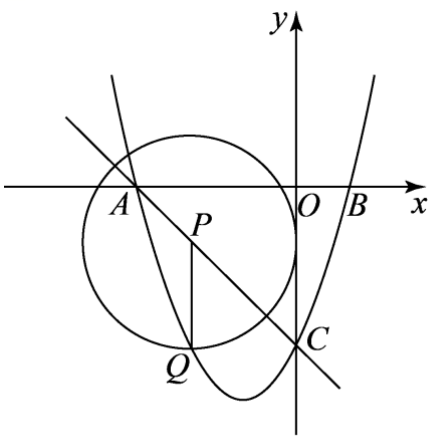
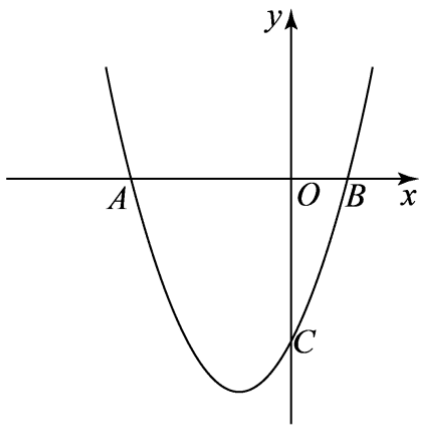
圆与二次函数的综合

典例精析

【典例 1】如图，已知抛物线$y=x^2+bx+c$与 x 轴交于点$A(2m-1,0)$和点$B(m+2,0)$，与 y 轴交于点 C，对称轴轴为直线$x=-1$.





备用图

（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 是直线 AC 上一动点，过点 P 作$PQ \parallel y$轴，交抛物线于点 Q，以 P 为圆心，PQ 为半径作$\odot P$，当$\odot P$与坐标轴相切时，求$\odot P$的半径；

（3）直线$y=kx+3k+4(k\neq 0)$与抛物线交于 M，N 两点，求$\triangle AMN$面积的最小值.

【思路点拨】

（1）由题意及抛物线的对称性知：$-1-(2m-1)=m+2-(-1)$，即可求得 m 的值，从而用待定系数法可求得函数解析式；

（2）首先求出直线AC的解析式为$y=-x-3$，由$PQ \parallel y$轴及点 Q 在抛物线上，可得点 Q 的坐标，从而求得PQ的长度，分两种情况讨论：当$\odot P$与 x 轴相切时；当$\odot P$与 y 轴相切时；分别利用圆心到切线的距离等于半径得到方程，解方程即可求得半径；

（3）由$y=kx+3k+4(k\neq 0)$知，直线过点$G(-3,4)$，则得$AG\perp x$轴，且$AG=4$；联立直线与抛物线的解析式，消去 y 得一元二次方程，可求得 M 与 N 的横坐标，再由$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle AGM}+S_{\triangle AGN}=2|x_M-x_N|$，可得关于 k 的函数关系式，即可求得面积的最小值.

【解题过程】

（1）解：抛物线$y=x^2+bx+c$与 x 轴交于点$A(2m-1,0)$和点$B(m+2,0)$，对称轴为直线$x=-1$

$\therefore A$、B关于对称轴对称，

$\therefore -1-(2m-1)=m+2-(-1)$，

解得：$m=-1$，

即$A(-3,0)$，$B(1,0)$，

把 A、B 两点坐标代入$y=x^2+bx+c$中，得$\begin{cases}9-3b+c=0\\1+b+c=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$

则所求函数解析式为$y=x^2+2x-3$；

（2）解：对于$y=x^2+2x-3$，令$x=0$，得$y=-3$，

$\therefore C(0,-3)$，

设直线AC的解析式为$y=ax+d$，

则有$\begin{cases}-3a+d=0\\d=-3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-1\\d=-3\end{cases}$，

所以直线AC的解析式为$y=-x-3$，

设点$P(a,-a-3)$，

$\because PQ\parallel y$轴，点 Q 在抛物线上，

$\therefore Q$ 的坐标为(a,a^2+2a-3)，

$\therefore PQ=|a^2+2a-3-(-a-3)|=|a^2+3a|$；

当$\odot P$与 x 轴相切时；

$\therefore |a^2+3a|=|-a-3|$，

即$a^2+3a=-a-3$，或$a^2+3a=-(-a-3)$，

解得：$a=-1$，$a=-3$或$a=1$，$a=-3$

显然$a=-3$时点 P、Q 与点 A 重合，不合题意，则$a=-1$及$a=1$，

当$a=-1$时，$-a-3=-2$；当$a=1$时，$-a-3=-4$，

此时$\odot P$的半径分别为 2 或 4；

当$\odot P$与 y 轴相切时；

$\therefore |a^2+3a|=|a|$，

即$a^2+3a=-a$，或$a^2+3a=a$，

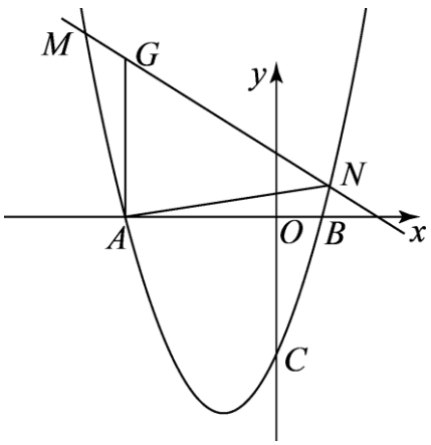
解得：$a=0$，$a=-4$，或$a=0$，$a=-2$，

显然$a=0$时点 P、Q 与点 C 重合，不合题意，则$a=-4$及$a=-2$，

此时$\odot P$的半径分别为 4 或 2；

综上，$\odot P$与坐标轴相切时，$\odot P$的半径分别为 2 或 4；

（3）解：如图，



当$x=-3$时，$y=k\times(-3)+3k+4=4$，

∴直线$y=kx+3k+4$过点$G(-3,4)$，

∵ $A(-3,0)$，

∴ $AG\perp x$轴，且$AG=4$；

联立直线与抛物线的解析式得：$\begin{cases}y=kx+3k+4\\y=x^2+2x-3\end{cases}$，

消去 y 得：$x^2+(2-k)x-3k-7=0$，

∵ $\Delta=(2-k)^2-4\times1\times(-3k-7)=(k+4)^2+16>0$，

∴ $x_N=\frac{-(2-k)+\sqrt{(k+4)^2+16}}{2}$，$x_M=\frac{-(2-k)-\sqrt{(k+4)^2+16}}{2}$，

∴ $x_N-x_M=\sqrt{(k+4)^2+16}$，

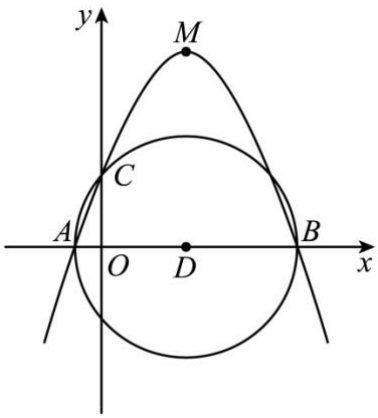
∵ $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle AGM}+S_{\triangle AGN}=\frac{1}{2}AG\cdot(-3-x_M)+\frac{1}{2}AG\cdot(x_N+3)=2|x_M-x_N|$，

∴ $S_{\triangle AMN}=2\sqrt{(k+4)^2+16}$，

当$k=-4$时，$(k+4)^2+16$有最小值 16，从而△ AMN的面积有最小值$2\times4=8$.

