专题 01 第一章 空间向量与立体几何 典型例题讲解（一）

目录

一、基本概念回归

知识回顾 1：空间向量的数乘运算

1.1、定义：与平面向量一样，实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个向量，称为向量的数乘运算.

1.2：数乘向量 $\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 的关系

λ 的范围	$\lambda\vec{a}$ 的方向	$\lambda\vec{a}$ 的模
$\lambda>0$	$\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 的方向相同	$\lvert\lambda\vec{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\vec{a}\rvert$
$\lambda=0$	$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，其方向是任意的	

知识回顾 2：共线向量与共面向量

2.1、共线（平行）向量的定义：若表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量，则记为 $\vec{a}//\vec{b}$.

2.2、共线向量定理：对空间任意两个向量$\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$的充要条件是存在实数$\lambda$，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

2.3 拓展 对于直线外任意点O，空间中三点P,A,B共线的充要条件是$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AB}$，其中$\lambda+\mu=1$

2.4、共面向量定义：平行于同一个平面的向量，叫做共面向量.

2.5 共面向量定理：如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，那么向量$\vec{p}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在唯一的有序实数对(x,y)，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$

2.6 拓展

对于空间任意一点O，四点P,C,A,B共面（其中C,A,B不共线）的充要条件是$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OA}+z\overrightarrow{OB}$（其中$x+y+z=1$）.

知识回顾 3：空间向量的数量积

定义：已知两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则$|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$叫做$\vec{a}$，$\vec{b}$的数量积，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$；即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$．规定：零向量与任何向量的数量积都为 0.

知识回顾 4：两个向量的平行与垂直

	$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
平行（$\vec{a}\parallel\vec{b}$）	$\vec{a}\parallel\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=\lambda b_1\\a_2=\lambda b_2\left(\lambda\in R\right)\\a_3=\lambda b_3\end{cases}$
垂直（$\vec{a}\perp\vec{b}$）	$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$（$\vec{a},\vec{b}$均为非零向量）

知识回顾 5：向量长度的坐标计算公式

若$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}|^2}=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$，即$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$

知识回顾 6：两个向量夹角的坐标计算公式

设$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

二、重点例题（高频考点）

高频考点一：空间向量的基底

1．（2023 秋·全国·高二随堂练习）已知$\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$为空间的一组基底，则下列向量也能作为空间的一组基底的是（ ）

A．$\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c}$　　B．$\vec{a}+2\vec{b},\vec{b},\vec{a}-\vec{c}$

C．$2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+2\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　D．$\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+2\vec{a},\vec{b}-2\vec{c}$

【答案】B

【详解】对于 A 中，由$\vec{a}-\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$，所以$\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c}$不能作为一组空间基底；

对于 B 中，假设$\vec{a}+2\vec{b},\vec{b},\vec{a}-\vec{c}$共面，则存在$\lambda,\mu$，使得$\vec{a}+2\vec{b}=\lambda\vec{b}+\mu\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$，

即$\vec{a}+2\vec{b}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{b}-\mu\vec{c}$，可得$\begin{cases}\mu=1\\ \lambda=2\\ -\mu=0\end{cases}$，此时方程组无解，所以$2\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{a}-\vec{c}$不共面，所以向量$\vec{a}+2\vec{b},\vec{b},\vec{a}-\vec{c}$可以作为空间的一组基底；

对于 C 中，由$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)$，所以$2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+2\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$不能作为空间的一组基底；

对于 D 中，由$\vec{a}+\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+2\vec{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)$，所以$\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+2\vec{a},\vec{b}-2\vec{c}$不能作为空间的一组基底.

故选：B.

2．（2023·全国·高二专题练习）若$\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$构成空间的一个基底，则下列向量可以构成空间基底的是（　　）

A．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{a}$　B．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}$　C．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}+\vec{c}$　D．$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}$

【答案】C

【详解】对于 A，$\vec{a}=\frac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$，因此向量$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{a}$共面，故不能构成基底，故 A 错误；

对于 B，$\vec{b}=\frac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$，因此向量$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}$共面，故不能构成基底，故 B 错误；

对于 C，假设向量$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{b}+\vec{c}$共面，则$\vec{b}+\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\mu\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，

即$\vec{c}=(\lambda+\mu)\vec{a}+(\lambda-\mu-1)\vec{b}$，这与题设矛盾，假设不成立，可以构成基底，故 C 正确；

对于 D，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，因此向量$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}$共面，故不能构成基底，故 D 错误；

故选：C.

