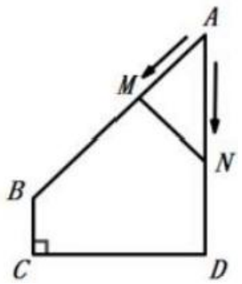
第7讲二次函数

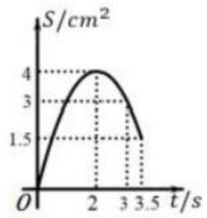
一、单选题

1.(2022·广东·九年级统考竞赛)如图，在四边形ABCD中，AD//BC,∠A=45°,∠C=90°,AD=4cm,

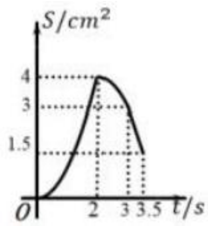
CD=3cm. 动点M,N 同时从点A 出发，点M以 √Zcm/s的速度沿AB向终点B 运动，点N以2cm/s的速度沿折线AD-DC 向终点C 运动．设点N 的运动时间为ts, 。AMN 的面积为Scm^2, 则下列图象能大致反映S 与 t 之间函数关系的是(　)



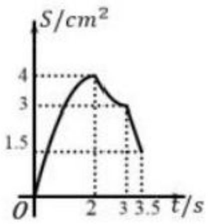
A.



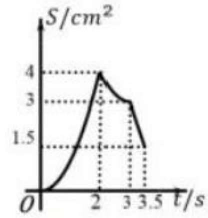
B.



C.



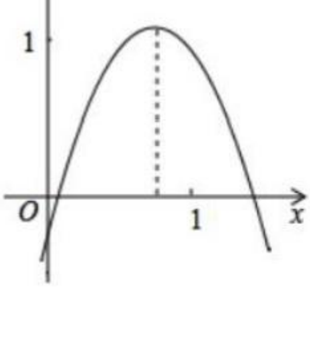
D.



2.(2021·全国·九年级竞赛)一条抛物线$y=ax^2+bx+c$ 的顶点为(4,-11),且与x 轴的两个交点的横坐标为一正一负，则a,b,c 中为正数的(　)

A. 只有a　　B. 只有b　　C. 只有c　　D. 只有a 和b

3.(2021·全国·九年级竞赛)已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列代数式： ab,ac,a+b+c, a-b+c,2a+b,2a-b 中，其值为正的代数式的个数为(　)



A. 2　个　　　　B.3　个　　　　C.4　个　　　　D. 4　个以上

4. (2021・全国・九年级竞赛) 在平面直角坐标系xOy中，作抛物线A关于x 轴对称的抛物线B, 再将抛物线B向左平移2个单位，向上平移1个单位，得到的抛物线C 的函数解析式是$y=2(x+1D^{2}-1$, 则抛物线A所对应的的函数解析式是(　)

A. $y=-2(x+3)^2-2$　　　　B. $y=-2(x+3)^2+2$

C. $y=-2(x-1)^2-2$　　　　D. $y=-2(x-1)^2+2$

5.　(2021・全国・九年级竞赛) 已知$a-b=4,ab+c^2+4=0$,　　　则 $a+b=$(　　).

A.4　　　　B.0　　　　C.2　　　　D.-2

6.　(2021・全国・九年级竞赛) 在平面直角坐标系中，如果横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点，将二次函数 $y=-x^2+6x-\frac{27}{4}$的图象与x 轴所围成的封闭图形染成红色，则在此红色区域内部及其边界上的整点的个数是(　　)

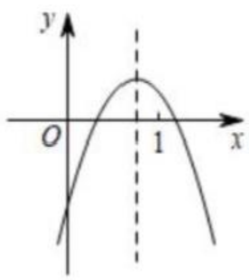
A.5　　　　B.6　　　　C.7　　　　D.8

7. (2023春・浙江宁波・九年级校联考竞赛) 二次函数$y=x^2+2x+c$ 的图象与x轴的两个交点为$A(x,0)$, $B(x_2,O)$,且$x_1<x_2$, 点$P(m,n)$是图象上一点，那么下列判断正确的是(　)

A.　当$n>0$　时，　$m<x_1$　　　　B.　当$n>0$　时，$m>x_2$

C.　当$n<0$　时，$m<0$　　　　D.　当$n<0$　时，$x<m<x_2$

8. (2017秋・江苏镇江・九年级竞赛) 函数$y=ax^2+bx+c$　图像的大致位置如图所示，则$ab,bc,2a+b,(a+c)^2-b^2$, $(a+b)^2-c^2,b^2-a^2$　等代数式的值中，正数有(　)



