senior high school education

第2课时　指数函数的性质应用

内容索引

01. 新知初探·自主学习

02. 课堂探究·素养提升

题型1 利用指数函数的单调性比较大小

题型2 利用指数函数的单调性解不等式

题型3 指数型函数的单调性

题型4 指数函数性质的综合应用

03. 课时作业(二十五)

01. 新知初探·自主学习

基 础 自 测

1.判断正误．(正确的画“√”，错误的画“×”)

(1)$y=a^x$($a>0$，且$a\neq1$)的最小值为0.(×)

(2)$y=2^{1-x}$是**R**上的增函数．(×)

(3)若$0.1^a>0.1^b$，则$a>b$.(×)

(4)$y=3^x$与$y=3^{-x}$的图象关于y轴对称．(√)

返回导航

2．下列函数中是奇函数，且在$(0，+\infty)$上单调递增的是(　　)

A．$y=\frac{1}{x}$　　B．$y=|x|$

C．$y=2^{x}$　　D．$y=x^{3}$

答案：D

解析：$y=\frac{1}{x}$在$(0，+\infty)$上单调递减，所以排除A；$y=|x|$是偶函数，所以排除B；$y=2^{x}$为非奇非偶函数，所以排除C.选D.

3．下列判断正确的是(　　)

A．$1.5^{1.5}>1.5^2$

B．$0.5^2<0.5^3$

C．$e^2<\sqrt{2}e$

D．$0.9^{0.2}>0.9^{0.5}$

答案：*D*

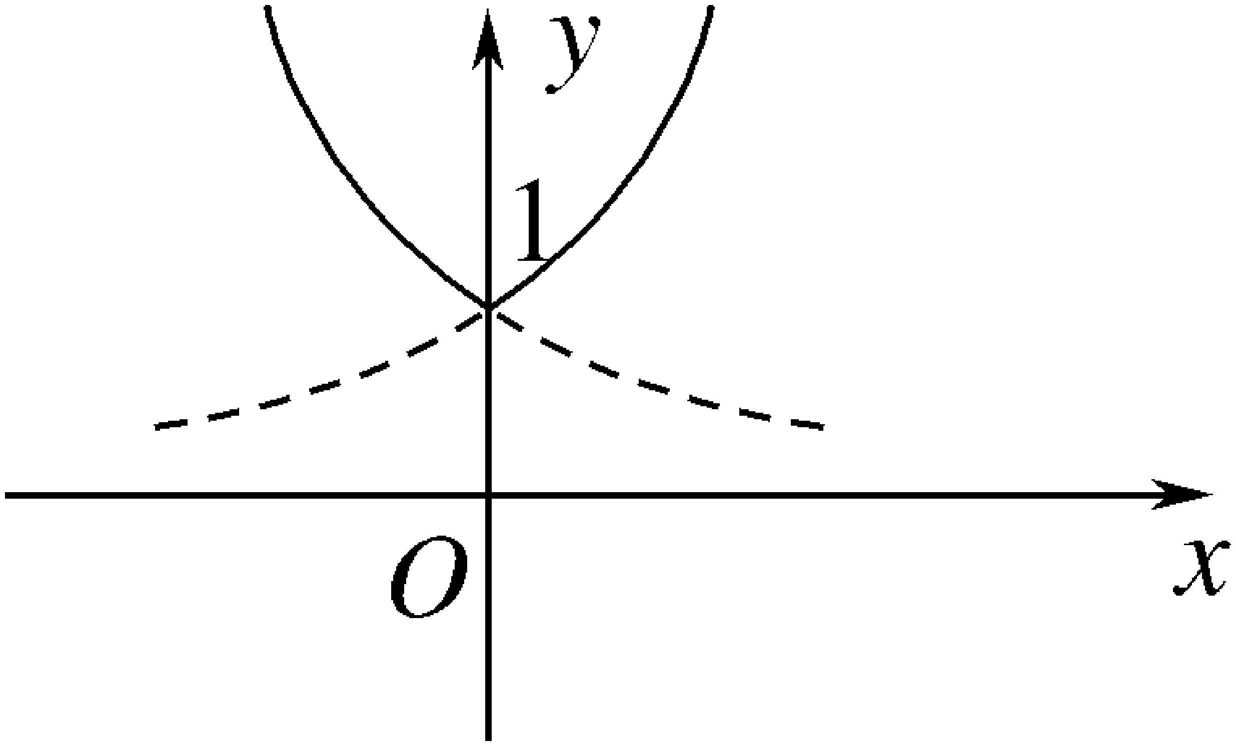
解析：因为$y=0.9^x$是减函数，且$0.5>0.2$，

所以$0.9^{0.2}>0.9^{0.5}$.

