数列中的情境创新与数学文化

现在高考越来越重视情境命题,体现了数学应用的重要性,目前更是提出了数学要增加复杂情境的命题说法.数列与现实生活联系密切,也成为情境问题的常见命题背景,特别是数学文化问题是近年来高考命题的亮点,此类问题把数学史、数学之美、文字之美与数学思维及数学方法结合起来,可有效考查我们在新情境中对数学文化的鉴赏、对数学知识的理解和对数学方法的迁移,因此备受命题者青睐,世界数学历史上,尤其是我国浩瀚的传统文化中,有丰富的与数列有关的数学文化背景知识,这也成为命题的角度

.

角度一　数列中的数学文化

例1(1)(2024·广东深圳模拟)古印度数学家婆什伽罗提出如下问题:某人给一个人布施,初日施2子安贝(古印度货币单位),以后逐日倍增,问一月共施几何?在这个问题中,以一个月31天计算,记此人第n日布施了a_n子安贝(其中$1\leqslant n\leqslant 31,n\in\mathbf{N}^*$),数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$.若关于$n$的不等式$S_n-254<a_{n+1}^2-ta_{n+1}$恒成立,则实数$t$的取值范围为(　C　)

A.$(-\infty,28)$　　B.$(-\infty,30)$

C.$(-\infty,31)$　　D.$(-\infty,32)$

解析 由题意可知,数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,

故$a_n=2^n(1\leqslant n\leqslant 31,n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

由 $S_n-254<a_{n+1}^2-ta_{n+1}$,得 $2^{n+1}-256<2^{2n+2}-t\cdot 2^{n+1}$,

整理得 $t<\frac{256}{2^{n+1}}+2^{n+1}-1$ 对任意 $1\leqslant n\leqslant 31$,且 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立.

又$\frac{256}{2^{n+1}}+2^{n+1}-1\geqslant 2\sqrt{\frac{256}{2^{n+1}}\times 2^{n+1}}-1=31$,

当且仅当$2^{n+1}=16$,

即$n=3$时,等号成立,

所以$t<31$,即实数t的取值范围是$(-\infty,31)$,

故选C.

角度一 角度二

(2)(2024·上海浦东新区模拟)天干地支纪年法源于中国,中国自古便有十天干与十二地支,十天干即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸;十二地支即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥.天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配,排列起来,天干在前,地支在后,天干由“甲”起,地支由“子”起,例如,第一年为“甲子”,第二年为“乙丑”,第三年为“丙寅”……以此类推,排列到“癸酉”后,天干回到“甲”重新开始,即“甲戌”“乙亥”,然后地支回到“子”重新开始,即“丙子”……以此类推.2024年是甲辰年,高斯出生于1777年,该年是(　A　)

A.丁酉年　　B.丁戌年

C.戊酉年　　D.戊戌年

解析 天干以十年为一个周期,地支以十二年为一个周期.

1777年与2024年相隔2 024-1 777=247年,

$247=24\times10+7$,即天干有24个周期,余7年;

$247=12\times20+7$,即地支有20个周期,余7年.

故甲往前数7年为丁,辰往前数7年为酉,故1777年为丁酉年.

故选A.

角度一 角度二

角度二　数列中的新定义问题

例2(2024·湖北荆州三模)"H数列"定义:数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,如果对于任意的正整数n,总存在正整数m使$S_n=a_m$,则称数列$\{a_n\}$是"H数列".

(1)数列$\{b_n\}$的前n项和为$T_n=2^n$,求证:数列$\{b_n\}$是"H数列";

(2)已知数列$\{c_n\}$是"H数列",且数列$\{c_n\}$是首项为1,公差小于0的等差数列,求数列$\{c_n\}$的通项公式;

(3)若数列$\{d_n\}$满足:$d_n=b_nc_n$,求数列$\{d_n\}$的前n项和D_n.

(1)证明　当$n=1$时,$b_1=T_1=2$.

当$n\geqslant2$时,$b_n=T_n-T_{n-1}=2^{n-1}$,

$$\therefore b_n=\begin{cases}2, n=1,\\2^{n-1}, n\geq 2,\end{cases}$$

即$T_n=b_{n+1}$.

∴数列$\{b_n\}$是“H数列”.

(2)解 设数列$\{c_n\}$的公差为 d,数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$.

对$\forall n\in\mathbf{N}^*,\exists m\in\mathbf{N}^*$,

使 $S_n=c_m$,$n+\frac{n(n-1)}{2}d=1+(m-1)d$.

取 $n=2$,得 $1+d=(m-1)d$,解得 $m=2+\frac{1}{d}$.

$\because d<0,\therefore m<2$.

又$m\in\mathbf{N}^*,\therefore m=1$,

故 $d=-1,c_n=2-n,S_n=\frac{n(3-n)}{2}$是小于 2 的正整数.

此时对于任意的正整数n,总存在正整数m使$S_n=c_m$,

故$c_n=2-n$.

角度一 角度二

(3)解 由(1),(2)可知 $b_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^{n-1},n\geq 2,\end{cases}$ $c_n=2-n$.

当$n\geqslant 2$时,$D_n=2\times 1+2\times 0+2^2\times(-1)+2^3\times(-2)+\cdots+2^{n-1}\times(2-n)$,

$\therefore 2D_n=4+2^2\times 0+2^3\times(-1)+\cdots+2^{n-1}\times(1-n)+2^n\times(2-n)$,

$\therefore -D_n=-2+(-1)\times(2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-2^n\times(2-n)$,

$\therefore D_n=2+\frac{2^2\times(1-2^{n-2})}{1-2}+2^n\times(2-n)=(3-n)\times 2^n-2$.

当$n=1$时,$D_1=d_1=2$,满足上式.

综上,$D_n=(3-n)\times 2^n-2$.