3．（2023·全国·高二专题练习）已知$\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$是空间的一个单位正交基底，向量$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$，$\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$是空间的另一个基底，向量$\vec{p}$在基底$\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$下的坐标为（　　）

A．$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},3\right)$　B．$\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},3\right)$　C．$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},3\right)$　D．$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},3\right)$

【答案】A

【详解】解：设$p=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+z\vec{c}$

$=(x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}+z\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$，

所以$\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\\z=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\\z=3\end{cases}$，

所以向量$\vec{p}$在基底$\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\}$下的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},3\right)$.

故选：A.

4．（多选）（2023秋·浙江杭州·高二浙江省临安中学校考开学考试）$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一个基底，与$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{c}$构成基底的一个向量可以是（　　）

A．$\vec{b}+\vec{c}$　　B．$\vec{b}-\vec{c}$　　C．$\vec{b}$　　D．$3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

【答案】AC

【详解】由于$\vec{b}-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})$，所以$\vec{b}-\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{c}$共面，

不能构成基底，B选项错误.

由于$3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+2(\vec{a}+\vec{c})$，所以$3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{c}$共面，

不能构成基底，D选项错误.

假设$\vec{b}+\vec{c}=x(\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}+\vec{c})=(x+y)\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$，

则$\begin{cases}x+y=0\\x=1\\y=1\end{cases}$，但此方程组无解，所以$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{c}$不共面，

可以构成基底，A选项正确.

假设$\vec{b}=m(\vec{a}+\vec{b})+n(\vec{a}+\vec{c})=(m+n)\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$，

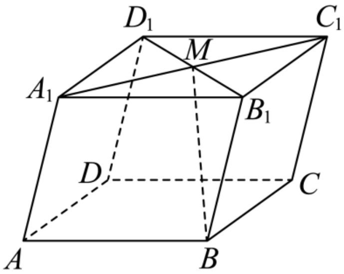
则$\begin{cases}m+n=0\\m=1\\n=0\end{cases}$，但此方程组无解，所以$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{c}$不共面，

可以构成基底，C选项正确.

故选：AC

高频考点二：用基底表示向量

1．（2023春·宁夏银川·高二宁夏育才中学校考开学考试）如图所示，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为A_1C_1与B_1D_1的交点，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{BM}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

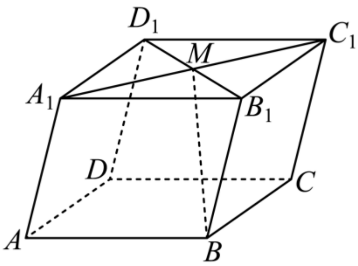
【答案】D

【详解】由题意可得：$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

故选：D.

2．（2023 春·江苏盐城·高二校联考阶段练习）如图：在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1，B_1D_1 的交点．若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$，则向量 $\overrightarrow{BM}=$（　　）



A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　B．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

【答案】B

【详解】因为在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1，B_1D_1 的交点，$\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}$

$=-\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}$

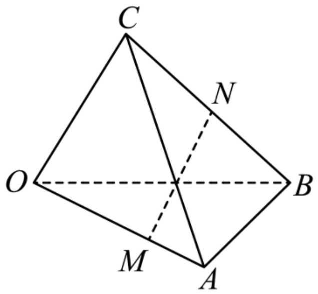
$=-\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$，

故选：B

3．（2023·全国·高二专题练习）如图，在空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，且$OM=2MA$，$BN=NC$，则$\overrightarrow{MN}$等于（　）



A．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

C．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

【答案】C

【详解】因为$BN=NC$，即N为BC的中点，所以$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$，

因为$OM=2MA$，所以$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：C

4．（2023春·安徽滁州·高二统考期末）在四面体$A-BCD$中，E是AD的中点，F是BC的中点．设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{EF}=$（　）

A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　C．$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　D．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

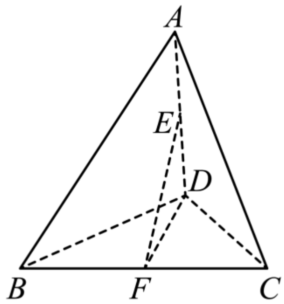
【答案】D

【详解】依题意$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.