返回导航

4．函数$y=2^{|x|}$的单调递减区间是**(－∞，0]**.

解析： 函数$y=2^{|x|}$的图象如图．由图可知，函数$y=2^{|x|}$的单调递减区间是$(-\infty，0]$.



02. 课堂探究 · 素养提升

题型1 利用指数函数的单调性比较大小——自主完成

1．[多选题]下列各组数的大小比较不正确的是(　　)

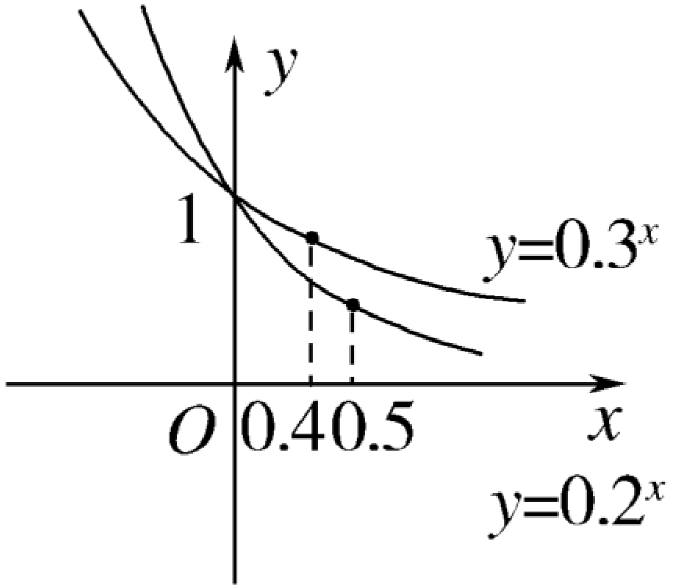
A．$1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$　　B．$0.6^{-1.2}>0.6^{-1.5}$

C．$1.5^{0.3}>0.8^{1.2}$　　D．$0.3^{0.4}<0.2^{0.5}$

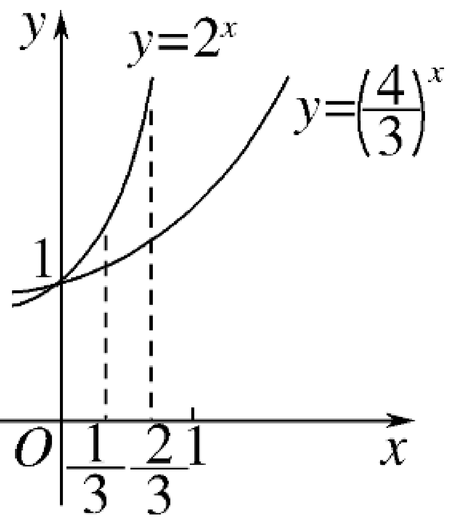
答案：BD

返回导航

解析：A中，函数$y=1.5^x$在**R**上是增函数，∵$2.5<3.2$，∴$1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$，A正确；B中，函数$y=0.6^x$在**R**上是减函数，∵$-1.2>-1.5$，∴$0.6^{-1.2}<0.6^{-1.5}$，B不正确；C中，由指数函数的性质，知$1.5^{0.3}>1.5^0=1$，而$0.8^{1.2}<0.8^0=1$，∴$1.5^{0.3}>0.8^{1.2}$，C正确；D中，在同一直角坐标系内，画出$y=0.3^x$，$y=0.2^x$两个函数的图象，如图所示．由图象得$0.3^{0.4}>0.2^{0.5}$，D不正确．故选BD.



2．比较下列各值的大小：$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$2^{\frac{2}{3}}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$，$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$．



解析： 先根据幂的特征，将这4个数分类：①负数：$\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}$；②大于1的数：$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$2^{\frac{2}{3}}$；③大于0且小于1的数：$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.②中，$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$(也可在同一平面直角坐标系中，分别作出$y=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$，$y=2^{x}$的图象，再分别取$x=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2}{3}$，比较对应函数值的大小，如图)，故有$\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$.

返回导航

方法归纳

比较指数幂的大小时，主要应用指数函数的单调性以及图象的特征，或引入中间数进行比较.

题型2　利用指数函数的单调性解不等式——师生共研

例1 (1)不等式$3^{x-2}>1$的解集为**(2，+∞)**.

