2023-2024 学年湖南省名校高考数学二模试卷

注意事项

1．考生要认真填写考场号和座位序号。

2．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。

3．考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且与抛物线交于 **A**，**B** 两点，则 $4|AF|+|BF|$ 的最小值是

A．10　　**B．9**　　**C．8**　　**D．7**

2．已知向量 $\vec{a}=(1,-2),\vec{b}=(3,-1)$，则（　　）

A． $\vec{a}\parallel\vec{b}$　　**B．** $\vec{a}\perp\vec{b}$　　**C．** $\vec{a}\parallel(\vec{a}-\vec{b})$　　**D．** $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$

3．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，$AA_1=\sqrt{3}$，则直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为（　）

A． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**B．** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　**C．** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　**D．** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

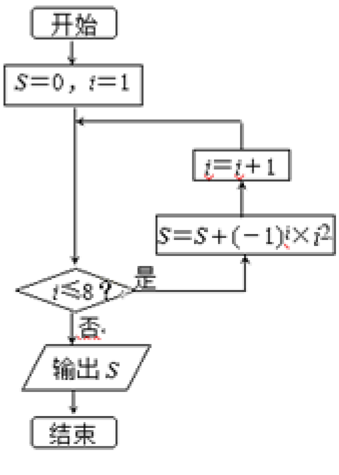
4．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 ***P*** 是 ***C*** 的右支上一点，连接 PF_1 与 ***y*** 轴交于点 ***M***，若 $\left|F_1O\right|=2|OM|$（***O*** 为坐标原点），$PF_1\perp PF_2$，则双曲线 ***C*** 的渐近线方程为（　　）

A． $y=\pm 3x$　　**B．** $y=\pm\sqrt{3}x$　　**C．** $y=\pm 2x$　　**D．** $y=\pm\sqrt{2}x$

5．i 是虚数单位，$z=\dfrac{2i}{1-i}$ 则 $|z|=$（　　）

A．1　　**B．2**　　**C．** $\sqrt{2}$　　**D．** $2\sqrt{2}$

6．执行如下的程序框图，则输出的 S 是（　　）



A． 36　　**B．** 45

C．-36　　D．-45

7．集合 $A=\{x|x^2-x-2\le 0\}$，$B=\{x|x-1<0\}$，则 $A\cup B$=( )

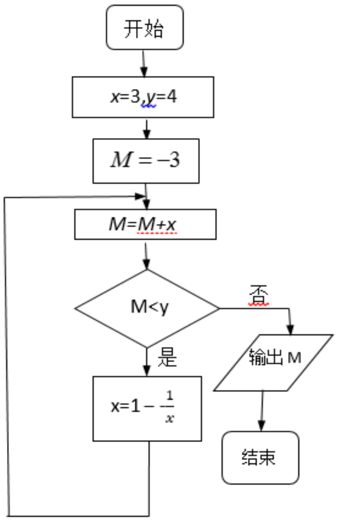
A．$\{x|x<1\}$　　B．$\{x|-1\le x<1\}$

C．$\{x|x\le 2\}$　　D．$\{x|-2\le x<1\}$

8．已知点 F_1 是抛物线 C：$x^2=2py$ 的焦点，点 F_2 为抛物线 C 的对称轴与其准线的交点，过 F_2 作抛物线 C 的切线，切点为 A，若点 A 恰好在以 F_1，F_2 为焦点的双曲线上，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{2}+1$

9．执行如图所示的程序框图，输出的结果为（　　）



A．$\dfrac{19}{3}$　　B．4　　C．$\dfrac{25}{4}$　　D．$\dfrac{13}{2}$

10．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x^2-3x<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A．$(0,3)$　　B．$[2,3)$　　C．$(0,2)$　　D．$(0,+\infty)$

11．下列说法正确的是（　　）

A．“若 $a>1$，则 $a^2>1$”的否命题是“若 $a>1$，则 $a^2\le 1$”

B．“若 $am^2<bm^2$，则 $a<b$”的逆命题为真命题

C．$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $3^{x_0}>4^{x_0}$ 成立

D．“若 $\sin\alpha\ne\dfrac{1}{2}$，则 $\alpha\ne\dfrac{\pi}{6}$”是真命题

12．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-2)$，$N(1,0)$，若动点 M 满足 $\dfrac{|MA|}{|MO|}=\sqrt{2}$ ，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围是（　　）

