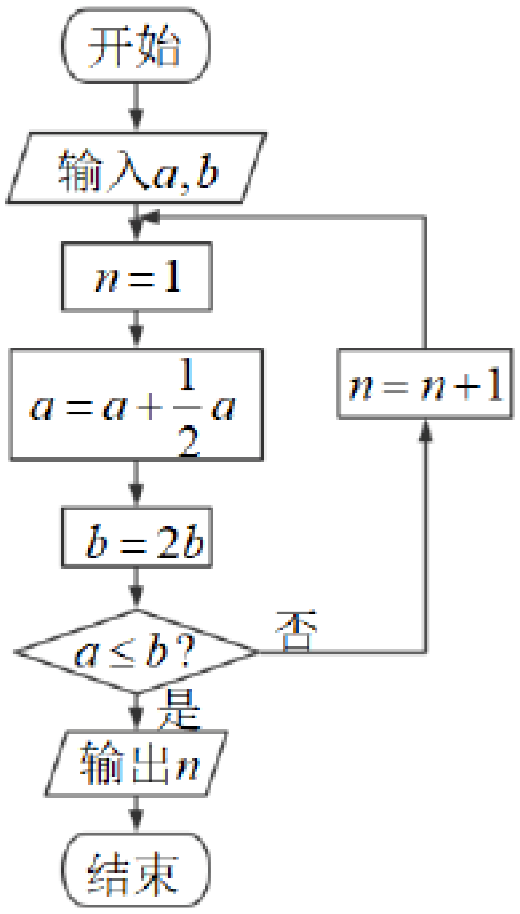
山东省栖霞市2024 届高三阶段性测试（四）数学试题

注意事项:
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．元代数学家朱世杰的数学名著《算术启蒙》是中国古代代数学的通论，其中关于 "松竹并生"的问题：松长五尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等.下图是源于其思想的一个程序图，若 $a \quad 32$ ，$b \quad 12$，则输出的 n（　　）



A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

2．函数$f(x)=\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-3}$的定义域为（　　）

A．$[\frac{3}{2}$，3）∪（3，+∞）　　B．（-∞，3）∪（3，+∞）

C．$[\frac{3}{2}$，+∞）　　D．（3，+∞）

3．已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} x \quad y \quad 1 \quad 0 \\ 2x \quad y \quad 4 \quad 0 \\ 4x \quad y \quad 4 \quad 0 \end{cases}$，则$|3x \quad 4y|$的最小值为（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

4．双曲线 $\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1(a \quad 0, b \quad 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2，一条渐近线方程为 $l: y \quad \frac{b}{a}x$，过点 F_1 且与 l 垂直的直线分

别交双曲线的左支及右支于P,Q，满足$\overrightarrow{OP}\quad\frac{1}{2}\overrightarrow{OF_1}\quad\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．3　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

5．已知集合 M ＝{y | y＝2^x，x＞0}，N＝{x | y＝lg（2x－x^2）}，则 M∩N 为（ ）

A．（1，＋∞）　　B．（1，2）　　C．[2，＋∞）　　D．[1，＋∞）

6．已知直线l：$kx\quad y\quad 3k\quad 1\quad 0$与椭圆$C_1$：$\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 1(a\quad b\quad 0)$交于A、B两点，与圆$C_2$：$x\quad 3^2\quad y\quad 1^2\quad 1$交于C、D两点.若存在$k\quad 2,\ 1$，使得$\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{DB}$，则椭圆$C_1$的离心率的取值范围为（ ）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1)$　　C．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

7．设x_1,x_2为$f\ x\quad\sqrt{3}\sin\ x\quad\cos\ x\qquad 0$的两个零点，且$|x_1\quad x_2|$的最小值为 1，则　　（　　　）

A．　　B．$\overline{2}$　　C．$\overline{3}$　　D．$\overline{4}$

8．三棱锥$S\quad ABC$的各个顶点都在求O的表面上，且ABC是等边三角形，SA底面ABC，$SA\quad 4$，$AB\quad 6$，若点D在线段SA上，且$AD\quad 2SD$，则过点D的平面截球O所得截面的最小面积为（　　）

A．3　　B．4　　C．8　　D．13

9．已知变量x，y满足不等式组$\begin{matrix} x\quad y\quad 2 \\ x\quad y\quad 1 \\ x\quad 0 \end{matrix}$，则$2x\quad y$的最小值为（　　）

A．　4　　B．　2　　C．0　　D．4

10．已知$a\quad(\frac{1}{2})^{0.2},b\quad\log_{\frac{1}{2}}0.2,c\quad a^b$，则$a,b,c$的大小关系是（　　）

A．$a\quad b\quad c$　　B．$c\quad a\quad b$　　C．$a\quad c\quad b$　　D．$b\quad c\quad a$

