

第四章 极点配置设计：状态空间方法

- 4.1 引言
- 4.2 控制系统设计
- 4.3 采用状态反馈调节
- 4.4 观测器
- 4.5 输出反馈
- 4.6 伺服问题
- 4.7 设计举例
- 4.8 结论



第四章 极点配置设计：状态空间方法

4.1 引言

- 基于内部模型的设计方法
- 调节问题
- 伺服问题

4.2 控制系统设计

考虑因素：

- 负载扰动的衰减
- 量测噪声影响的减少
- 指令信号的跟踪
- 过程特征的变化和不确定性



调节问题： 减少负载扰动和减少由反馈注入到系统的量测噪声而产生的涨落之间进行折衷。

伺服问题： 指令信号的跟踪。

设计问题的主要组成内容

- 系统的用途
- 过程模型
- 扰动模型
- 模型的偏差和不确定性
- 允许的控制策略
- 设计参数



典型的控制系统：

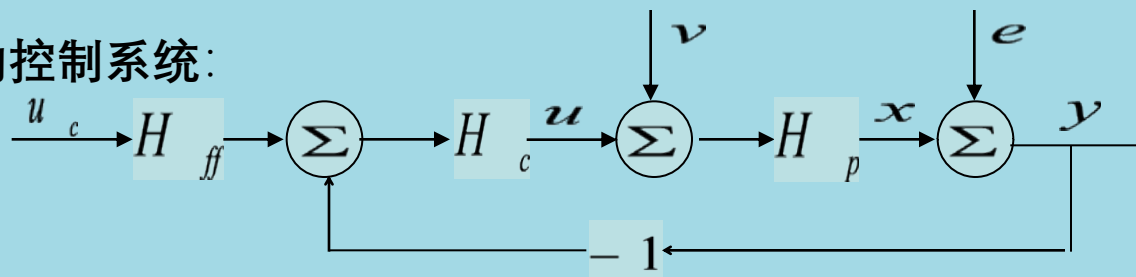


图 4.1

过程模型：

连续 $\longrightarrow$ 离散

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (4.2)$$

性能准则：

极点形式的确定

允许控制：

反馈： 线性， 负反馈。

形式： $u(k) = -Lx(k)$ (4.3)

设计参数：

采样周期和希望闭环的极点。

闭环系统：

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma L)x(k)$$

特征方程：

$$\det(\lambda I - \Phi + \Gamma L) = 0$$

4.3 采用状态反馈的调节

- 4.3.1 一般情况
- 4.3.2 实际应用问题
- 4.3.3 有限拍控制
- 4.3.4 更一般的扰动
- 4.3.5 计算问题



4.3 采用状态反馈的调节

假设：系统为式 4.1 或式 4.2 所描述的系统。

扰动：系统初始状态的摄动。

目的：使闭环系统具有规定的特征方程，使扰动以规定的方式衰减。

例 4.1 双重积分器对象的极点配置

采样周期一定，系统为：

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} h^2/2 \\ h \end{pmatrix} u(k)$$

一般的线形反馈采用：

$$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 = -[l_1 \quad l_2]x$$

则闭环系统为：

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1-l_1 h^2/2 & h-l_2 h^2/2 \\ -l_1 h & 1-l_2 h \end{pmatrix} x(k)$$



闭环系统的特征方程为：

$$z^2 + \left(\frac{l_1 h^2}{2} + l_2 h - 2 \right) z + \left(\frac{l_1 h^2}{2} - l_2 h + 1 \right) = 0$$

设希望的特征方程为：

$$z^2 + p_1 z + p_2 = 0$$

则：

$$\frac{l_1 h^2}{2} + l_2 h - 2 = p_1$$

$$\frac{l_1 h^2}{2} - l_2 h + 2 = p_2$$

解为：

$$l_1 = \frac{1}{h^2} (1 + p_1 + p_2)$$

(4.4)

$$l_2 = \frac{1}{2h} (3 + p_1 - p_2)$$

结论：

该例可以任意配置闭环特征方程，对于所有的 p_1 和 p_2 值，这个线性方程组都能给出 l_1 和 l_2 的一个解。



4.3.1 一般情况

单输入系统的极点配置问题。

设系统为 (4.2) 式描述，其特征多项式为：

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

假设系统为能达的，引入变换 $z = T x$ ，将式 (4.2) 变为能达规范型：

$$z(k+1) = \tilde{\Phi} z(k) + \tilde{\Gamma} u(k) \quad (4.5)$$

其中：

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\text{反馈律: } u = -\tilde{L} z = -(p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \dots \quad p_n - a_n) z \quad (4.7)$$