A．$[0,2]$　　　　B．$\left[0,2\sqrt{2}\right]$

C．$[-2,2]$　　　　D．$\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$

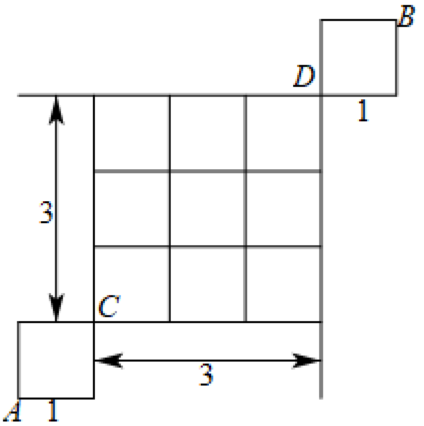
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$(2x-1)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为__________（用具体数据作答）.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-\dfrac{3}{2},x\geq 0\\ 2^{x}-\dfrac{3}{2},x<0\end{cases}$ ，若 $f(3m-1)>f(2-m)$，则实数 m 的取值范围为__________.

15．若幂函数 $f(x)=x^a$ 的图象经过点 $\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则其单调递减区间为_______.

16．如图，机器人亮亮沿着单位网格，从 A 地移动到 B 地，每次只移动一个单位长度，则亮亮从 A 移动到 B 最近的走法共有____种.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_4=\dfrac{1}{8}$.设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $b_1=-1$，$a_n+b_n=-\dfrac{1}{2}S_{n-1}$（$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）证明：数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 是等差数列;

（3）是否存在等差数列 $\{c_n\}$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n\leq c_n\leq a_n$？若存在，求出所有符合题意的等差数列 $\{c_n\}$；若不存在，请说明理由.

18.（12 分）设函数 $f(x)=ax(2+\cos x)-\sin x$， $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数.

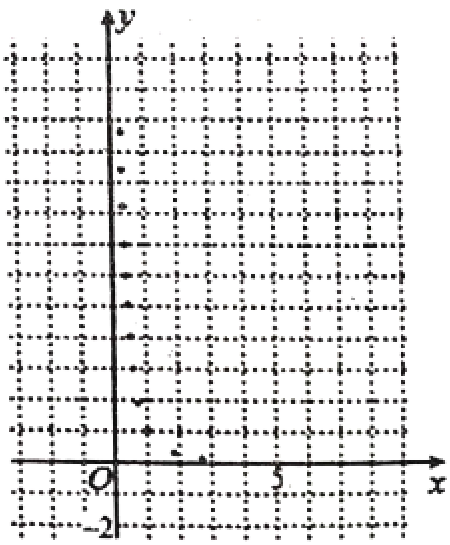
（1）若 $a=1$，证明 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上没有零点；

（2）在 $x\in(0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

19.（12 分）某学生为了测试煤气灶烧水如何节省煤气的问题设计了一个实验，并获得了煤气开关旋钮旋转的弧度数 x 与烧开一壶水所用时间 y 的一组数据，且作了一定的数据处理（如下表），得到了散点图（如下图）.

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{10}\left(w_i-\overline{w}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$	$\sum_{i=1}^{10}\left(w_i-\overline{w}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$
1.47	20.6	0.78	2.35	0.81	-19.3	16.2

表中 $w_i=\frac{1}{x_i^2}$， $\overline{w}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}w_i$.