学霸必刷

1．（22·23 上·南京·阶段练习）已知抛物线$y=a(x-3)^2+\frac{25}{4}$过点$C(0,4)$，顶点为 M，与 x 轴交于 A、B 两点．如图所示，以 AB 为直径作圆，记作⊙D.



（1）试判断点 C 与⊙D 的位置关系；

（2）直线 CM 与⊙D 相切吗？请说明理由；

（3）在抛物线上是否存在一点 E，能使四边形$ADEC$为平行四边形．若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）求出CD的长，并且CD，OD比较，如果相等，说明点 C 在圆上；

（2）先用两点间距离公式求出线段的长，在用勾股定理的逆定理判断是直角三角形，最后由垂直可判断相切；

（3）先尝试作出四边形$ADEC$，再证明一组对边平行但不相等，最后说明不存在．

【解题过程】

（1）∵抛物线$y=a(x-3)^2+\frac{25}{4}$过点$C(0,4)$

$\therefore 4=9a+\frac{25}{4}$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

∴抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{25}{4}$

∵当$y=0$ 时，方程$0=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{25}{4}$的解为$x=8$ 或$x=-2$

$\therefore A(-2,0),B(8,0)$

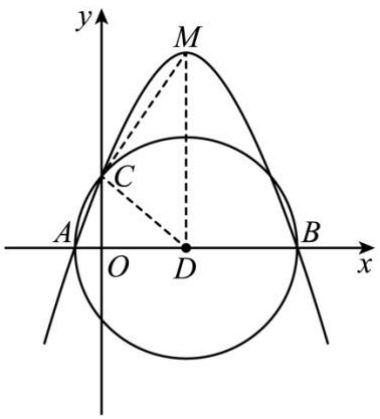
$\therefore AB=10,AD=5,OD=3$

$\therefore CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore CD=OD=5$

故点 C 在圆上

（2）如图，连接CM,CD,MD



代入顶点坐标公式，可得：$M\left(3,\frac{25}{4}\right)$

利用两点间距离公式可得：$MC^2=\frac{225}{16},MD^2=\frac{625}{26},CD^2=25$

$\because MC^2+CD^2=MD^2$

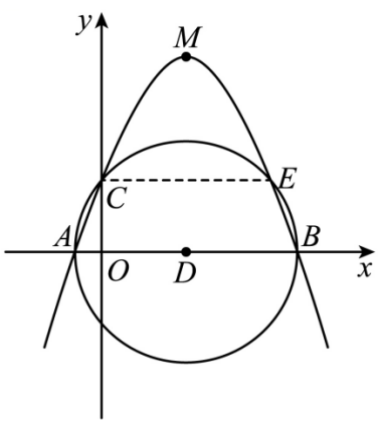
$\therefore \triangle MCD$ 为直角三角形

$\therefore CD\perp MC$

$\therefore$直线 CM 与$\odot D$ 相切

（3）不存在，理由如下：

如图，过点 C 作$CE\parallel AB$ ，交抛物线于点 E



$\because$当$y=4$ 时，方程$4=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{25}{4}$的解为$x=0$ 或$x=6$

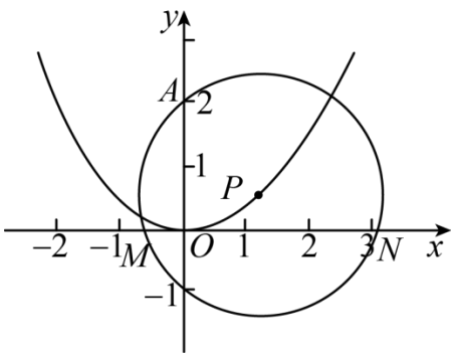
$\therefore C(0,4),E(0,6)$

$\therefore CE=6$

$\therefore CE \neq AD$

$\therefore$在抛物线上不存在一点 E，能使四边形 $ADEC$ 为平行四边形

2．（23·24 上·长沙·阶段练习）如图，抛物线$y = ax^2 + bx + c$（a，b，c 是常数，$a \neq 0$）的对称轴为 y 轴，且经过$(0，0)$和$\left(\sqrt{a},\frac{1}{16}\right)$两点，点 P 在该抛物线上运动，以点 P 为圆心的$\odot P$总经过定点$A(0，2)$.



（1）求 a，b，c 的值；

（2）求证：在点 P 运动的过程中，圆心 P 到 x 轴的距离始终小于半径；

（3）设$\odot P$与 x 轴相交于$M(x_1，0)$，$N(x_2，0)(x_1 < x_2)$两点，当$\triangle AMN$是以AM为底边的等腰三角形时，求圆心 P 的纵坐标.

【思路点拨】

（1）抛物线$y = ax^2 + bx + c$（a，b，c 是常数，$a \neq 0$）的对称轴为 y 轴，且经过$(0，0)$和$\left(\sqrt{a},\frac{1}{16}\right)$两点，可得抛物线的一般式为：$y = ax^2$，则$\frac{1}{16} = a\left(\sqrt{a}\right)^2$，进而即可求解；

（2）设$P\left(m，\frac{1}{4}m^2\right)$，$\odot P$的半径$r = \sqrt{\frac{1}{16}m^4 + 4} > \frac{1}{4}m^2$即可证明；

（3）设$P\left(n，\frac{1}{4}n^2\right)$，$PA = \sqrt{\frac{1}{16}n^4 + 4}$，作$PH \perp MN$于 H，$MH = NH = \sqrt{\frac{1}{16}n^4 + 4 - \left(\frac{1}{4}n^2\right)^2} = 2$，故$MN = 4$，由$M(n-2，0)$，$N(n+2，0)$，则$AM = \sqrt{(n-2)^2 + 4}$，$AN = \sqrt{(n+2)^2 + 4}$当$AN = MN$时，$\sqrt{(n+2)^2 + 4} = 4$，即可求解；

【解题过程】

（1）解：∵抛物线$y = ax^2 + bx + c$（a，b，c 是常数，$a \neq 0$）的对称轴为 y 轴，且经过$(0，0)$和$\left(\sqrt{a},\frac{1}{16}\right)$两点，