故选：D

高频考点三：空间向量平行与垂直

1．（2023春·江苏盐城·高二校联考阶段练习）已知向量$\vec{a}=(1,1,0),\vec{b}=(-1,0,2)$，若$k\vec{a}+\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$平行，则实数$k$的值为（　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

【答案】C

【详解】因为$\vec{a}=(1,1,0),\vec{b}=(-1,0,2)$，

所以$k\vec{a}+\vec{b}=k(1,1,0)+(-1,0,2)=(k-1,k,2)$，

$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,1,0)-(-1,0,2)=(3,2,-2)$，

因为$k\vec{a}+\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$平行，所以存在唯一实数λ，使$k\vec{a}+\vec{b}=\lambda(2\vec{a}-\vec{b})$，

所以$(k-1,k,2)=\lambda(3,2,-2)$，所以$\begin{cases}k-1=3\lambda\\k=2\lambda\\2=-2\lambda\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-2\\\lambda=-1\end{cases}$，

故选：C

2．（2023秋·高二课时练习）$\vec{a}=(1,5,-2),\vec{b}=(m,2,m+2)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$__________.

【答案】6

【详解】$\because\vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore 1\times m+5\times 2+(-2)\times(m+2)=0\Rightarrow m=6$.

故答案为：6.

3．（2023秋·河北邯郸·高二武安市第三中学校考开学考试）已知向量$\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(-1,0,2)$，且$k\vec{a}+\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$互相垂直，则k的值是_____.

【答案】$\dfrac{7}{5}$/1.4

【详解】$k\vec{a}+\vec{b}=k(1,1,0)+(-1,0,2)=(k-1,k,2)$，

$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,1,0)-(-1,0,2)=(3,2,-2)$，

因为$k\vec{a}+\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$互相垂直，

所以 $\left(k\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，

即 $\left(k-1,k,2\right)\cdot\left(3,2,-2\right)=5k-7=0$，

解得：$k=\dfrac{7}{5}$.

故答案为：$\dfrac{7}{5}$

4．（2023 秋·高二课时练习）已知空间三点 $A\left(-2,0,2\right),B\left(-1,1,2\right),C\left(-3,0,4\right)$.设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，若向量 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+k\vec{b}$ 互相平行，求 k 的值.

【答案】±1

【详解】根据题意可得：$\vec{a}=\left(1,1,0\right),\vec{b}=\left(-1,0,2\right)$，

∴ $k\vec{a}+\vec{b}=\left(k-1,k,2\right),\vec{a}+k\vec{b}=\left(1-k,1,2k\right)$.

∵向量 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+k\vec{b}$ 互相平行，，

∴ $k\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)$，

即 $\left(k-1,k,2\right)=\lambda\left(1-k,1,2k\right)$.

∴ $\begin{cases}k-1=\lambda\left(1-k\right)\\ k=\lambda\times1\\ 2=\lambda\times2k\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}k=-1\\ \lambda=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=1\\ \lambda=1\end{cases}$.

∴k 的值为 1 或-1.

5．（2023 秋·全国·高二阶段练习）已知点 $A\left(-2,0,2\right)$、$B\left(-1,1,2\right)$、$C\left(-3,0,4\right)$，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1)若 $\left|\vec{c}\right|=3$，且 $\vec{c}//\overrightarrow{BC}$，求 $\vec{c}$；

(2)求 $\cos\left\langle\vec{a},\ \vec{b}\right\rangle$；

(3)若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，求 k.

【答案】(1) $\vec{c}=\left(-2,-1,2\right)$ 或 $\vec{c}=\left(2,1,-2\right)$；

(2) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $k=-\dfrac{5}{2}$ 或 $k=2$

【详解】（1）∵ $B\left(-1,1,2\right)$、$C\left(-3,0,4\right)$，∴ $\overrightarrow{BC}=\left(-2,-1,2\right)$，∵ $\left|\vec{c}\right|=3$，且 $\vec{c}//\overrightarrow{BC}$，

∴设 $\vec{c}=\left(-2\lambda,-\lambda,2\lambda\right)$，且 $(-2\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2=9$，

解得 $\lambda=\pm1$，∴ $\vec{c}=\left(-2,-1,2\right)$ 或 $\vec{c}=\left(2,1,-2\right)$；

（2）$\because A(-2,0,2)$、$B(-1,1,2)$、$C(-3,0,4)$，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(-1,0,2)$，

$\therefore \cos\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；

（3）$\because k\vec{a}+\vec{b}=(k-1, k, 2)$，$k\vec{a}-2\vec{b}=(k+2, k, -4)$，

又 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，

$\therefore (k\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}-2\vec{b})=(k-1)(k+2)+k^2-8=0$，