（1）根据散点图判断， $y=a+bx$ 与 $y=c+\frac{d}{x^2}$ 哪一个更适宜作烧水时间 y 关于开关旋钮旋转的弧度数 x 的回归方程类型？（不必说明理由）

（2）根据判断结果和表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（3）若单位时间内煤气输出量 t 与旋转的弧度数 x 成正比，那么，利用第（2）问求得的回归方程知 x 为多少时，烧开一壶水最省煤气？

附：对于一组数据 $\left(u_1,v_1\right),\left(u_2,v_2\right),\left(u_3,v_3\right),\cdots,\left(u_n,v_n\right)$，其回归直线 $v=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘法估计值分别为 $\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)\left(v_i-\overline{v}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)^2}$， $\hat{\alpha}=\overline{v}-\beta\overline{u}$

20．（12 分）已知函数 $f(x)=\ln\frac{1}{2x}-ax^2+x(a\geq 0)$．

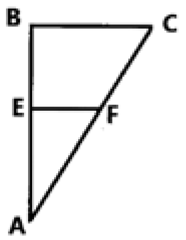
（1）讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

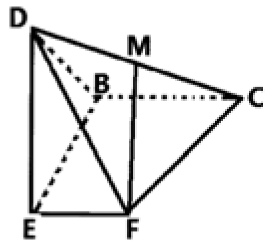
（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，证明 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}>\frac{3}{4}-\ln 2$．

21．（12 分）如图在直角 ΔABC 中，B 为直角，$AB=2BC$，E，F 分别为 AB，AC 的中点，将 ΔAEF 沿 EF 折起，使点 A 到达点 D 的位置，连接 BD，CD，M 为 CD 的中点．

（Ⅰ）证明：$MF\perp$ 面 BCD；

（Ⅱ）若 $DE\perp BE$，求二面角 $E-MF-C$ 的余弦值．





22．（10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且点 (n,S_n) $(n\in N^*)$ 在函数 $y=2^{x+1}-2$ 的图像上；

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=0$，$b_{n+1}+b_n=a_n$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）在第（2）问的条件下，若对于任意的 $n\in N^*$，不等式 $b_n<\lambda b_{n+1}$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围；

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$；再由基本不等式可求得 $4|AF|+|BF|$ 的最小值.

【详解】

由抛物线标准方程可知 **p=2**

因为直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$$

所以 $4|AF|+|BF|$

$$=\left(4|AF|+|BF|\right)\cdot\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)$$

$$=4+1+\left(\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)$$

因为 $|AF|$、$|BF|$ 为线段长度，都大于 **0**，由基本不等式可知

$$4+1+\left(\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geq 5+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\times\frac{4|AF|}{|BF|}}$$

$$\geq 5+2\times 2$$

≥ 9，此时 $|BF|=2|AF|$

所以选 **B**

【点睛】

本题考查了抛物线的基本性质及其简单应用，基本不等式的用法，属于中档题.

2、**D**

【解析】

由题意利用两个向量坐标形式的运算法则，两个向量平行、垂直的性质，得出结论.

【详解】

∵向量 $\vec{a}=$（**1**，－ **2**），$\vec{b}=$（**3**，－ **1**），∴$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标对应不成比例，故 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不平行，故排除 ***A***；

显然，$\vec{a}\bullet\vec{b}=$ **3+2≠0**，故 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不垂直，故排除 ***B***；

∴$\vec{a}-\vec{b}=$（－ **2**，－ **1**），显然，$\vec{a}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 的坐标对应不成比例，故 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 不平行，故排除 ***C***；

∴$\vec{a}\bullet$（$\vec{a}-\vec{b}$）＝－ **2+2＝0**，故 $\vec{a}\perp$（$\vec{a}-\vec{b}$），故 ***D*** 正确，

故选：***D.***

【点睛】

本题主要考查两个向量坐标形式的运算，两个向量平行、垂直的性质，属于基础题.

3、**C**

【解析】

在长方体中 $AB//C_1D_1$， 得 DD_1 与平面 ABC_1 交于 D_1，过 D 做 $DO\perp AD_1$ 于 O，可证 $DO\perp$ 平面 ABC_1D_1，可得 $\angle DD_1A$ 为所求解的角，解 $Rt\Delta ADD_1$，即可求出结论.