闭环系统的特征多项式为： (4.8)

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n$$



转换回原始坐标:

$$u = -\tilde{L}z = -\tilde{L}Tx = -Lx \quad (4.9)$$

确定变换矩阵T的一个简单方法是基于能达性矩阵的特性。

系统 (4.2) 式的能达矩阵 W_c 为:

$$W_c = \begin{pmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

系统 (4.5) 式的能达矩阵 $\tilde{W}_c$ 为:

$$\tilde{W}_c = TW_c$$

得到变换矩阵T:

$$T = \tilde{W}_c W_c^{-1} \quad (4.11)$$

直接计算得:

$$\tilde{W}_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

即:

$$L = (p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \dots \quad p_n - a_n) \tilde{W}_c W_c^{-1} \quad (4.13)$$



定理 4.1 采用状态反馈的极点配置

考虑 (4.2) 式的系统，假设只有一个输入信号，如果系统是能达的，则存在一个线性反馈，它给出具有特征多项式 $P(\Phi)$ 的闭环系统。

这个反馈由下式给出：

$$u(k) = -Lx(k)$$

其中：

$$L = (p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \dots \quad p_n - a_n) \tilde{W}_c W_c^{-1} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) W_c^{-1} P(\Phi) \quad (4.14)$$

W_c 和 $\tilde{W}_c$ 分别为 (4.2) 式和 (4.5) 式所是系统的能达矩阵。

证 根据凯莱-哈密顿定理得：

$$\begin{aligned} P(\tilde{\Phi}) &= \tilde{\Phi}^n + p_1 \tilde{\Phi}^{n-1} + \dots + p_n I \\ &= (p_1 - a_1) \tilde{\Phi}^{n-1} + \dots + (p_n - a_n) I \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 是被转换系统 (4.5) 式的系统矩阵。



引入行向量 e^i :

$$e^i = \begin{cases} e_{i,k} = 1, k = i \\ e_{i,k} = 0, k \neq i, k \in [1 \sim n] \end{cases}$$

有 $e^i \tilde{\Phi} = e^{i-1}$, $e^n \tilde{\Phi} = e^{n-1}$

于是由方程(4.7)有: $\tilde{L} = e^n P(\tilde{\Phi})$

$$L = \tilde{L}T = e^n P(T\Phi T^{-1})\Gamma = e^n TP(\Phi) = e^n \tilde{W}_c W_c^{-1} P(\Phi)$$

根据 4.12 有:

$$e^n \tilde{W}_c^{-1} = e^n$$

即:

$$e^n = e^n \tilde{W}_c$$

注 1 : 称方程 (4.14) 为阿克曼 (Ackermann) 公式。

注 2: 极点配置问题: 给定矩阵 Φ 和 Γ , 寻找一个矩阵 以便 矩阵 $\Phi - \Gamma L$ 有规定的特征值。

注 3: 根据 (4.11)式和(4.12)式, 可得:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma + a_1\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma + a_1\Phi^{n-2} + \dots + a_{n-1}\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

例 4.2 双重积分器

考虑例 (4.1) 的对象，假设希望的特征多项式为：

$$P(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

原系统得：

$$W_c = (\Gamma \quad \Phi\Gamma) = \begin{pmatrix} h^2/2 & 3h^2/2 \\ h & h \end{pmatrix}$$

和

$$W_c^{-1} = \begin{pmatrix} -1/h^2 & 1.5/h \\ 1/h^2 & -0.5/h \end{pmatrix}$$

原系统的特征多项式为：

$$z^2 - 2z + 1$$

因此：

$$P(\Phi) = \Phi^2 + p_1\Phi + p_2I = \begin{pmatrix} 1 + p_1 + p_2 & 2h + p_1h \\ 0 & 1 + p_1 + p_2 \end{pmatrix}$$

由阿克曼公式得：

$$L = (0 \quad 1)W_c^{-1}P(\Phi) = (1/h^2 \quad -0.5/h)P(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{1 + p_1 + p_2}{h^2} & \frac{3 + p_1 - p_2}{2h} \end{pmatrix}$$