$\therefore$抛物线的一般式为：$y = ax^2$，

$\therefore\frac{1}{16} = a\left(\sqrt{a}\right)^2$，

解得：$a=\pm\frac{1}{4}$，

∵图象开口向上，

$\therefore a=\frac{1}{4}$，

∴抛物线解析式为：$y=\frac{1}{4}x^2$，

故$a=\frac{1}{4}$，$b=c=0$；

（2）设$P\left(m,\ \frac{1}{4}m^2\right)$，$\odot P$的半径$r=\sqrt{m^2+\left(\frac{1}{4}m^2-2\right)^2}$，

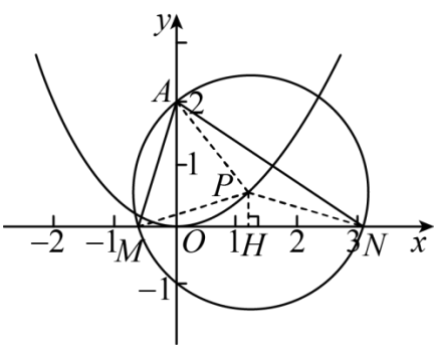
化简得：$r=\sqrt{\frac{1}{16}m^4+4}>\frac{1}{4}m^2$，

∴点 P 在运动过程中，圆心 P 到 x 轴的距离始终小于半径；

（3）设$P\left(n,\ \frac{1}{4}n^2\right)$，

∵$PA=\sqrt{\frac{1}{16}n^4+4}$，

作$PH\perp MN$于 H，



则$PM=PN=\sqrt{\frac{1}{16}n^4+4}$，

又∵$PH=\frac{1}{4}n^2$，

则$MH=NH=\sqrt{\frac{1}{16}n^4+4-\left(\frac{1}{4}n^2\right)^2}=2$，

故$MN=4$，

∴$M\left(n-2,\ 0\right)$，$N\left(n+2,\ 0\right)$，

又∵$A\left(0,\ 2\right)$，

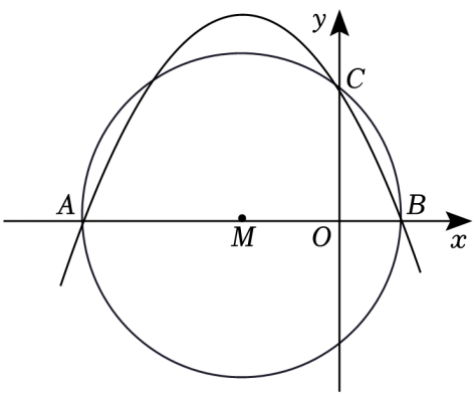
∴ $AM=\sqrt{(n-2)^2+4}, AN=\sqrt{(n+2)^2+4}$

当$AN=MN$时，$\sqrt{(n+2)^2+4}=4$，

解得：$n=-2\pm2\sqrt{3}$，则$\frac{1}{4}n^2=4\pm2\sqrt{3}$；

综上所述，P的纵坐标为：$4+2\sqrt{3}$或$4-2\sqrt{3}$.

3．（22·23上·广州·期末）如图，抛物线$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+c$与$x$轴相交于点$A$，$B$（点$A$在点$B$的左侧），与$y$轴相交于点$C$，点$B$的坐标为$(2,0)$，$\odot M$经过$A,B,C$三点，且圆心$M$在$x$轴上.



（1）求c的值.

（2）求$\odot M$的半径.

（3）过点C作直线CD，交x轴于点D，当直线CD与抛物线只有一个交点时直线CD是否与$\odot M$相切？若相切，请证明；若不相切，请求出直线CD与$\odot M$的另外一个交点的坐标.

【思路点拨】

（1）将点$B(2,0)$代入抛物线解析式，利用待定系数法求抛物线解析式即可；

（2）令$y=0$，可得$-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4=0$，求解即可确定$A$点坐标，然后确定$\odot M$的半径即可；

（3）直线CD与抛物线只有一个交点，则方程$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4=kx+4$有两个相等的实数根，由$\Delta=(4k+6)^2-4\times1\times0=0$可求出$k$的值，进而求解即可.

【解题过程】

（1）解：∵抛物线$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+c$经过点$B(2,0)$，

$\therefore-\frac{1}{4}\times2^2-\frac{3}{2}\times2+c=0$，

解得$c=4$，

$\therefore c$的值为4；

（2）在$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$中，

令$y=0$，可得$-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4=0$，

解得：$x_1=-8, x_2=2$，

$\therefore A(-8,0)$，

$\therefore AB=2-(-8)=10$，

$\therefore \odot M$的半径为$\frac{10}{2}=5$；

（3）直线CD与$\odot M$相交．

在$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$中，令$x=0$，得$y=4$，

$\therefore C(0,4)$，

设直线CD解析式为$y=kx+b$，将点$C(0,4)$代入，可得$b=4$，

$\therefore$直线CD解析式为$y=kx+4$，

$\because$直线CD与抛物线只有一个交点，

$\therefore$方程$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4=kx+4$有两个相等的实数根，

整理，得$x^2+(4k+6)x=0$，

$\therefore \Delta=(4k+6)^2-4\times1\times0=0$，

解得$k=-\frac{3}{2}$，

$\therefore$直线CD解析式为$y=-\frac{3}{2}x+4$，

设直线CD与$\odot M$的另外一个交点的坐标为$(x,-\frac{3}{2}x+4)$，

$\because M(-3,0)$，$\odot M$的半径为 5，

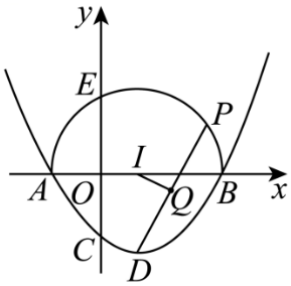
则$(x+3)^2+\left(-\frac{3}{2}x+4\right)^2=5^2$，

解得 $x=0$（舍去）或$x=\frac{24}{13}$，

将$x=\frac{24}{13}$代入到$y=-\frac{3}{2}x+4$，可得$y=-\frac{3}{2}\times\frac{24}{13}+4=\frac{16}{13}$，

$\therefore$直线CD与$\odot M$的另外一个交点的坐标为$\left(\frac{24}{13},\frac{16}{13}\right)$.

4．（22·23 上·广州·期末）如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$的图象与 x 轴交于点$A(-1,0)$、$B(3,0)$与 y 轴交于点 C，顶点为 D．以AB为直径在 x 轴上方画半圆交 y 轴于点 E，圆心为 I，P 是半圆上一动点，连接DP，点 Q 为PD的中点．



（1）试用含 a 的代数式表示 c；

（2）若$IQ \perp PD$恒成立，求出此时该抛物线解析式；

（3）在（2）的条件下，当点 P 沿半圆从点 B 运动至点 A 时，点 Q 的运动轨迹是什么，试求出它的路径长.