A. 2　个　　　　B.3　个　　　　C. 4　个　　　　D.5　个

9. (2022・福建・九年级统考竞赛) 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$　的图象交x 轴于A(xi,O),B(xz,O)　两点，交y 轴于点C(0,3),　若$x_1+x_2=4$,　　且△ABC的面积为3, 则a+b(　　)

A.3　　　　B.-5　　　　C.-3　　　　D.5

二、解答题

10.(2022·福建·九年级统考竞赛)已知开口向上的抛物线$y=ax^2+bx+c$ 与直线：$y=ax+c$,$y=cx+a$ 中的每一条都至多有一个公共点.

⑴才长$\frac{c}{a}$的最大值：

(2)当$\frac{c}{a}$取最大值时，设直线 $y=\frac{31}{4}a$交抛物线$y=ax^2+bx+c$ 于 A,B 两点，C 为抛物线的顶点，若△ABC内切圆的半径为1,求a 的值.

11.(2023春·浙江宁波·九年级校联考竞赛)已知抛物线$y_1=ax^2+bx$.

(1)若此抛物线与x 轴只有一个公共点且过点$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

①求此抛物线的解析式；

②直线$y_2=-x+k$ 与该抛物线交于点A(-2,m) 和点B. 若$y_1<y_2$，求x 的取值范围.

(2)若a>0, 将此抛物线向上平移c 个单位(c>0) 得到新抛物线y_3，当x=c 时，$y_3=0$; 当 0<x<c 时，$y_3>0$. 试比较ac 与1的大小，并说明理由.

12.(2022春·湖南长沙八年级校联考竞赛)如图1,抛物线$y=a^2+(a+3)x+3(a\neq0)$ 与x轴交于点A(4,0), 与y轴交于点B, 在x轴上有一动点E(m,0)(0<m<4), 过点E 作x轴的垂线交直线AB 于点N, 交抛物线于点P, 过 点P 作 PM⊥AB于点M.

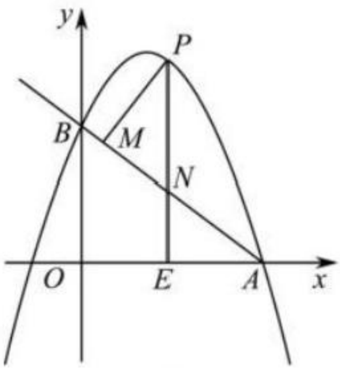


图1

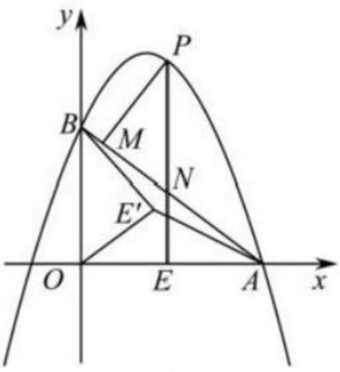


图2

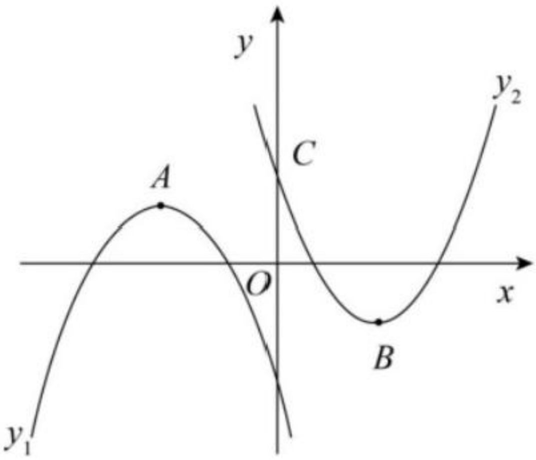
(1)求a 的值和直线AB的函数表达式：

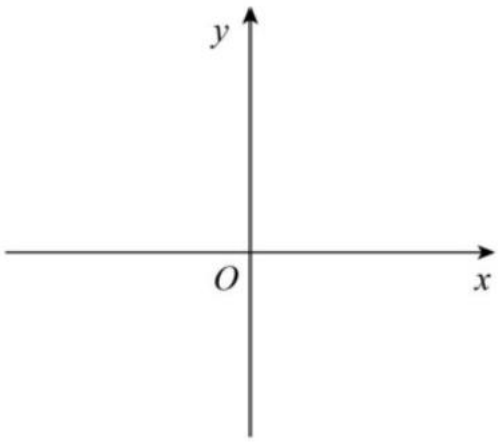
(2)设△PMN的周长为C,△AEN 的周长为C_2, 若$\frac{C_1}{C_2}=\frac{6}{5}$求 m 的值.