例 4.3 一个不能达的系统

系统：

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

由于：

$$\det W_c = \det \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

所以系统不能达

$$\det(zI - \Phi) = (z - 0.5)(z - 0.3)$$

控制律 $u = -l_1 x_1 - l_2 x_2$ 给出一个闭环特征方程为：

$$(z - 0.5 + l_1)(z - 0.3) = 0$$

4.3.2 实际应用问题

例 4.4 选择设计参数 考虑双重积分器

连续特征方程 $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$ 的二阶系统。

离散时间系统的特征方程 $z^2 + p_1z + p_2$ 。

有：

$$p_1 = -2e^{-\xi\omega h} \cos(\omega h \sqrt{1-\xi^2})$$

$$p_2 = e^{-2\xi\omega h}$$

为了讨论控制信号的幅值，假定系统有一个初始位置 x_0 和一个初始速度 v_0 那么控制信号的初始值是：

$$u(0) = -l_1x_0 - l_2v_0$$

若采样周期短 $h \rightarrow 0$ ： $u(0) \approx -\omega^2 x_0 - 2\xi\omega v_0$

结论： 一个较大的 ω 给出一个较快速的系统但需要一个较大的控制信号。

采样周期的选择：

$$\omega h = 0.1 \sim 0.6$$

(4.17)