解得 $k=-\dfrac{5}{2}$ 或 $k=2$．

高频考点四：空间向量模的计算

1．（2023·上海·高二专题练习）设空间向量 $\vec{a}=(-1,2,m)$，$\vec{b}=(2,n,-4)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__．

【答案】9

【详解】解：因为空间向量 $\vec{a}=(-1,2,m)$，$\vec{b}=(2,n,-4)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，

所以 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，

即 $(2,n,-4)=\lambda(-1,2,m)$，

可得 $\begin{cases}2=-\lambda\\ n=2\lambda\\ -4=\lambda m\end{cases}$，解得 $m=2$，$n=-4$，

所以 $\vec{a}=(-1,2,2)$，$\vec{b}=(2,-4,-4)$

则 $\vec{a}-\vec{b}=(-3,6,6)$，

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+6^2+6^2}=9$．

故答案为：9

2．（2023 秋·高二单元测试）设空间向量 $\vec{a}=(-1,2,m)$，$\vec{b}=(2,n,-4)$，若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$________．

【答案】9

【详解】因为空间向量 $\vec{a}=(-1,2,m)$，$\vec{b}=(2,n,-4)$，

由 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，即 $(2,n,-4)=\lambda(-1,2,m)$，

可得 $\begin{cases}2=-\lambda\\ n=2\lambda\\ -4=\lambda m\end{cases}$，解得：$m=2$，$n=-4$，

所以 $\vec{a}=(-1,2,2)$， $\vec{b}=(2,-4,-4)$，则 $\vec{a}-\vec{b}=(-3,6,6)$，

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+6^2+6^2}=9$．

故答案为：9．

3．（2023·全国·高二专题练习）已知 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 为空间中两两互相垂直的单位向量，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+2y+4z=1$，则 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为________．

【答案】$\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

【详解】由题意可设 $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$，

由 $x+2y+4z=1$，得 $x=1-2y-4z$，

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(x-1,y-1,z)$，

所以 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

$=\sqrt{(2y+4z)^2+(y-1)^2+z^2}$

$=\sqrt{5y^2+17z^2+16yz-2y+1}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{17}z+\dfrac{8}{\sqrt{17}}y\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{17}}y-\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\right)^2+\dfrac{4}{21}}\geq\sqrt{\dfrac{4}{21}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

（当且仅当 $y=\dfrac{17}{21}$，$z=-\dfrac{8}{21}$ 时等号成立），

所以 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$．

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$．

4．（2023春·湖南永州·高二永州市第一中学校考开学考试）向量 $\vec{a}=(x,1,3),\vec{b}=(1,y,1),\vec{c}=(2,-4,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$________．

【答案】$5\sqrt{2}$

【详解】解：因为 $\vec{a}=(x,1,3),\vec{b}=(1,y,1),\vec{c}=(2,-4,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，

所以，$\begin{cases}x+y+3=0\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $y=-2,x=-1$，

所以，$\vec{a}=(-1,1,3),\vec{b}=(1,-2,1)$，

所以，$2\vec{a}+\vec{b}=(-1,0,7)$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$

故答案为：$5\sqrt{2}$

5．（2023·全国·高二专题练习）在空间直角坐标系$O-xyz$中，已知$A(-1,0,2)$，$B(0,1,-1)$，点C,D分别在x轴，y轴上，且$AD\perp BC$，那么$\left|\overrightarrow{CD}\right|$的最小值是_____.

【答案】$\sqrt{2}$

【详解】设$C(x$，0，$0)$，$D(0$，y，$0)$，

$\because A(-1$，0，$2)$，$B(0$，1，$-1)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=(1,y,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(x,-1,1)$，

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=x-y-2=0$，

即$x=y+2$．

$\because \overrightarrow{CD}=(-x,y,0)$，

$\therefore |\overrightarrow{CD}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2+y)^2+y^2}=\sqrt{2y^2+4y+4}$

$=\sqrt{2(y+1)^2+2}\geq\sqrt{2}$．（当$y=-1$时取最小值）

故答案为：$\sqrt{2}$

6．（2023·全国·高二专题练习）已知空间三点，$A\left(0,2,3\right)$，$B\left(-2,1,6\right)$，$C\left(1,-1,5\right)$.

(1)求以AB,AC为边的平行四边形的面积；

(2)若$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{7}$，且$\angle DAB=\angle DAC=60°$，点$P$是$BC$的中点，求$\left|\overrightarrow{DP}\right|$的值.

【答案】(1)$7\sqrt{3}$；

(2)$\dfrac{\sqrt{70-28\sqrt{2}}}{2}$.