(3)如图2,在(2)的条件下，将线段 OE 绕点O 逆时针旋转得到OE'，旋转角为α (0°<a<90°)， 连接

$E'A$、$E'B$，求$E'A+\frac{2}{3}E'B$的最小值.

13.(2022·广东·九年级统考竞赛)定义：如果二次函数$y=a_1x^2+b_1x+c_1$($a_1\neq0$, a_1, b_1, c_1 是常数)与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$($a_2\neq0$, a_2, b_2, c_2 是常数)满足$a_1+a_2=0$, $b_1=b_2$, $c_1+c_2=0$，则这两个函数互为“N”函数，





备用图

(1)写出$y=-x^2+x-1$ 的“N”函数的表达式；

(2)若题(1)中的两个“N”函数与正比例函数$y=kx(k\neq0)$ 的图像只有两个交点，求k 的值；

(3)如图，二次函数y_1与y_2互为“N”函数，A、B 分别是“N”函数y_1与y_2图象的顶点， C 是“N”函数y_2与y轴正半轴的交点，连接AB、AC、BC， 若点A(-2,1) 且ABC 为直角三角形，求点C 的坐标.

14.(2021·全国·九年级竞赛)某公司生产的A 种产品，它的成本是2元，售价是3元，年销售量为100万件，为了获得更好的效益，公司准备拿出一定的资金做广告.根据经验，每年投入的广告费是x(10 万元)时，产品的年销售量将是原销售量的y 倍，且y 是 x 的二次函数，它们的关系如下表：

x(10万元)	0	1	2	
y	1	1.5	1.8	

(1)求y 与 x 的函数关系式；

(2)如果把利润看做是销售总额减去成本费和广告费，试写出年利润S(10 万元)与广告费x(10 万元)的函数关系式；

(3)如果投入的年广告费为10~30万元，问广告费在什么范围内，公司获得的年利润随广告费的增大而增大？

15.(2017秋·浙江杭州·八年级竞赛)如图1，在△OMN 中，∠MON=90°,OM=6cm,∠OMN=30°. 等边△ABC

的顶点B与点O重合， BC在OM 上，点A恰好在MN上.

(1)求等边△ABC 的边长；

(2)如图2,将等边△ABC沿 OM 方向以1cm/s 的速度平移，边AB、AC分别与MN交于点E、F,在△ABC平移的同时，点P从△ABC的顶点B 出发，以2cm/s的速度沿折线 B→A→C运动，当点P达到点C时，点P 停止运动，△ABC 也随之停止平移. 设△ABC平移时间为t(s)

①用含t的代数式表示 AE 的长，并写出t的取值范围；

②在点P沿折线 B→A→C运动的过程中，是否在某一时刻，点P、E、F 组成的三角形为等腰三角形?若存在，求出此时t值；若不存在，请说明理由.

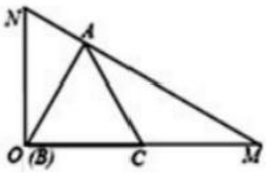


图1

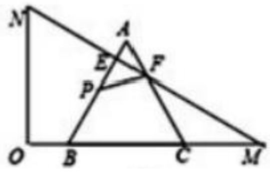


图2

16.(2023-黑龙江哈尔滨·校考二模)如图1,在平面直角坐标系xoy中，直线$y=2x+n$ 与抛物线$y=x^2+bx+c$交于点A,B, 点A的横坐标为1,且为抛物线的顶点，点B 的横坐标为3.