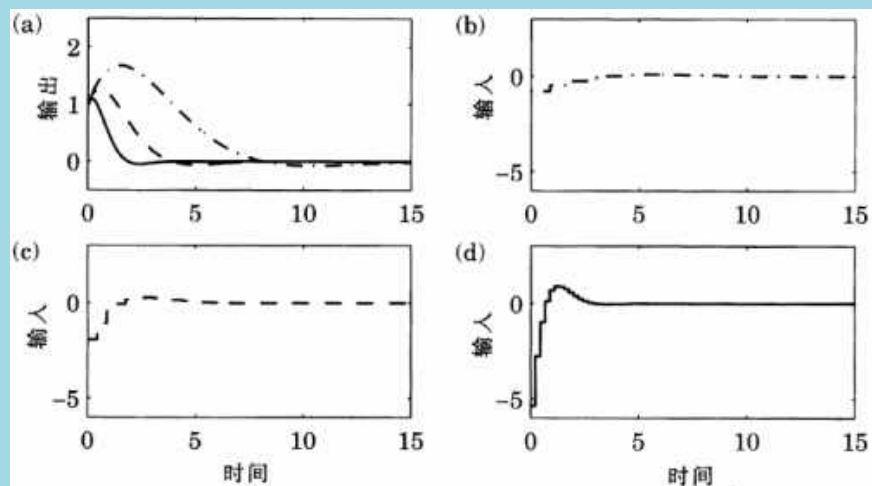


图 4.2 例 4.4 的闭环系统的响应。

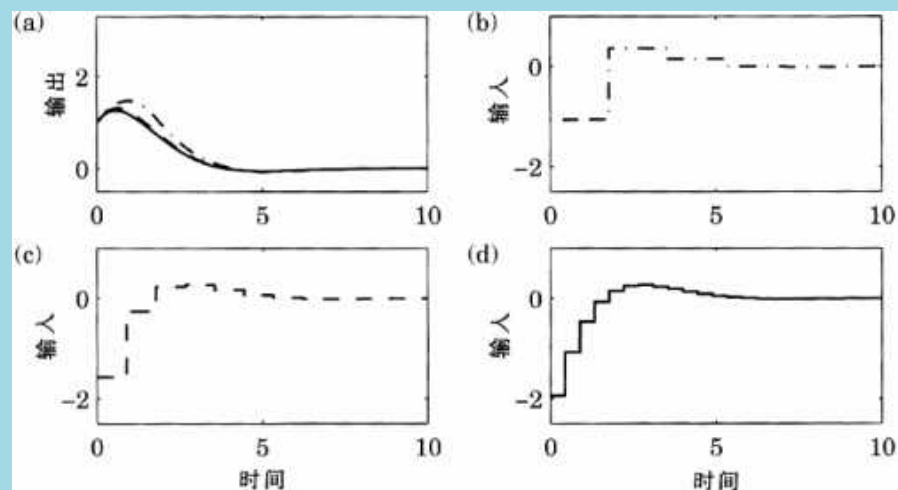


图 4.3 改变参数，例 4.4 的闭环系统的响应。

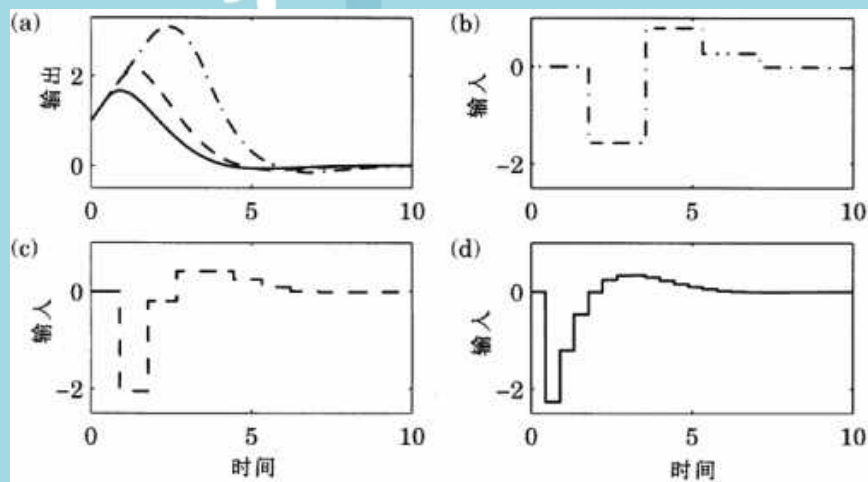


图 4.4 改变初始条件、参数，例 4.4 的闭环系统的响应。

4.3.3 有限拍控制

如果期望的闭环极点全部选在坐标原点，则闭环系统的特征多项式为：

$$P(z) = z^n \quad \text{即:} \quad p_1 \sim p_n$$

于是由凯莱-哈密顿定理，闭环系统矩阵 $\Phi_c = \Phi - \Gamma L$ 满足：

$$\Phi_c^n = 0$$

有阿克曼公式当：

$$L = (0 \quad \vdots \quad 0 \quad 1) W_c^{-1} \Phi^n \quad (4.18)$$

就得到有限拍策略。

如果矩阵 Φ 可逆，则得：

$$L = (0 \quad \vdots \quad 0 \quad 1) (\Phi^{-n} \Gamma \quad \Phi^{-n+1} \Gamma \quad \vdots \quad \Phi^{-1} \Gamma) \quad (4.19)$$

分析：

1. 有限节拍控制策略中，只有一个设计函数即采样周期。
2. 建立时间最多是 nh 。
3. 控制信号的幅值急剧的随采样周期的减少而增大。



例 4.5 一个双重积分器的有限节拍控制

考虑一个双重积分对象。根据方程 (4.19) 可知，当：

$$l_1 = \frac{1}{h^2} \quad l_2 = \frac{3}{2h}$$

$u = l_1 x_1 + l_2 x_2$ 就给出了有限拍控制策略。

如果该过程的初始状态为 $x(0) = \text{col}[x_0, v_0]$ ，则：

$$u(0) = -\frac{x_0}{h^2} - \frac{3v_0}{2h} \quad u(h) = \frac{x_0}{h^2} + \frac{v_0}{2h}$$

表 4.1 在 $x(0) = \text{col}[1, 1]$ 和不同采样周期下的双重积分器的有限拍控制的控制信号

h	100	10	1	0.1	0.01
$u(0)$	-0.0151	-0.16	-2.5	-115	-10,150
$u(h)$	0.0051	0.06	1.5	105	10,050