解析：$3^{x-2}>1\Rightarrow 3^{x-2}>3^{0}\Rightarrow x-2>0\Rightarrow x>2$，所以解集为$(2，+\infty)$.

返回导航

(2)若$a^{x+1}>(\frac{1}{a})^{5-3x}(a>0$，且$a\neq 1)$，求$x$的取值范围.

解析： 因为$a^{x+1}>(\frac{1}{a})^{5-3x}$，所以当$a>1$时，$y=a^x$为增函数，可得$x+1>3x-5$，所以$x<3$.

当$0<a<1$时，$y=a^x$为减函数，可得$x+1<3x-5$，所以$x>3$.

综上，当$a>1$时，x的取值范围为$(-\infty, 3)$，

当$0<a<1$时，x的取值范围为$(3, +\infty)$.

返回导航

方法归纳

解指数不等式应注意的问题

(1)形如$a^x>a^b$的不等式，借助于函数$y=a^x$的单调性求解，如果a的取值不确定，需分$a>1$与$0<a<1$两种情况讨论；

(2)形如$a^x>b$的不等式，注意将b转化为以a为底数的指数幂的形式，再借助于函数$y=a^x$的单调性求解.

跟踪训练1

(1)解不等式$(\frac{1}{3})^{x^2-2}\leqslant 3$.

解析： $(\frac{1}{3})^{x^2-2}=3^{2-x^2}\leqslant 3$，$\because y=3^x$是$\mathbf{R}$上的增函数，$\therefore 2-x^2\leqslant 1$，解得$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$，$\therefore$原不等式的解集是$(-\infty，-1]\cup[1，+\infty)$.

(2)已知$(a^2+2a+3)^x>(a^2+2a+3)^{1-x}$，求$x$的取值范围.

解析： $\because a^2+2a+3=(a+1)^2+2>1$，

$\therefore y=(a^2+2a+3)^x$在$\mathbf{R}$上是增函数.

$\therefore x>1-x$，解得$x>\frac{1}{2}$.

$\therefore x$的取值范围是$(\frac{1}{2}，+\infty)$.

题型3 指数型函数的单调性——师生共研

例2 判断$f(x)=(\frac{1}{3})^{x^2-2x}$的单调性，并求其值域.

解析： 令$u=x^2-2x$，则原函数变为$y=(\frac{1}{3})^u$.

$\because u=x^2-2x=(x-1)^2-1$在$(-\infty,1]$上单调递减，在$[1,+\infty)$上单调递增，又$\because y=(\frac{1}{3})^u$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数，

$\therefore y=(\frac{1}{3})^{x^2-2}$在$(-\infty,1]$上单调递增，在$[1,+\infty)$上单调递减.

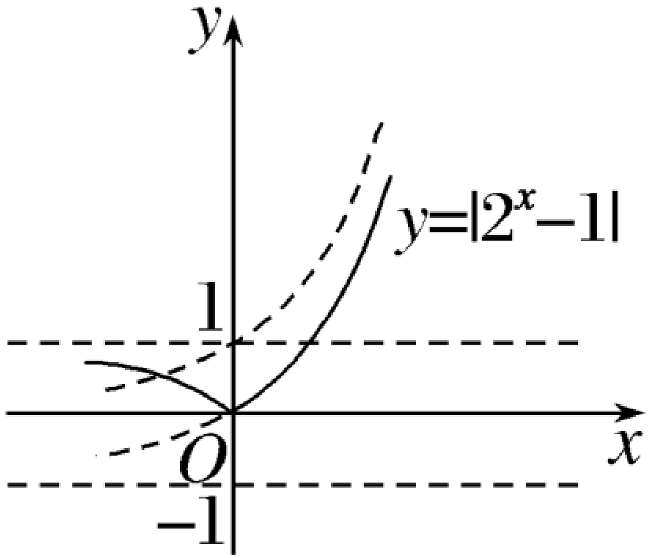
$\because u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，$\therefore y=(\frac{1}{3})^u$，$u\in[-1,+\infty)$，

$\therefore 0<(\frac{1}{3})^u\leqslant(\frac{1}{3})^{-1}=3$，

$\therefore$原函数的值域为$(0,3]$.

变式1 (变条件，变设问)若函数$y=|2^x-1|$在$(-\infty, m]$上单调递减，则m的取值范围是$\underline{(-\infty, 0]}$.

解析：在平面直角坐标系中作出$y=2^x$的图象，把图象沿y轴向下平移1个单位长度得到$y=2^x-1$的图象，再把$y=2^x-1$在x轴下方的图象翻折到x轴上方，其余部分不变．如图，得到$y=|2^x-1|$的图象，由图可知$y=|2^x-1|$在$(-\infty, 0]$上单调递减，故$m\in(-\infty, 0]$.