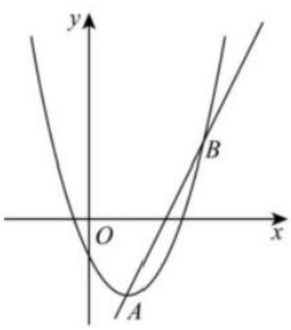


图1

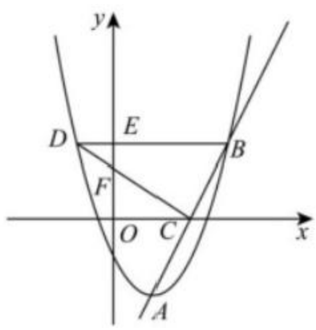


图2

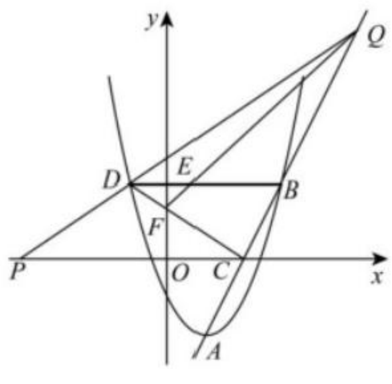


图3

(1)求b的值；

(2)如图2,作BD//x 轴，交抛物线于另一点D, 交y轴于点E, 若线段AB与x轴交于点C（ 点C不与点A, B重合),连接CD交y轴于点F, 设 DEF的面积为d, 求d关于c的函数关系式，并直接写出自变量c的取值范围；

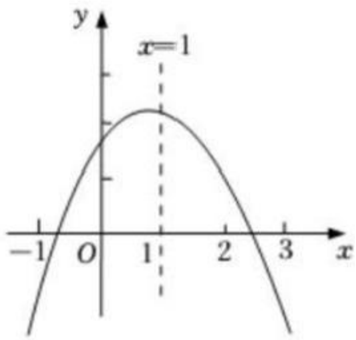
(3)如图3,在(2)的条件下，在AB延长线上取点Q, 连接QD并延长，交x轴于点P, 连接FQ, 若DP=DC, △DFQ的面积为12d, 求c与n的值.

三、填空题

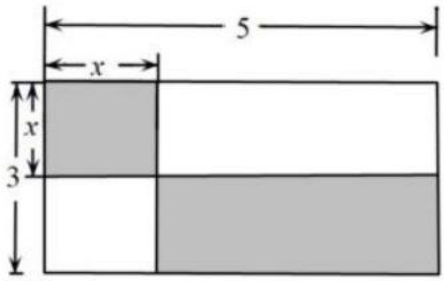
17. (2023春・浙江宁波・九年级校联考竞赛) 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$, a、b、c 为常数的图象如图所示，下列4个结论.

①$abc<0$;②$b<a+c$;③$c<4b$;④$a+b<k(ka+b)$(k 为常数，且$k\neq1$).

其中正确的结论有__________(填写序号).



18. (2022. 广东・九年级统考竞赛) 如图，一个长为5, 宽为3的矩形被平行于边的两条直线所割，其中矩形的左上角是一个边长为x 的正方形，则阴影部分面积的最小值为__________



19. (2021・全国・九年级竞赛) 设二次函数 $y=x^2+2ax+\frac{a^2}{2}(a<0)$ 的图象顶点为A, 与 x 轴交点为B、C, 当。ABC为等边三角形时， a 的值为________.

20. (2021・全国・九年级竞赛) 已知直线 y=b(b 为实数) 与函数 $y=k^2-4x+3|$ 的图像至少有三个公共点，则实数 b 的取值范围____________

参考答案：

1.B

【分析】先求出AB=3 √Zcm, 可知M 由A 到B 需3秒，N 由A 到D 需2秒，到C 需3.5秒.

分三种情况讨论：(1)当N 在AD 上时，即 O<t≤2, 画出图形求解；(2)当N 在CD 上且 M 没到达B 时，即2<t<3,　画出图形求解；(3)当N 在 CD 上 且M 与B 重合时，即3≤t≤3.5,画出图形求解.即可选出正确答案.