【思路点拨】

（1）根据点点$A(-1,0)$、$B(3,0)$可得该函数的解析式为$y=a(x+1)(x-3)$，展开括号即可进行解答；

（2）根据点 Q 为PD的中点，且$IQ \perp PD$，可得点 D 在⊙ I上，进而得出点 D 的坐标，即可求解；

（3）根据题意得$\angle IQD=90°$，则点 Q 在以DI为直径的圆上运动，求出点 P 与点 A 和点 B 重合时点 Q 的坐标，进而得出$Q_1Q_2 \parallel x$轴，$Q_1Q_2=2$，则点 Q 在以DI中点为圆心的半圆上运动，再根据圆的周长公式求解即可.

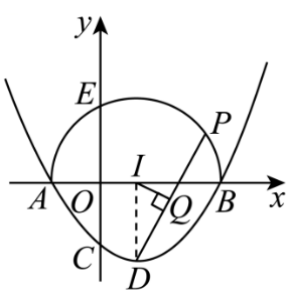
【解题过程】

（1）解：∵抛物线$y=ax^2+bx+c$的图象与 x 轴交于点$A(-1,0)$、$B(3,0)$，

∴该函数的解析式为$y=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a$，

∴$c=-3a$.

（2）解：连接DI，



∵P 是半圆上一点，点 Q 为PD的中点，且$IQ \perp PD$，

∴点 D 在⊙ I上，

∴$DI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times[3-(-1)]=2$，

∵该抛物线的对称轴为直线$x=\frac{-1+3}{2}=1$，

∴$D(1,-2)$，

把$D(1,-2)$代入$y=ax^2-2ax-3a$得：$-2=a-2a-3a$，

解得：$a=\frac{1}{2}$，

∴该抛物线解析式为：$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$；

（3）解：∵$IQ\perp PD$，

∴$\angle IQD=90°$，

∴点Q在以DI为直径的圆上运动，

∵$A(-1,0)$、$B(3,0)$，$D(1,-2)$，

∴当点P与点B重合时，$Q_1\left(\frac{1+3}{2},\frac{-2}{2}\right)$，即$Q_1(2,-1)$，

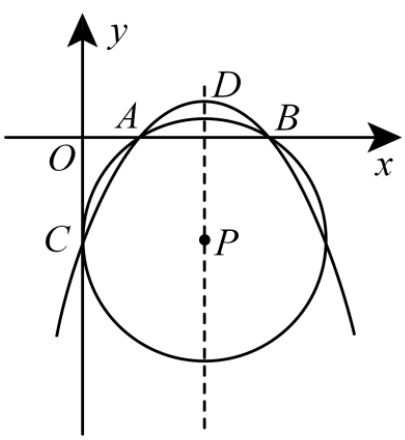
当点P与点A重合时，$Q_2\left(\frac{1-1}{2},\frac{-2}{2}\right)$，即$Q_2(0,-1)$，

∴$Q_1Q_2\parallel x$轴，$Q_1Q_2=2$，

∴点Q在以DI中点为圆心的半圆上运动，

点Q的路径长为：$\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$.

5．（21·22·全国·专题练习）在平面直角坐标系中，以点$P\left(2\sqrt{3},-3\right)$为圆心的圆与$x$轴相交于$A$、$B$两点，与$y$轴相切于点$C$，抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点$A$、$B$、$C$，顶点为$D$.



（1）求抛物线的表达式；

（2）点M为y轴上一点，连接DM，MP，是否存在点M使得△DMP的周长最小？若存在，求出点M的坐标及△DMP的周长最小值；若不存在，请说明理由.

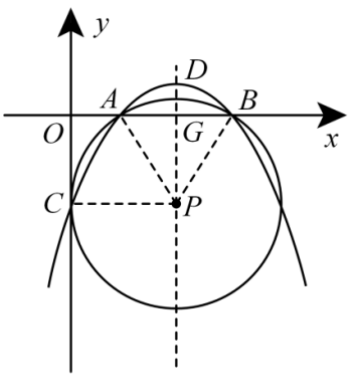
【思路点拨】

（1）如图①，连接PA，PB，PC，设抛物线对称轴交x轴于点G，先求出$A(\sqrt{3},0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(0,-3)$，把这三点代入$y=ax^2+bx+c$求解即可；

（2）如图②，作点P关于y轴的对称点P'，连接$P'D$与y轴交于点M，连接PM，此时△DMP的周长为$PM+MD+DP=P'M+MD+DP=P'D+DP$，即当点$D$，$M$，$P'$三点共线时，$\Delta DMP$的周长取得最小值，最小值为$P'D+DP$的长，先求出△$DMP$的周长最小值，然后求出直线$DP'$的解析式，即可求出点 M.

【解题过程】

（1）如图①，连接PA，PB，PC，设抛物线对称轴交x轴于点G，



图①

由题意得$PA=PB=PC=2\sqrt{3}$，$PG=3$.

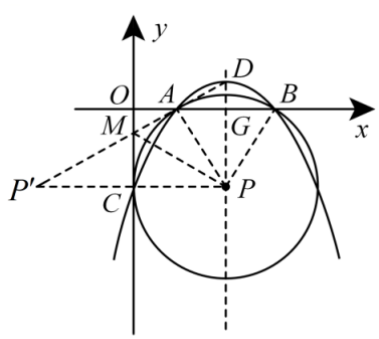
$\therefore AG=BG=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore A(\sqrt{3},0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(0,-3)$.

把点$A(\sqrt{3},0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(0,-3)$代入$y=ax^2+bx+c$中，得$\begin{cases}3a+\sqrt{3}b+c=0,\\27a+3\sqrt{3}b+c=0,\\c=-3\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\b=\frac{4\sqrt{3}}{3},\\c=-3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-3$；

（2）存在．如图②，作点P关于y轴的对称点P'，连接$P'D$与y轴交于点M，连接PM，此时△DMP的周长为$PM+MD+DP=P'M+MD+DP=P'D+DP$，即当点$D$，$M$，$P'$三点共线时，$\Delta DMP$的周长取得最小值，最小值为$P'D+DP$的长，



图②

∵点$P(2\sqrt{3},-3)$与点P'关于y轴对称，

∴点P'的坐标为$(-2\sqrt{3},-3)$，$PP'=4\sqrt{3}$，

易得$D(2\sqrt{3},1)$，

$\therefore DP=4.$

$\therefore P'D=\sqrt{PP'^2+DP^2}=8$，

$\therefore P'D+DP=12.$

∴△DMP的周长最小值为 12；

设直线DP'的解析式为$y=kx+b_1$，

将$P'(-2\sqrt{3},-3)$、$D(2\sqrt{3},1)$代入，

得$\begin{cases}-2\sqrt{3}k+b_1=-3,\\2\sqrt{3}k+b_1=1.\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\frac{\sqrt{3}}{3},\\b_1=-1\end{cases}$，