【详解】（1）$\because \overrightarrow{AB}=\left(-2,-1,3\right),\overrightarrow{AC}=\left(1,-3,2\right)$,

$$\therefore \begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}\\\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}\end{cases}，\quad \therefore \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{14}，$$

$$\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-2\times1+1\times3+3\times2}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}，$$

$$\therefore \sin\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\therefore S_{\text{四边形}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\sqrt{14}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}．$$

（2）$\because$点P是BC的中点，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$，

$\therefore \left|\overrightarrow{DP}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{4}\times\left(\sqrt{14}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(\sqrt{14}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2+\frac{1}{2}\times(-2\times1+1\times3+3\times2)-\sqrt{14}\times\sqrt{7}\cos60°\times2$

$=\frac{35}{2}-7\sqrt{2}=\frac{70-28\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \left|\overrightarrow{DP}\right|=\frac{\sqrt{70-28\sqrt{2}}}{2}$.

高频考点五：空间向量夹角的计算

1．（2023秋·新疆乌鲁木齐·高二校考期末）已知$A(2,-5,1),B(2,-2,4),C(1,-4,1)$，则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为（　）

A．$-\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【详解】由已知得$\overrightarrow{AB}=(2,-2,4)-(2,-5,1)=(0,3,3)$ $\overrightarrow{AC}=(1,-4,1)-(2,-5,1)=(-1,1,0)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{3}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

因为空间向量的夹角θ范围是$0\le\theta\le180^{\circ}$，

所以向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

故选：D.

2．（2023·全国·高二专题练习）已知$\vec{a}+\vec{b}=\left(2,\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(0,\sqrt{2},0\right)$，则$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$等于（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{6}$

C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{6}$

【答案】C

【详解】因为$\vec{a}+\vec{b}=\left(2,\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(0,\sqrt{2},0\right)$，所以$\vec{a}=\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，

所以$\cos\vec{a},\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1+0+3}{\sqrt{6}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：C

3．（2023秋·高二单元测试）设空间两个单位向量$\overrightarrow{OA}=(m,n,0),\overrightarrow{OB}=(0,n,p)$与向量$\overrightarrow{OC}=(1,1,1)$的夹角都等于$\frac{\pi}{4}$，则$\cos\angle AOB=$（　）

A．$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$　　　　B．$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C．$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$或$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　　　　D．$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$或$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【详解】$\because$空间两个单位向量$\overrightarrow{OA}=(m,n,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,n,p)$与向量$\overrightarrow{OC}=(1,1,1)$的夹角都等于$\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\angle AOC=\angle BOC=\frac{\pi}{4}$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$，

$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle AOC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=m+n$，$\therefore m+n=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

又$\overrightarrow{OA}$为单位向量，$\therefore m^2+n^2=1$，

联立$\begin{cases}m+n=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ m^2+n^2=1\end{cases}$，得$\begin{cases}m^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ n^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}m^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\\ n^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$，

$\because\overrightarrow{OA}=(m,n,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,n,p)$，

$\therefore\cos\angle AOB=n^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$.

故选：C.

4．（2023秋·宁夏银川·高二校考阶段练习）已知$\vec{a}=(x,4,1)$，$\vec{b}=(-2,y,-1)$，$\vec{c}=(3,-2,z)$，$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，求：

(1)$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$；

(2)$\vec{a}+\vec{c}$与$\vec{b}+\vec{c}$所成角的余弦值.

【答案】(1)$\vec{a}=(2,4,1)$，$\vec{b}=(-2,-4,-1)$，$\vec{c}=(3,-2,2)$

(2)$-\frac{2}{19}$

【详解】（1）因为$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{a}=(x,4,1)$，$\vec{b}=(-2,y,-1)$，

所以$y=0$不满足要求，故$\frac{x}{-2}=\frac{4}{y}=\frac{1}{-1}$，解得$x=2,y=-4$，

所以$\vec{a}=(2,4,1)$，$\vec{b}=(-2,-4,-1)$，

又因为$\vec{b}\perp\vec{c}$，所以$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，即$-2\times3-4\times(-2)-z=0$，解得$z=2$，

因此$\vec{c}=(3,-2,2)$.