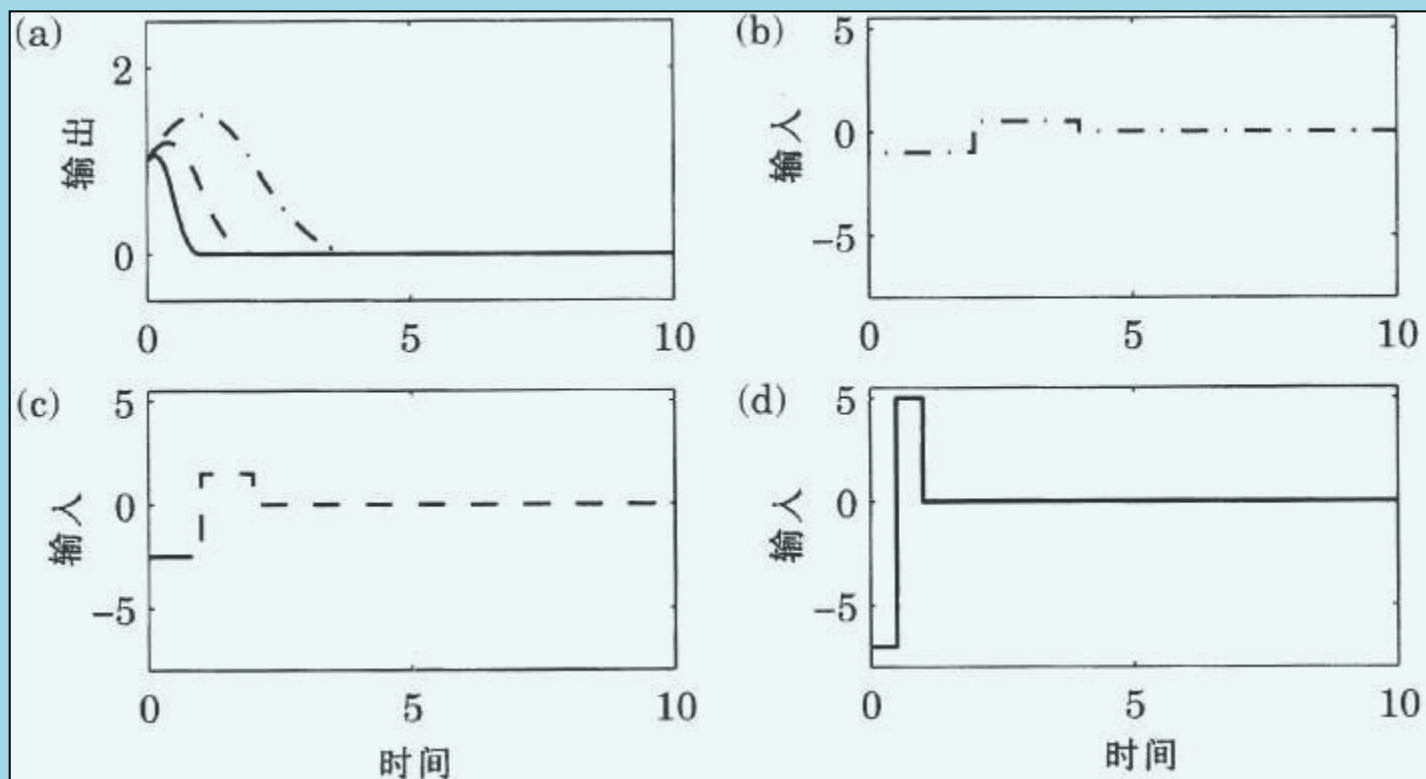


图 4.5 在例 4.5 中具有有限拍控制器的闭环系统的响应。

4.3.4 更一般的扰动

假设系统描述为：

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + v$$

其中 v 由下式描述：

$$\frac{dw}{dt} = A_w w$$

$$v = C_w w$$

其初始条件已知。

常见情况：

- v 是一个常数，可以通过 $A_w = 0$ 来赢得。
- 正弦扰动：

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

假设 w 是可测量的。

引入增广状态向量：

$$z = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

找到如下系统：

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (4.20)$$

采样该系统得到如下离散时间系统：

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ w(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

一般状态线性反馈为：

$$u(k) = -Lx(k) - L_w w(k) \quad (4.21)$$

则闭环系统为：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)x(k) + (\Phi_{xw} - \Gamma L_w)w(k) \\ w(k+1) &= \Phi_w w(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

例 4.6 常值输入扰动

对于常值扰动的情况，矩阵 Φ_w 成为单位阵。

有：

$$\Phi_{xw} = \Gamma$$

系统描述为：

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma L)x(k) + \Gamma(I - L_w)w(k)$$