【详解】

在长方体中 $AB//C_1D_1$，平面 ABC_1 即为平面 ABC_1D_1，

过 D 做 $DO\perp AD_1$ 于 O，$\because AB\perp$ 平面 AA_1D_1D，

$DO\subset$ 平面 $AA_1D_1D,\therefore AB\perp DO, AB\cap AD_1=D$，

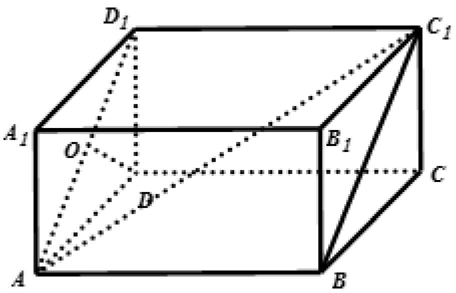
$\therefore DO\perp$ 平面 ABC_1D_1，$\therefore\angle DD_1A$ 为 DD_1 与平面 ABC_1 所成角，

在 $Rt\Delta ADD_1, DD_1=AA_1=\sqrt{3}, AD=\sqrt{2},\therefore AD_1=\sqrt{5}$，

$\therefore\cos\angle DD_1A=\dfrac{DD_1}{AD_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

$\therefore$ 直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

故选:C.



【点睛】

本题考查直线与平面所成的角，定义法求空间角要体现“做”“证”“算”，三步骤缺一不可，属于基础题.

4、C

【解析】

利用三角形 ΔOMF_1 与 ΔPF_2F 相似得 $|PF_1|=2|PF_2|$，结合双曲线的定义求得 a,b,c 的关系，从而求得双曲线的渐近线方程。

【详解】

设 $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$，

由$\left|F_1O\right| = 2|OM|$，$\Delta OMF_1$与$\Delta PF_2F$ 相似，

所以$\dfrac{\left|F_1O\right|}{|OM|} = \dfrac{\left|PF_1\right|}{\left|PF_2\right|} = 2$，即$\left|PF_1\right| = 2\left|PF_2\right|$，

又因为$\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a$，

所以$\left|PF_1\right| = 4a$，$\left|PF_2\right| = 2a$，

所以$4c^2 = 16a^2 + 4a^2$，即$c^2 = 5a^2$，$b^2 = 4a^2$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为$y = \pm 2x$.

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线几何性质、渐近线方程求解，考查数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力。

5、C

【解析】

由复数除法的运算法则求出z，再由模长公式，即可求解.

【详解】

由$z = \dfrac{2i(1+i)}{1-i^2} = -1+i, |z| = \sqrt{2}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查复数的除法和模，属于基础题.

6、A

【解析】

列出每一步算法循环，可得出输出结果S的值.

【详解】

$i = 1 \le 8$满足，执行第一次循环，$S = 0 + (-1)^1 \times 1^2 = -1$，$i = 1+1 = 2$；

$i = 2 \le 8$成立，执行第二次循环，$S = -1 + (-1)^2 \times 2^2 = 3$，$i = 2+1 = 3$；

$i = 3 \le 8$成立，执行第三次循环，$S = 3 + (-1)^3 \times 3^2 = -6$，$i = 3+1 = 4$；

$i = 4 \le 8$成立，执行第四次循环，$S = -6 + (-1)^4 \times 4^2 = 10$，$i = 4+1 = 5$；

$i = 5 \le 8$成立，执行第五次循环，$S = 10 + (-1)^5 \times 5^2 = -15$，$i = 5+1 = 6$；

$i=6\le 8$成立，执行第六次循环，$S=-15+\left(-1\right)^{6}\times 6^{2}=21$，$i=6+1=7$；

$i=7\le 8$成立，执行第七次循环，$S=21+\left(-1\right)^{7}\times 7^{2}=-28$，$i=7+1=8$；

$i=8\le 8$成立，执行第八次循环，$S=-28+\left(-1\right)^{8}\times 8^{2}=36$，$i=8+1=9$；

$i=9\le 8$不成立，跳出循环体，输出S的值为36，故选：**A.**

【点睛】

本题考查算法与程序框图的计算，解题时要根据算法框图计算出算法的每一步，考查分析问题和计算能力，属于中等题.

7、**C**

【解析】

先化简集合 **A,B**，结合并集计算方法，求解，即可.

【详解】

解得集合$A=\left\{x\middle|\left(x-2\right)\left(x+1\right)\le 0\right\}=\left\{x\middle|-1\le x\le 2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x<1\right\}$

所以$A\cup B=\left\{x\middle|x\le 2\right\}$，故选 **C**.

【点睛】

本道题考查了集合的运算，考查了一元二次不等式解法，关键化简集合 **A,B**，难度较小.