（2）由（1）得$\vec{a}+\vec{c}=(2,4,1)+(3,-2,2)=(2+3,4-2,1+2)=(5,2,3)$，

同理$\vec{b}+\vec{c}=(-2,-4,-1)+(3,-2,2)=(-2+3,-4-2,-1+2)=(1,-6,1)$，

所以$|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{c})^2}=\sqrt{5^2+2^2+3^2}=\sqrt{38}$，

$|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{1^2+(-6)^2+1^2}=\sqrt{38}$，

$(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(5,2,3)\cdot(1,-6,1)=5\times1+2\times(-6)+3\times1=-4$；

因此$\cos\langle\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c}\rangle=\dfrac{(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}+\vec{c}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{38}\times\sqrt{38}}=-\dfrac{2}{19}$.

5．（2023秋·高二课时练习）$\vec{a}=(1,5,-1)$，$\vec{b}=(-2,3,5)$，$\vec{m}=k\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}-3\vec{b}$，若$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为钝角，求k的取值范围.

【答案】$k\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{106}{3}\right)$

【详解】依题意得，$\vec{m}=k\vec{a}+\vec{b}=(k-2,5k+3,-k+5)$，$\vec{n}=\vec{a}-3\vec{b}=(7,-4,-16)$，

又$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为钝角，根据夹角公式，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}<0$，

即$\vec{m}\cdot\vec{n}=(k-2,5k+3,-k+5)\cdot(7,-4,-16)=3k-106<0$，故$k<\dfrac{106}{3}$，

当$\vec{m},\vec{n}$共线时，$\dfrac{k-2}{7}=\dfrac{5k+3}{-4}=\dfrac{-k+5}{-16}$，解得$k=-\dfrac{1}{3}$，

此时$\vec{m}=\dfrac{1}{3}(-7,4,16)$，$\vec{n}=(7,-4,-16)=-3\vec{m}$，

$\vec{m},\vec{n}$的夹角是π，虽满足$\vec{m}\cdot\vec{n}<0$但不是钝角，故$k\neq-\dfrac{1}{3}$，

于是$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为钝角时，$k\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{106}{3}\right)$

6．（2023·全国·高二专题练习）已知空间中的三点$P(-2,0,2),M(-1,1,2),N(-3,0,4)$，$\vec{a}=\overrightarrow{PM}$，$\vec{b}=\overrightarrow{PN}$.

(1)求$\triangle PMN$的面积；

(2)当$k\vec{a}+\vec{b}$与$k\vec{a}-2\vec{b}$的夹角为钝角时，求k的范围.

【答案】(1)$\dfrac{3}{2}$；

(2) $k\in\left(-\frac{5}{2},2\right)$.

【详解】（1）由题设 $\vec{a}=(1,1,0)$， $\vec{b}=(-1,0,2)$，则 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\angle MPN=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，故在 $\triangle PMN$ 中 $\sin\angle MPN=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

故 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{2}$.

（2）由（1）知：$k\vec{a}+\vec{b}=(k-1,k,2)$， $k\vec{a}-2\vec{b}=(k+2,k,-4)$，且它们夹角 θ 为钝角，

所以 $\cos\theta=\frac{(k-1)(k+2)+k^2-8}{\sqrt{(k-1)^2+k^2+4}\cdot\sqrt{(k+2)^2+k^2+16}}<0$，即 $(k-1)(k+2)+k^2-8<0$，

所以 $2k^2+k-10=(2k+5)(k-2)<0$，可得 $-\frac{5}{2}<k<2$，

当它们反向共线，即 $k\vec{a}+\vec{b}=\lambda(k\vec{a}-2\vec{b})$ 且 $\lambda<0$ 时，有 $\begin{cases}k-1=\lambda(k+2)\\k=\lambda k\\2=-4\lambda\end{cases}$，无解，

综上，$k\in(-\frac{5}{2},2)$.

高频考点六：空间向量的投影（投影向量）

1.（2023 秋·高二课时练习）已知空间向量 $\vec{a}=(2,-2,1),\vec{b}=(3,0,4)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量是（　　）

A．$\frac{10}{9}(3,0,4)$　　　　B．$\frac{2}{5}(3,0,4)$

C．$\frac{10}{9}(2,-2,1)$　　　　D．$\frac{2}{5}(2,-2,1)$

【答案】C

【详解】空间向量 $\vec{a}=(2,-2,1),\vec{b}=(3,0,4)$

所以向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}=\frac{6+0+4}{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot(2,-2,1)=\frac{10}{9}(2,-2,1)$.

故选：C.

2．（2023·全国·高二专题练习）已知 $A(1,1,0)$，$B(0,3,0)$，$C(2,2,2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的坐标是（　）

A．$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{1}{3}\right)$　　　　B．$\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$