【详解】解：∠A=45°,CD=3cm,

AB=√3²+3²=3√Zcm,

∴M 由 A 到 B 需3秒，N 由 A 到 D 需2秒，到C 需3．5秒，

下面分三种情况讨论：

(1)当N 在 AD 上时，即0<t≤2, 如图1,

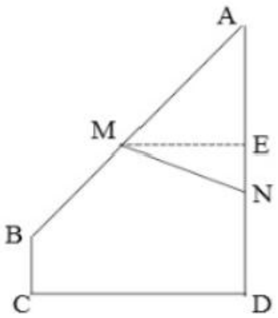


图 1

作ME⊥AD 于 E,

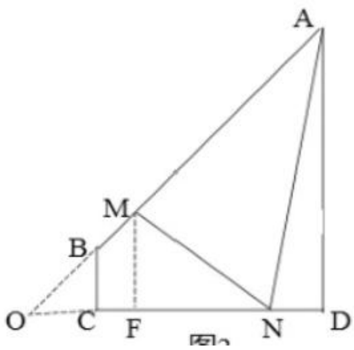
可知 AN=2t,AM=√Z,

∴EM=t,

$\therefore s=\frac{1}{2}AN\cdot ME=\frac{1}{2}\times 2t\cdot t=t^2$

故此段图像是一条开口向上的抛物线；

(2)当N 在 CD 上且M 没到达B 时，即2<t<3,　如图2,



作MF⊥CD 于 F,延长 AB 与 DC 的延长线交于O,

可知 DN=2t-4,AM=√Z,OD=4,0A=4√2,

∴ON=4-DN=8-2t,OM=4√Z-√Zr,

∴MF=4-t,

$\therefore s_{\Delta OAD}=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}\times4\times4=8$,

$s_{\Delta NAD}=\frac{1}{2}ND\cdot AD=\frac{1}{2}\times(2t-4)\times4=4t-8$,

$s_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}ON\cdot MF=\frac{1}{2}\times(8-2t)\cdot(4-t)=(4-t)^2$

∴$s=8-(4t-8)-(4-t)^2=-t^2+4t$,

故此段图像是一条开口向下的抛物线;

(3)当N 在 CD 上且M 与 B 重合时，即3≤t≤3.5,如图3,

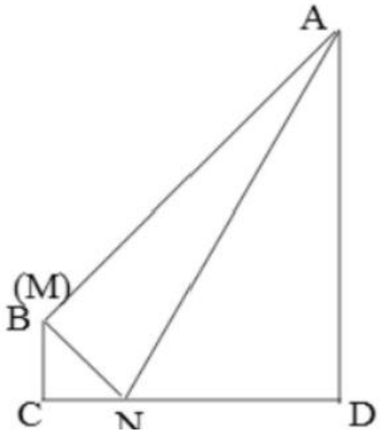


图3

可知 BC=1,DN=2t-4,

∴CN=3-DN=7-2t,

$\therefore s_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot CD=\frac{1}{2}\times5\times3=\frac{15}{2}$.

$s_{\Delta NAD}=\frac{1}{2}ND\cdot AD=\frac{1}{2}\times(2t-4)\times4=4t-8$,

$s_{\Delta BCN}=\frac{1}{2}BC\cdot CN=\frac{1}{2}\times1\times(7-2t)=\frac{7}{2}-t$,

$\therefore s=\frac{15}{2}-(4t-8)-(\frac{7}{2}-t)=12-3t$,

故此段图像是一条呈下降趋势的线段;

综上所述，答案是 B.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象：函数图象是典型的数形结合，图象应用信息广泛,

通过看图获取信息，不仅可以解决生活中的实际问题，还可以提高分析问题、解决问题的能力. 解决本题的关键是利用分类讨论的思想求出S 与 t 的函数关系式.

2.A

【分析】根据b^2-4ac 与零的关系即可判断出二次函数$y=ax^2+bx+c$ 的图象与x 轴交点的个数；另外，与x 轴的两个交点x_1、x_2，且 $x_1 x_2=\frac{c}{a}<0$，由这些已知条件，即可做出判断.

【详解】解：由题意，得

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 ① \\ \frac{c}{a}<0 ② \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-11 ③ \\ -\frac{b}{2a}=4 ④ \end{cases}$$

由③得：$\frac{b^2-4ac}{4a}=11$ ⑤

由①、⑤得，$\frac{b^2-4ac}{4a}=11>0$，即$4a>0$

∴$a>0$ ⑥

由②、⑥得，$c<0$

由④、⑥得，$b<0$

∴$a>0,b<0,c<0$

故选：A

【点睛】在解关于二次函数与一元二次方程时，充分利用顶点坐标，和根的判别式来解答，这样会降低题的难度，提高做题效率.