∴直线DP'的解析式为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$，

令$x=0$，则$y=-1$，

$\therefore M(0,-1).$

6．（21·22 下·长沙·期中）如图 1，抛物线$y=\frac{1}{4}x^2-2x$与 x 轴交于 O、A 两点，点 B 为抛物线的顶点，连接 OB．

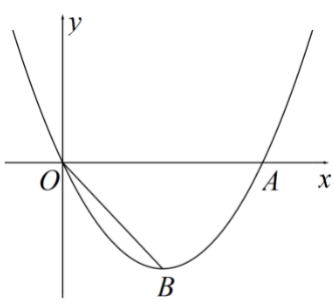


图1

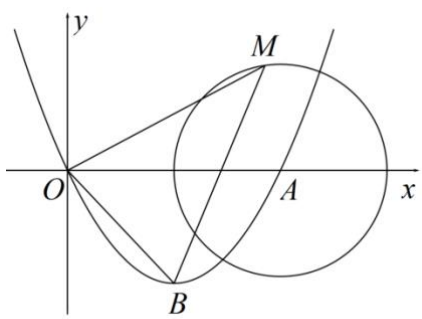


图2

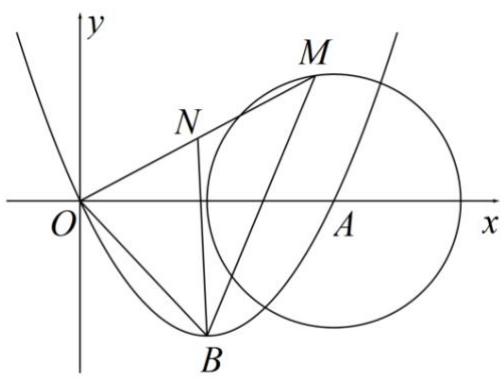


图3

（1）求∠AOB 的度数；

（2）如图 2，以点 A 为圆心，4 为半径作⊙A，点 M 在⊙A 上．连接 OM、BM，

①当△OBM 是以 OB 为底的等腰三角形时，求点 M 的坐标；

②如图 3，取 OM 的中点 N，连接 BN，当点 M 在⊙A 上运动时，求线段 BN 长度的取值范围．

【思路点拨】

（1）将函数解析式化为顶点式，得到点 B 的坐标，作 $BH\perp OA$ 于 H，则 $OH=BH=4$，即可得到$\angle AOB$ 的度数；

（2）①先求出 A 点坐标．作 OB 的垂直平分线交$\odot A$ 于M_1、M_2两点，由 $AH=4=OH=BH$，得到M_1坐标为（4，0）．连接AM_2，由$\angle M_2HA=\angle OHC=45°$，$AH=AM_2=4$，得到$M_2$坐标为（8，4）；

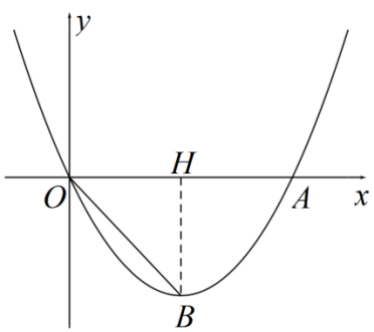
②延长 OB 至点 D，使 $BD=OB$，则点 D 坐标为（8，−8），连接 MD，根据三角形中位线的性质得到$BN=\frac{1}{2}MD$，当 MD 过点 A 时，MD 长度达到最大值，当点 M 在点 E 处时，MD 有最小值，由此解决问题．

【解题过程】

（1）$\because y=\frac{1}{4}x^2-2x=\frac{1}{4}(x-4)^2-4$，点 B 为抛物线顶点，

$\therefore$点 B 的坐标为（4，−4）．

作 $BH\perp OA$ 于 H，则 $OH=BH=4$，

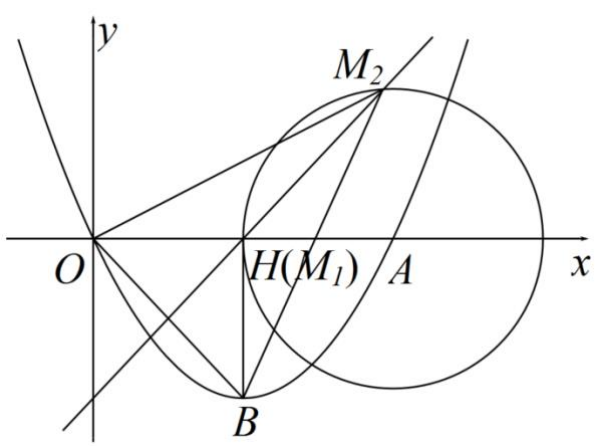


$\therefore\angle AOB=45°$．

（2）①$\frac{1}{4}x^2-2x=0$，解得$x_1=0$，$x_2=8$，

$\therefore A$ 点坐标为（8，0）．

作 OB 的垂直平分线交$\odot A$ 于M_1、M_2两点，



∵⊙A 半径为 4，AH=4，

∴点 H 在⊙A 上，此时 OH=BH，

∴点 H 与点M_1重合，

∴M_1坐标为（4，0）．

连接AM_2，

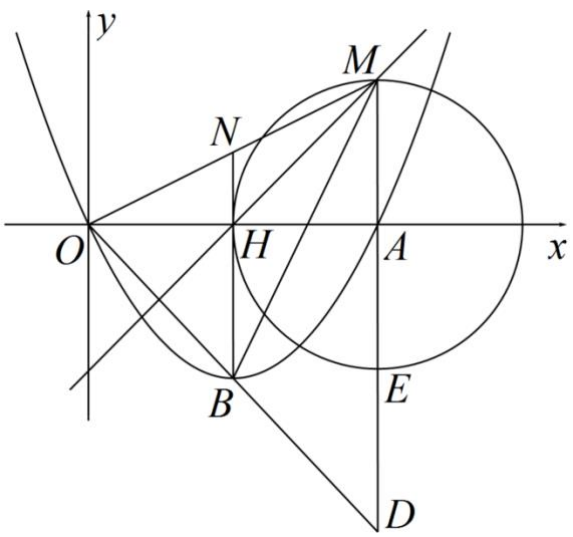
∵$\angle M_2HA=\angle OHC=45°$，$AH=AM_2=4$，

∴$\angle HAM_2=90°$，则M_2坐标为（8，4），

综上，点 M 的坐标为（4，0）或（8，4）．

②延长 OB 至点 D，使 BD=OB，则点 D 坐标为（8，−8），

连接 MD，



∵点 N 为 OM 中点，

∴ $BN=\frac{1}{2}MD$．

如图，当 MD 过点 A 时，MD 长度达到最大值，

当点 M 在点 E 处时，MD 有最小值，

∵点 A、D 横坐标相同，

∴此时 $MD\perp x$ 轴，

∴MD=8+4=12，DE=8−4=4，

∴$4\le MD\le 12$，

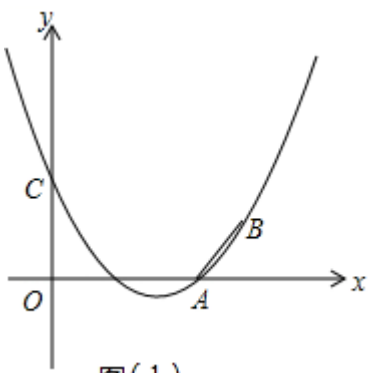
∴$2\le BN\le 6$．

7．（21·22 上·长沙·阶段练习）已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a\neq0$）经过 A（3，0）、B（4，1）两点，且与 y 轴交于点 C.