变式2 (变条件，变设问)把本例的函数变为“$f(x)=2^{-x^2+2x}$”，求其单调区间.

解析：函数$y=2^{-x^2+2x}$的定义域为$\mathbf{R}$. 令$u=-x^2+2x$，则$y=2^u$.

当$x\in(-\infty,1]$时，函数$u=-x^2+2x$单调递增，函数$y=2^u$单调递增，

所以函数$y=2^{-x^2+2x}$在$(-\infty,1]$上单调递增.

当$x\in[1,+\infty)$时，函数$u=-x^2+2x$单调递减，函数$y=2^u$单调递增，所以函数$y=2^{-x^2+2x}$在$[1,+\infty)$上单调递减.

综上，函数$y=2^{-x^2+2x}$的单调递减区间是$[1,+\infty)$，单调递增区间是$(-\infty,1]$.

返回导航

方法归纳

函数$y=a^{f(x)}(a>0$，且$a\neq1)$的单调性的处理技巧

(1)指数型函数$y=a^{f(x)}(a>0$，且$a\neq1)$的单调性由两点决定，一是底数$a>1$还是$0<a<1$；二是$f(x)$的单调性，它由两个函数$y=a^u$，$u=f(x)$复合而成；

(2)求复合函数的单调区间，首先求出函数的定义域，然后把函数分解成$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，通过考查$f(u)$和$\varphi(x)$的单调性，求出$y=f(\varphi(x))$的单调性.

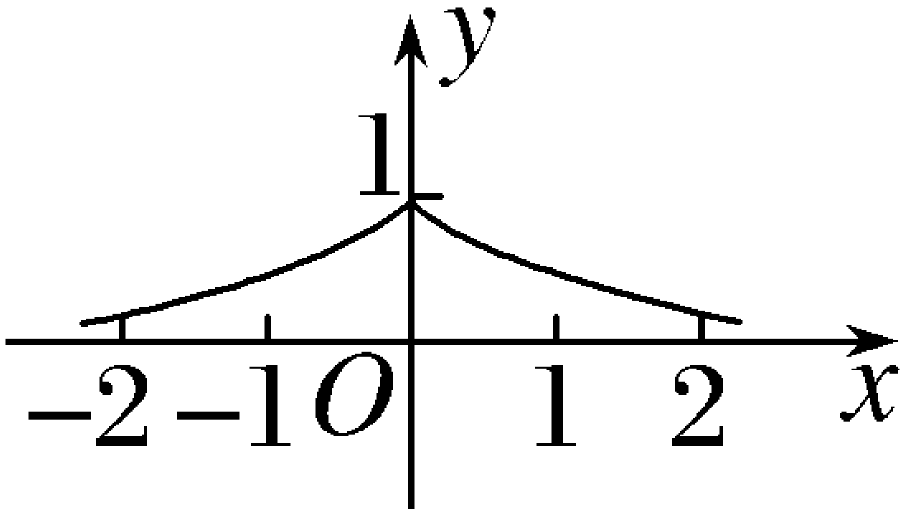
返回导航

跟踪训练2

(1)画出函数$y=2^{-|x|}$的图象，并根据图象求函数的单调区间.

解析： $y=2^{-|x|}=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & x\geq 0\\ 2x, & <0\end{cases}$的图象如图所示.

由图象可得函数$y=2^{-|x|}$的单调递增区间为$(-\infty, 0]$，单调递减区间为$(0, +\infty)$.



返回导航

(2)函数$f(x)=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$在区间$[1，2]$上的最大值比最小值大$\frac{a}{2}$，求a的值.

解析：①若$a>1$，则$f(x)$在$[1，2]$上单调递增，最大值为a^2，最小值为a.

所以$a^2-a=\frac{a}{2}$，解得$a=\frac{3}{2}$或$a=0$(舍去).

②若$0<a<1$，则$f(x)$在$[1，2]$上单调递减，最大值为a，最小值为a^2.

所以$a-a^2=\frac{a}{2}$，解得$a=\frac{1}{2}$或$a=0$(舍去).

综上所述，a的值为$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$.

返回导航

题型4　指数函数性质的综合应用——师生共研

例3已知函数$f(x)=\frac{2^x}{2^x-1}+m$，$m\in\mathbf{R}$.

(1)判断函数$f(x)$在$(-\infty，0)$上的单调性，并证明你的结论.