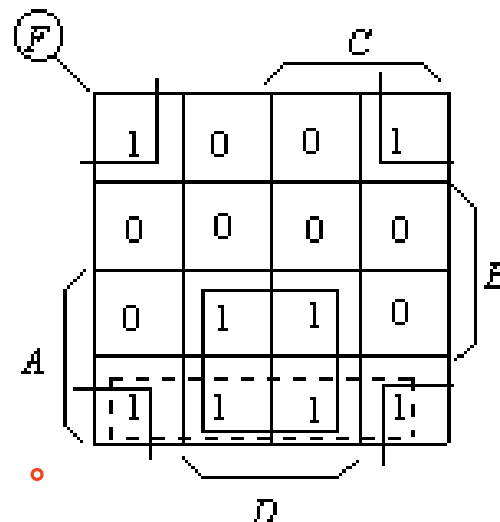


例2.2.7 用卡诺图化简逻辑函数：

$$F = AD + \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$$

解：（1）由表达式画出卡诺图。
（2）画包围圈合并最小项，
得简化的与-或表达式：

$$F = AD + \overline{B}\overline{D}$$



注意：图中的虚线圈是多余的，应去掉。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/977004103156006131>