3.A

【分析】根据抛物线的开口向下可判断a 的符号，根据抛物线对称轴的位置可判断ab 的符号，根据抛物线与y 轴的交点可判断c 的符号，进而可判断ac 的符号；

由于$x=1$时，$y=a+b+c$,$x=-1$ 时，$y=a-b+c$，结合图象即可判断$a+b+c$与$a-b+c$ 的符号；

由对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}<1$并结合a 的符号可判断$2a+b$ 的符号，由a、b 的符号即可判断$2a-b$ 的符号，从而可得答案.

【详解】解：∵图象的开口向下，∴$a<0$, ∵ 图象与y 轴的交点在x 轴下方，∴$c<0$, ∴$ac>0$;

∵对称轴在y 轴右侧，∴$-\frac{b}{2a}>0$,∴$ab<0$;

由图可知，当x=1 时 ，y=a+b+c>0, 当 x=-1 时 ，y=a-b+c<0;

$\because -\frac{b}{2a}<1, a<0, \therefore -b>2a, \therefore 2a+b<0;$

$\because$ a<0,b>0,$\therefore$ 2a-b<0.

综上，其值为正的代数式有2个.

故选： A.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质和二次函数与其系数之间的关系，属于常考题型，熟练掌握二次函数的图象与性质、灵活应用数形结合的思想方法是解答的关键.

4.D

【分析】易得抛物线C 的顶点，进而可得抛物线B 的顶点坐标，根据顶点式及平移前后二次项系数不变可得抛物线 B 的解析式，而根据关于x 轴对称的两条抛物线的顶点的横坐标相等，纵坐标互为相反数，二次项系数互为相反数可得抛物线A 所对应的的函数表达式

【详解】易得抛物线C 的顶点(－1,－1),

$\because$ 是向左平移2个单位，向上平移1个单位得到抛物线C,

$\therefore$ 抛物线B 的顶点坐标(1,-2),

可设抛物线B 的解析式为$y=2(x-h)^2+k$, 代入得$y=2(x-D^2-2$,

易得抛物线A 的二次项系数为-2,顶点坐标为(1,2),

$\therefore$ 抛物线 A 的解析式为$y=-2(x-D^2+2$,

故正确答案为 D.

【点睛】此题主要考查二次函数图像的平移问题，只需看顶点坐标的如何平移得到即可；关于x 轴对称的两条抛物线的顶点的横坐标相等，纵坐标相反，二次项系数互为相反数

5.B

【分析】先将字母 b 表示字母a, 代入$ab+c^2+4=0$, 转化为非负数和的形式，根据非负数的性质求出a、b、c 的值，从而得到 a+b 的值.

【详解】$\because$ a-b=4

$\therefore$ a=b+4 代入$ab+c^2+4=0$, 可得$(b+4)b+c^2+4=0$

$(b+2)^2+c^2=0$ 即b=-2,c=0.

$\therefore$ a=b+4=2

$\therefore$ a+b=0

故选 c.

【点睛】本题考查拆项、添项、配方、待定系数法，解题关键在于熟练掌握计算法则.

6.C

【分析】找到函数图象与x 轴的交点，那么就找到了相应的x 的整数值，代入函数求得y 的值，那么就求得了y 的范围.

【 】指该二次高数化的例，$y=-[(x-3)^2-\frac{9}{4}]$会y=0例. $x=\frac{9}{2}$或号画出图象可知，在红色区域内部及其边界上的整点为(2, 0), (3, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2)七个.

故选C.

【点睛】本题考查了抛物线与坐标轴的相关知识点，解题的关键是能根据二次函数画出其抛物线

7.D

【分析】根据二次函数的图象与性质可进行排除选项.

【详解】解：由二次函数$y=x^2+2x+c$ 可知开口向上，对称轴为直线$x=-1$,

当$x<-1$ 时，y 随x 的增大而减小，当$x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大；

∵$A(x_1,0)$,$B(x,0)$ 是二次函数与x轴的交点，点$P(m,n)$是图象上的一点，

∴当$n>0$ 时，则$m<x_1$ 或$m>x_2$; 故A、B 选项错误；

当$n<0$ 时，则$x_1<m<x_2$, 故D 正确；当$x_2>0$ 且$n<0$ 时，此时有可能$m>0$, 故C错误；

故选D.

【点睛】本题主要考查二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键 .

8.A

【分析】图像开口向下 $a<0$, $c<0$, 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，当$x=1$ 时，$y>0$, 当$x=-1$ 时$y<0$, 由以上信息即可判断.