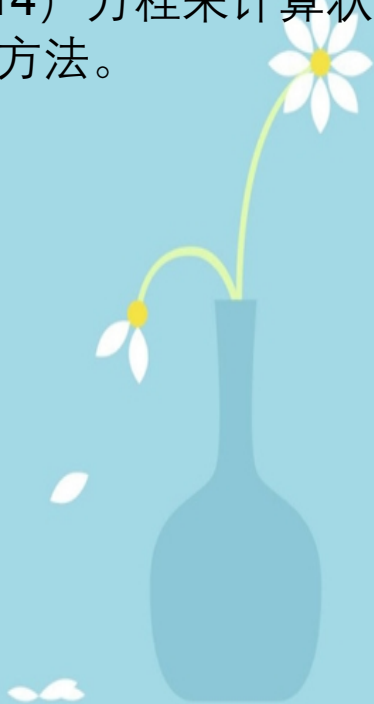
$$w(k+1) = w(k)$$

选择 $L_w = I$ 来消除扰动 w 对 x 的影响。

4.3.5 计算问题

如果系统是能达的，可以引入一个具有未知系数的一般状态反馈来确定特征多项式，并使它与期望的特征多项式相等。

也能用阿克曼公式（4.14）方程来计算状态反馈。应当尽量避免使用矩阵乘幂的任何一种方法。



4.4 观测器

- 4.4.1 状态变量的直接计算
- 4.4.2 采用动态系统的重构
- 4.4.3 观测器增益的计算
- 4.4.4 有限拍观测器
- 4.4.5 龙伯格里观测器



4.4 观测器

假设系统采样模型描述为：

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (4.23)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

- 问题：
1. 由输入和输出序列 $y(k), y(k-1), \dots, u(k), u(k-1), \dots$ 来计算。
 2. 重构状态 $x(k)$

4.4.1 状态变量的直接计算

假设只有一个输出。在采样时刻 k 得到的输出 $y(k) = Cx(k)$ 给出一个用来确定状态变量的线性方程。使用来自 n 个不同采样时刻 $k, k-1, \dots, k-n+1$ 的信息给出如下各线性方程：

$$y(k-n+1) = Cx(k-n+1)$$

$$y(k-n+2) = C\Phi x(k-n+1) + C\Gamma u(k-1)$$

$\vdots$

$$y(k) = C\Phi^{n-1}x(k-n+1) + C\Phi^{n-2}\Gamma u(k-n+1) + \dots + C\Gamma u(k-1) \quad (4.24)$$



引入向量 U_{k-1} 和 Y_k :

$$Y_k = \begin{pmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ \vdots \\ y(k) \end{pmatrix} \quad U_{k-1} = \begin{pmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{pmatrix}$$

可以把方程 [\(4.24\)](#) 写作:

$$Y_k = W_0 x(k-n+1) + W_u U_{k-1}$$

其中矩阵 W_0 和 W_u 由下式给出:

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{pmatrix}, W_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C\Gamma & 0 & \dots & 0 \\ C\Phi\Gamma & C\Gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Phi^{n-2}\Gamma & C\Phi^{n-3}\Gamma & \dots & C\Gamma \end{pmatrix}$$

若系统可观，那么能解出 $x(k-n+1)$ 并得到:

$$x(k-n+1) = W_0^{-1} Y_k - W_0^{-1} W_u U_{k-1}$$

因此，状态可以用未来的输出和量测得出。反复利用方程(4.23)得：

$$x(k) = \Phi^{n-1}x(k-n+1) + \Phi^{n-2}\Gamma u(k-n+1) + \dots + \Gamma u(k-1)$$

进而求得：

$$x(k) = A_y Y_y + B_u U_k \quad (4.25)$$

其中：

$$A_y = \Phi^{n-1}W_0^{-1} \quad B_u = \begin{pmatrix} \Phi^{n-1}\Gamma & \Phi^{n-2}\Gamma & \dots & \Gamma \end{pmatrix} \Phi^{n-1}W_0^{-1}W_u \quad (4.26)$$

于是状态向量 $x(k)$ 是 $y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1)$ 和 $u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n+1)$ 的一个线性组合。

例 4.7 双重积分器

对双重积分器有：

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

从而：

$$y(k) = x_1(k)$$

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(k-1) + hx_2(k-1) + \frac{h^2}{2}u(k-1) \\ &= y(k-1) + h(x_2(k) - hu(k)) + \frac{h^2}{2}u(k-1) \end{aligned}$$

解此方程：

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} + \Gamma u(k-1)$$

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_2(k) = \frac{y(k) - y(k-1)}{h} + \frac{h}{2}u(k-1)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/978035127072006024>