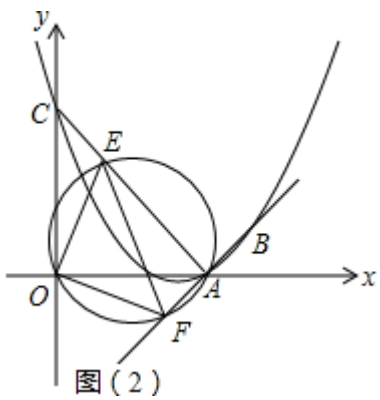
（1）求抛物线的解析式；

（2）如图，设抛物线与 x 轴的另一个交点为 D，在抛物线上是否存在点 P，使△PAB 的面积是△BDA 面积的 2 倍？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

（3）如图（2），连接 AC，E 为线段 AC 上任意一点（不与 A、C 重合），经过 A、E、O 三点的圆交直线 AB 于点 F，当△OEF 的面积取得最小值时，求面积的最小值及 E 点坐标.



图（1）



图（2）

【思路点拨】

（1）根据待定系数法求解即可；

（2）根据抛物线的解析式求出点 D 的坐标，取点 E（1，0），作 $EP\parallel AB$ 交抛物线于点 P，得到直线 EP 为 $y=x-1$，联立方程组求解即可；

（3）作 $BD\perp OA$ 于 D，得到 $OA=OC=3$，$AD=BD=1$，证明 EF 是△AEO 的外接圆的直径，得到△EOF 是等腰直角三角形，当 OE 最小时，△EOF 的面积最小，计算即可；

【解题过程】

（1）将点 A（3，0），B（4，1）代入可得：

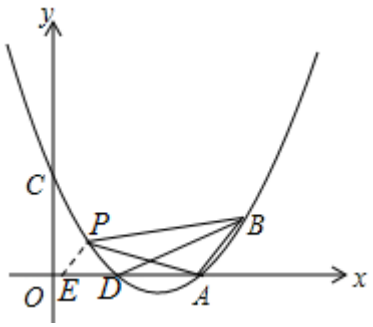
$\begin{cases}9a+3b+3=0\\14a+4b+3=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{5}{2}\end{cases}$，

故函数解析式为$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$；

（2）∵抛物线与 x 轴的交点的纵坐标为 0，

∴$\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3=0$，解得：$x_1=3$，$x_2=2$，

∴点 D 的坐标为（2，0），取点 E（1，0），作 $EP\parallel AB$ 交抛物线于点 P，



∵$ED=AD=1$，∴此时$\triangle PAB$的面积是$\triangle DAB$的面积的两倍，

∵直线AB解析式为$y=x-3$，

∴直线EP为$y=x-1$，

由$\begin{cases} y=x-1 \\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{7-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$或$\begin{cases} x=\frac{7+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$，

∴点P坐标（$\frac{7-\sqrt{17}}{2}$，$\frac{5-\sqrt{17}}{2}$）或（$\frac{7+\sqrt{17}}{2}$，$\frac{5+\sqrt{17}}{2}$）．

（3）如图2中，作$BD\perp OA$于D.

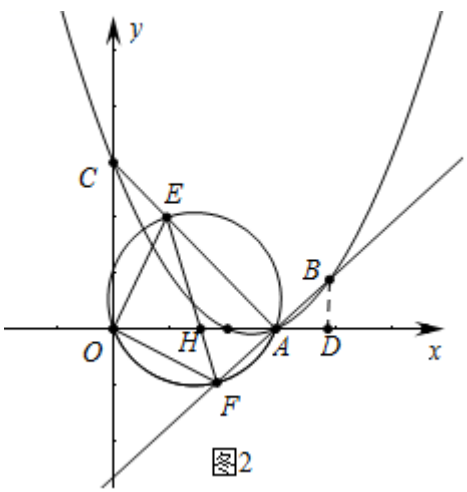


图2

∵A（3，0），C（0，3），B（4，1），

∴$OA=OC=3$，$AD=BD=1$，

∴$\angle OAC=\angle BAD=45°$，

∵$\angle OAF=\angle BAD=45°$，

∴$\angle EAF=90°$，

∴EF是$\triangle AEO$的外接圆的直径，

∴$\angle EOF=90°$，

∴$\angle EFO=\angle EAO=45°$，

∴△EOF 是等腰直角三角形，

∴当 OE 最小时，△EOF 的面积最小，

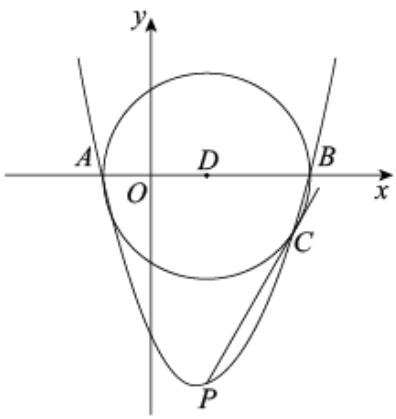
∵$OE\perp AC$ 时，OE 最小，$OC=OA$，

∴$CE=AE$，$OE=\frac{1}{2}AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

∴E（$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$），$S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{4}$.

∴当△OEF 的面积取得最小值时，面积的最小值为$\frac{9}{4}$，E 点坐标（$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$）.

8．（20·21 下·扬州·一模）如图，抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，点 B 坐标为$(3,0)$顶点 P 的坐标为$(1,-4)$，以 AB 为直径作圆，圆心为 D，过 P 向右侧作⊙D的切线，切点为 C.



（1）求抛物线的解析式；

（2）请通过计算判断抛物线是否经过点 C；

（3）设 M，N 分别为 x 轴，y 轴上的两个动点，当四边形 $PNMC$ 的周长最小时，请直接写出 M，N 两点的坐标.

【思路点拨】

（1）可设顶点式，将顶点为$A(1,-4)$，点$B(3,0)$代入求出抛物线的解析式；

（2）首先求出 D 点坐标，再利用 CD 等于圆 O 半径为$\frac{1}{2}AB=2$，由$\cos\angle PDC=\frac{CD}{PD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，得出 C 点坐标即可，进而判断抛物线是否经过点 C 即可；

（3）作 C 关于 x 轴对称点C'，P 关于 y 轴对称点P'，连接$P'C'$，与 x 轴，y 轴交于 M、N 点，此时四边形 $PNMC$ 周长最小，求出直线$P'C'$的解析式，求出图象与坐标轴交点坐标即可.