【详解】解：观察图形，显然， $a<0,c<0,b>0$,

∴$ab<0,bc<0$,

由$-\frac{b}{2a}<1$，得 $b<-2a$, 所以$2a+b<0$;

由$a-b+c<0$ 得 $(a+c)^2-b^2=(a+b+c)$ $(a-b+c)<0$;

由$a+b+c>0$ 得 $a+b>-c>0$,

因此 $(a+b)^2-c^2>0,|b|>|a|,b^2-a^2>0$.

综上所述，仅有 $(a+b)2-c^2,b^2-a^2$ 为正数.

故选A.

【点睛】本题考查二次函数图像与系数的关系，难度一般，认真观察图形分析出a、b、c 的正负是关键.

9.C

【分析】方法一：由根与系数的关系可得$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{a}$ 再利用 $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{16-4\times\frac{3}{a}}=2\sqrt{4-\frac{3}{a}}$列方程求解a,b, 再检验即可得到答案；方法二：不妨设$x_1<x_2$, 由三角形的面积先求解$AB=x_2-x_1=2$, 结合$x_1+x_2=4$, 再

求解x j, x_2, 再利用待定系数法求解a, b, 从而可得答案.

【详解】解：方法一：依题意x, x_2为方程$ax^2+bx+c=0$ 的两根，且c=3.

所以$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{a}$

所以，$AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{16-4\times\frac{3}{a}}=2\sqrt{4-\frac{3}{a}}$，

所以 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}AB\times3=\frac{1}{2}\times2\sqrt{4-\frac{3}{a}}\times3=3$.

解得a=1, 经检验符合题意，

∴ $b=-4a=-4$.

因为函数$y=x^2-4x+3$ 的图象与x轴有两个不同交点，因此a=1,b=-4,c=3 符合要求.

所以a+b=-3.

方法二：不妨设$x<x_2$, 则$AB=x_2-x_1$, 由 。ABC的面积为3, 且C(0, 3), 得AB=2.

所以$AB=x_2-x_1=2$, 又 $x_1+x_2=4$,

解得： $x=1, x_2=3$.

因 此$y=ax^2+bx+c=a(x-1)(x-3)$.

将x=0 代入，得y=3a=3, 所 以a=1.

所以$y=ax^2+bx+c=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$,

因此a+b=1+(-4)=-3.

故选C

【点睛】本题考查的是二次函数的性质， 一元二次方程根与系数的关系，掌握二次函数与x轴的交点坐标的含义是解本题的关键.

10. (1) 5

(2) 1

【分析】(1)联立y=a²fax+c和yawe可得x-0、$x_2=\frac{a-b}{a}$ 再根据题意可得a=b;联立$y=ax^2+bx+c$ 和y=ax+c再结合一元二次根的判别式可得$5a^2-6ac+c^2\le0$, 进而可得

$\left(\frac{c}{a}\right)^2-6\left(\frac{c}{a}\right)+5\le0$ 然后求解即可；

(2)先求出$\frac{c}{a}$取最大值时，求出抛物线$y=ax^2+bx+c$ 的顶点，进而求解方程，然后再说明ABC为等边三角形，最后求得a 的值即可.

(1)

解：由$ax^2+bx+c=ax+c$, 得 x=0, $x_2=\frac{a-b}{a}$,

由抛物线$y=ax^2+bx+c$ 与直线y=ax+c 至多有一个公共点，得a=b,

由$ax^2+bx+c=cx+a$, 及a=b,

得$ax^2+(a-c)x+c-a=0$.

因为抛物线$y=ax^2+bx+c$ 与直线y=cx+a 至多有一个公共点，

所以$\triangle=(a-c)^2-4a(c-a)\le0$,

即$5a^2-6ac+c^2\leqslant0$

结合a>0, 得$\left(\frac{c}{a}\right)^2-6\left(\frac{c}{a}\right)+5\le0$,

解得$1\le\frac{c}{a}\le5$

又抛物线$y=ax^2+ax+5a$ 与直线y=ax+5a,y=5ax+a 中的每一条都至多一个公共点.

所比$\frac{c}{a}$的最大值为5.

(2)

解：兰当$\frac{c}{a}$取最大值时，抛物线为$y=ax^2+ax+5a$, 其顶点$C\left(-\frac{1}{2},\frac{19}{4}a\right)$.