8、**D**

【解析】

根据抛物线的性质，设出直线方程，代入抛物线方程，求得 k 的值，设出双曲线方程，求得 $2a=|AF_2|-|AF_1|=(\sqrt{2}-1)p$，利用双曲线的离心率公式求得 e.

【详解】

直线 F_2A 的直线方程为：$y=kx-\dfrac{p}{2}$，$F_1(0,\dfrac{p}{2})$，$F_2(0,-\dfrac{p}{2})$，

代入抛物线 C：$x^2=2py$ 方程，整理得：$x^2-2pkx+p^2=0$，

$\therefore\Delta=4k^2p^2-4p^2=0$，解得：$k=\pm1$，

$\therefore A(p,\dfrac{p}{2})$，设双曲线方程为：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，

$|AF_1|=p$，$|AF_2|=\sqrt{p^2+p^2}=\sqrt{2}p$，

$2a=|AF_2|-|AF_1|=(\sqrt{2}-1)p$，

$2c=p$，

∴离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，

故选：D.

【点睛】

本题考查抛物线及双曲线的方程及简单性质，考查转化思想，考查计算能力，属于中档题.

9、A

【解析】

模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 x,M 的值，当 $x=3$，$M=\frac{19}{3}>4$，退出循环，输出结果.

【详解】

程序运行过程如下：

$x=3$，$M=0$；$x=\frac{2}{3}$，$M=\frac{2}{3}$；$x=-\frac{1}{2}$，$M=\frac{1}{6}$；

$x=3$，$M=\frac{19}{6}$；$x=\frac{2}{3}$，$M=\frac{23}{6}$；

$x=-\frac{1}{2}$，$M=\frac{10}{3}$；$x=3$，$M=\frac{19}{3}>4$，退出循环，输出结果为 $\frac{19}{3}$，

故选：A.

【点睛】

该题考查的是有关程序框图的问题，涉及到的知识点有判断程序框图输出结果，属于基础题目.

10、B

【解析】

可解出集合 B，然后进行补集、交集的运算即可.

【详解】

$\because B=\left\{x\middle|x^2-3x<0\right\}=(0,3)$，$A=\left\{x\middle|x<2\right\}$，则 $\complement_U A=[2,+\infty)$，因此，$(\complement_U A)\cap B=[2,3)$.

故选：B.

【点睛】

本题考查补集和交集的运算，涉及一元二次不等式的求解，考查运算求解能力，属于基础题.

11、D

【解析】

选项 A，否命题为“若 $a\le 1$，则 $a^2\le 1$”，故 A 不正确.

选项 B，逆命题为“若 $a<b$，则 $am^2<bm^2$”，为假命题，故 B 不正确.

选项 C，由题意知对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $3^x<4^x$，故 C 不正确.

选项 D，命题的逆否命题"若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$"为真命题，故"若 $\sin\alpha\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}$"是真命题，所以 D 正确.

选 D.

12、D

【解析】

设出 M 的坐标为 (x,y)，依据题目条件，求出点 M 的轨迹方程 $x^2+(y-2)^2=8$，

写出点 M 的参数方程，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=2\sqrt{2}\cos\theta$，根据余弦函数自身的范围，可求得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 结果.

【详解】

设 $M(x,y)$ ，则

$\because\dfrac{|MA|}{|MO|}=\sqrt{2}$， $A(0,-2)$

$\therefore\dfrac{\sqrt{x^2+(y+2)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

$\therefore x^2+(y+2)^2=2(x^2+y^2)$

$\therefore x^2+(y-2)^2=8$ 为点 M 的轨迹方程

$\therefore$点 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos\theta\\y=2+2\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数）

则由向量的坐标表达式有：

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=2\sqrt{2}\cos\theta$

又$\because\cos\theta\in[-1,1]$

$\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=2\sqrt{2}\cos\theta\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

故选：D

【点睛】

考查学生依据条件求解各种轨迹方程的能力，熟练掌握代数式转换，能够利用三角换元的思想处理轨迹中的向量乘积，属于中档题.求解轨迹方程的方法有：①直接法；②定义法；③相关点法；④参数法；⑤待定系数法

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。