【解题过程】

（1）解:设抛物线的解析式为$y=a(x-h)^2+k$把$h=1$，$k=-4$，代入得；$y=a(x-1)^2-4$，

把$x=3$，$y=0$代入$y=a(x-1)^2-4$，解得$a=1$，

∴抛物线的解析式为：$y=(x-1)^2-4$，即：$y=x^2-2x-3$；

（2）解:如图,

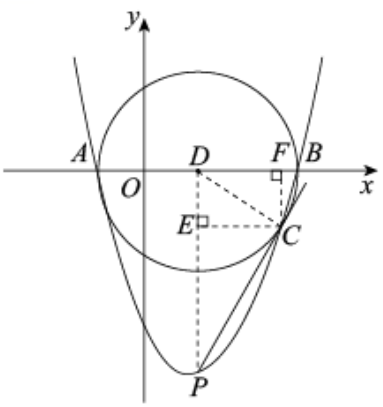


图1

作抛物线的对称轴，

把$y=0$代入$y=x^2-2x-3$解得$x_1=-1$，$x_2=3$，

∴A 点坐标为$(-1,0)$，

∴$AB=|3-(-1)|=4$，

∴$OD=2-1=1$，

∴D 点坐标为$(1,0)$，而抛物线的对称轴为直线$x=1$，

∴点 D 在直线$x=1$上，

过点 C 作$CE\perp PD$，$CF\perp x$轴，垂足分别为 E，F，连接 DC，

∵PC 是⊙ D的切线，

∴$PC\perp DC$，在$Rt\triangle PCD$中

∵$\cos\angle PDC=\frac{CP}{PD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle PDC=60°$，

解直角三角形 CDE，可得$DE=1$，$CE=\sqrt{3}$，

∴C 点坐标为$(\sqrt{3}+1,-1)$，

把$x=\sqrt{3}+1$代入$y=x^2-2x-3$得：$y=-1$，

∴点 C 在抛物线上；

（3）解：如图 2，作点 C 关于 x 轴的对称点C'，点 P 关于 y 轴的对称点P'，连接$P'C'$，分别交 x 轴，y 轴于 M，N 两点，

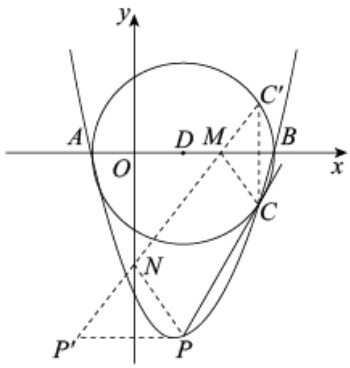


图2

此时四边形 $PNMC$ 的周长最小，

$\because C$ 点坐标为$(\sqrt{3}+1,-1)$，

$\therefore C'$点坐标为$(\sqrt{3}+1,1)$，

$\because P$ 的坐标为$(1,-4)$，

$\therefore P'$的坐标为$(-1,-4)$，

代入$y=kx+b$中，$\begin{cases}(\sqrt{3}+1)k+b=1\\ -k+b=-4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-5\sqrt{3}+10\\ b=-5\sqrt{3}+6\end{cases}$，

则直线$P'C'$的解析式为：$y=(-5\sqrt{3}+10)x-5\sqrt{3}+6$，

当$x=0$，$y=-5\sqrt{3}+6$，

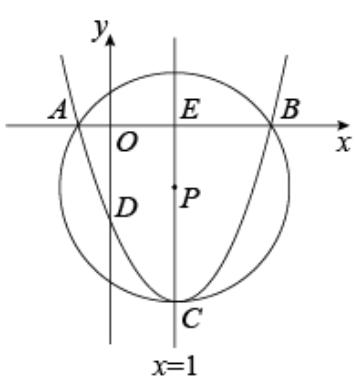
故 N 点坐标为：$(0,-5\sqrt{3}+6)$，

当$y=0$，则$0=(-5\sqrt{3}+10)x-5\sqrt{3}+6$，

解得：$x=\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$，

故 M 点坐标为：$\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{5},0\right)$.

9．（21·22 上·宜昌·期末）如图所示，对称轴为直线$x=1$的抛物线$y=x^2+bx+c$与x轴交于A、B两点，与y轴交于点$D(0,-2)$，点P在抛物线对称轴上并且位于x轴的下方，以点P为圆心作过A、B两点的圆，恰好使得弧AB的长为$\odot P$周长的$\frac{1}{3}$.



（1）求该抛物线的解析式；

（2）求⊙P的半径和圆心P的坐标，并判断抛物线的顶点C与⊙P的位置关系；

（3）在抛物线上是否存在一点M，使得$S_{\triangle ABM}=3\sqrt{3}$？若存在，求出所有符合条件的点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）根据二次函数的图像及性质，根据对称轴为$x=1$，得$-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2\times1}=1$，求出$b=-2$， 把$D(0,-2)$代入$y=x^2+bx+c$，求得$c=-2$，即可求出抛物线的解析式．

（2）根据二次函数的解析式推出$A(1-\sqrt{3},0)$，$B(1+\sqrt{3},0)$．从而得到$OB=\sqrt{3}+1$．根据对称轴为$x=1$，得到$OE=1$． $BE=\sqrt{3}$．连接PA、PB．由勾股定理可得$PE=1$，$PB=2$，求出⊙P的半径为 2，P的坐标为$(1,-1)$．根据抛物线$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$，求出抛物线$y=x^2-2x-2$的顶点坐标为$(1,-3)$．得到$PC=2$．所以推出点C在⊙P上

（3）设点M的坐标为(a,a^2-2a-2)，根据三角形的面积公式推出$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times|a^2-2a-2|=3\sqrt{3}$，得到$|a^2-2a-2|=3$，①当$a^2-2a-2=3$时，②当$a^2-2a-2=-3$时， 求出 a 的值，即可求得 M 点的坐标．

【解题过程】

（1）解： ∵对称轴为$x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2\times1}=1$

∴ $b=-2$．

把$D(0,-2)$代入$y=x^2+bx+c$，得$c=-2$．

∴抛物线的解析式为$y=x^2-2x-2$．

（2）把$y=0$代入$y=x^2-2x-2$，得$x^2-2x-2=0$，解得$x_1=1-\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$．

∴ $A(1-\sqrt{3},0)$，$B(1+\sqrt{3},0)$．

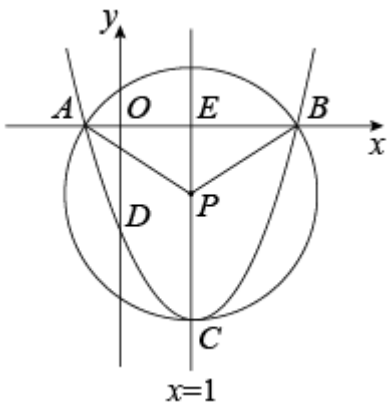
∴ $OB=\sqrt{3}+1$．

∵对称轴为$x=1$，

∴ $OE=1$．

∴ $BE=\sqrt{3}$．

连接PA、PB．



∵ $\overset{\frown}{AB}$的长为⊙P周长的$\frac{1}{3}$，

∴ $\angle APB=120°$.

∵ $PA=PB$，

∴ $\angle PBE=30°$.

由勾股定理可得$PE=1$，$PB=2$，

∴ ⊙P的半径为 2，P的坐标为$(1,-1)$.

∵ $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$，

∴抛物线$y=x^2-2x-2$的顶点坐标为$(1,-3)$.

∴ $PC=2$.

∴点C在⊙P上

（3）存在

设点M的坐标为(a,a^2-2a-2).

∵ $S_{\triangle ABM}=3\sqrt{3}$

∴ $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times|a^2-2a-2|=3\sqrt{3}$

∴ $|a^2-2a-2|=3$.

①当$a^2-2a-2=3$时，

解得$a_1=1-\sqrt{6}$，$a_2=1+\sqrt{6}$，

∴ $M_1(1-\sqrt{6},3)$，$M_2(1+\sqrt{6},3)$.

②当$a^2-2a-2=-3$时，解得$a_3=a_4=1$，

∴ $M_3(1,-3)$

综上，符合条件的点 M 的坐标有$(1-\sqrt{6},3)$，$(1+\sqrt{6},3)$，$(1,-3)$.

10．（21·22·全国·专题练习）定义：平面直角坐标系 xOy 中，过二次函数图像与坐标轴交点的圆，称为该二次函数的坐标圆．

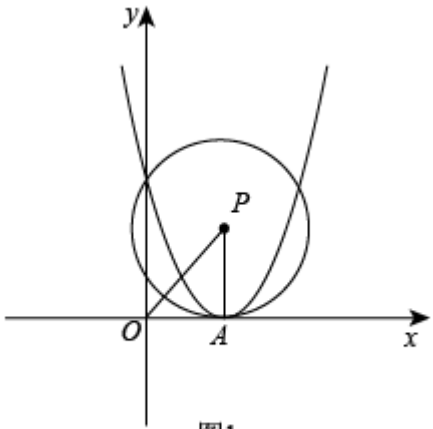


图1

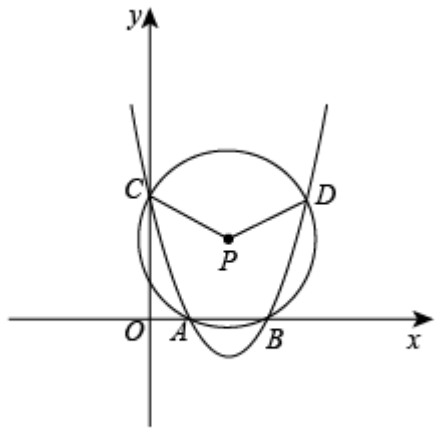


图2

（1）已知点 P（2，2），以 P 为圆心，$\sqrt{5}$为半径作圆．请判断⊙P 是不是二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的坐标圆，并说明理由；

（2）已知二次函数 $y=x^2-4x+4$ 图像的顶点为 A，坐标圆的圆心为 P，如图 1，求△POA 周长的最小值；

（3）已知二次函数 $y=ax^2-4x+4$（$0<a<1$）图像交 x 轴于点 A，B，交 y 轴于点 C，与坐标圆的第四个交点为 D，连接 PC，PD，如图 2．若∠CPD=120°，求 a 的值．

【思路点拨】

（1）先求出二次函数 $y=x^2-4x+3$ 图像与 x 轴、y 轴的交点，再计算这三个交点是否在以 P（2，2）为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆上，即可作出判断．

（2）由题意可得，二次函数 $y=x^2-4x+4$ 图像的顶点 A（2，0），与 y 轴的交点 H（0，4），所以△POA 周长 $=PO+PA+OA=PO+PH+2\geq OH+2$，即可得出最小值．

（3）连接 CD，PA，设二次函数 $y=ax^2-4x+4$ 图像的对称轴 l 与 CD 交于点 E，与 x 轴交于点 F，由对称性知，对称轴 l 经过点 P，且 $l\perp CD$，设 $PE=m$，由∠CPD=120°，可得 $PA=PC=2m$，$CE=\sqrt{3}m$，$PF=4-m$，表示出 AB、$AF=BF$，在 $Rt\triangle PAF$ 中，利用勾股定理建立方程，求得 m 的值，进而得出 a 的值．

【解题过程】

（1）对于二次函数 $y=x^2-4x+3$，

当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $y=0$ 时，解得 $x=1$ 或 $x=3$，

∴二次函数图像与 x 轴交点为 A（1，0），B（3，0），与 y 轴交点为 C（0，3），

∵点 P（2，2），

∴$PA=PB=PC=\sqrt{5}$，

∴⊙P 是二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的坐标圆．

（2）如图 1，连接 PH，

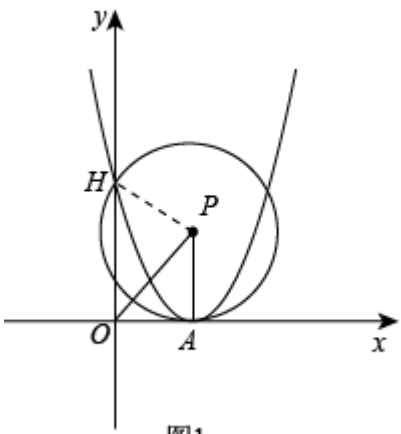


图1

∵二次函数 $y=x^2-4x+4$ 图像的顶点为 A，坐标圆的圆心为 P，

∴A（2，0），与 y 轴的交点 H（0，4），

∴△POA 周长$=PO+PA+OA=PO+PH+2\geq OH+2=6$，

∴△POA 周长的最小值为 6．

（3）如图 2，连接 CD，PA，设二次函数 $y=ax^2-4x+4$ 图像的对称轴 l 与 CD 交于点 E，与 x 轴交于点 F，

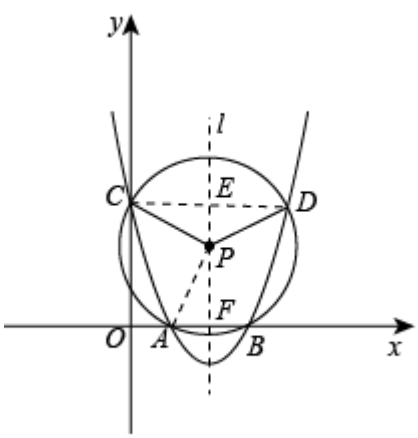


图2

由对称性知，对称轴 l 经过点 P，且 $l\perp CD$，

∵$AB=\frac{\sqrt{16-16a}}{a}=\frac{4\sqrt{1-a}}{a}$，

∴$AF=BF=\frac{2\sqrt{1-a}}{a}$，

∵∠$CPD=120°$，$PC=PD$，C（0，4），

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/978065002060006056