11．已知向量$\vec{m}\quad 2\cos^2x,\sqrt{3}$，$\vec{n}\quad 1,\sin 2x$，设函数$f\ x\quad\vec{m}\ \vec{n}$，则下列关于函数$y\quad f\ x$的性质的描述正确的是（　　）

A．关于直线$x\quad\overline{12}$　　B．关于点$\frac{5}{12},0$

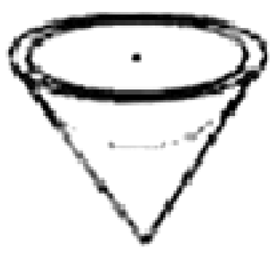
C．周期为2　　D．$y\quad f\ x$在$\overline{3},0$上是增函数

12．设F_1，F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}\quad\frac{y^2}{b^2}\quad 1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点，过点$F_1$作圆$x^2\quad y^2\quad b^2$的切线与双曲线的左支交于点P，若$\left|PF_2\right|\quad 2\left|PF_1\right|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．$\sqrt{6}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．如图，在一个倒置的高为 2 的圆锥形容器中，装有深度为h的水，再放入一个半径为 1 的不锈钢制的实心半球后，半球的大圆面、水面均与容器口相平，则h的值为____________.



14．已知$\tan\quad 3$，则$\cos 2\quad$ __________.

15．在正方体$ABCD\quad A_1B_1C_1D_1$中，已知点P在直线AB_1上运动，则下列四个命题中：①三棱锥$D\quad C_1BP$的体积不变；②$DP\quad D_1C$；③当P为AB_1中点时，二面角$P\quad A_1C_1\quad C$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$；④若正方体的棱长为 2，则$\left|DP\right|\quad\left|BP\right|$的最小值为$\sqrt{8\quad 4\sqrt{2}}$；其中说法正确的是____________（写出所有说法正确的编号）

16．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线$l:y\quad\frac{1}{2}$与函数$f\ x\quad\sin\quad x\ \frac{}{6}\qquad 0$的图象在 y 轴右侧的公共点从左到右依次为$A_1$，$A_2$，…，若点$A_1$的横坐标为 1，则点$A_2$的横坐标为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知抛物线$C: y^2\quad 2px\ \ p\quad 0$的焦点为 F，点$P\ \ 2,n\ \ n\quad 0$在抛物线 C 上，$\left|PF\right|\quad 3$，直线$l$过点 F，且与抛物线$C$交于 A，B 两点.

（1）求抛物线C的方程及点 P 的坐标；

（2）求$\overline{PA}\quad\overline{PB}$的最大值.

18．（12 分）以直角坐标系xOy的原点为极坐标系的极点，x轴的正半轴为极轴．已知曲线C_1的极坐标方程为

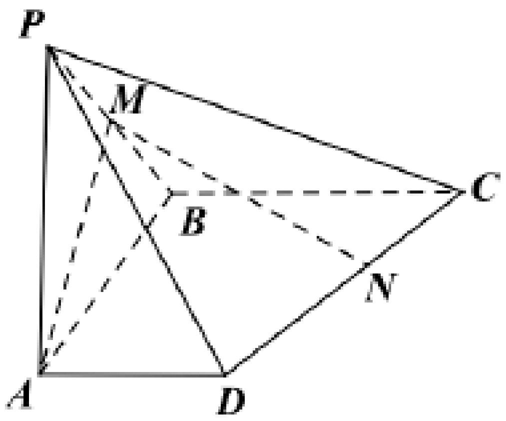
$4\cos\quad 8\sin$，P 是C_1上一动点，$\overrightarrow{OP}\quad 2\overrightarrow{OQ}$，点$Q$的轨迹为$C_2$.

（1）求曲线C_2的极坐标方程，并化为直角坐标方程；

（2）若点 M (0,1)，直线l的参数方程$\begin{matrix} x\quad t\cos \\ y\quad 1\quad t\sin \end{matrix}$（$t$为参数），直线$l$与曲线$C_2$的交点为 A，B，当$\left|MA\right|\quad\left|MB\right|$取

最小值时，求直线l的普通方程.

19.（12 分）如图，在四棱锥$P\quad ABCD$ 中，侧棱 PA 底面$ABCD$ ，$AD // BC$ ， $ABC\quad 90^\circ$，$AD\quad 1$，$PA\quad AB\quad BC\quad 2$，$M$ 是棱PB 中点.



（1）已知点E在棱BC 上，且平面AME //平面PCD ，试确定点E的位置并说明理由；

（2）设点N 是线段CD 上的动点，当点N 在何处时，直线MN 与平面PAB 所成角最大？并求最大角的正弦值.

20.（12 分）一种游戏的规则为抛掷一枚硬币，每次正面向上得 2 分，反面向上得 1 分.

（1）设抛掷 4 次的得分为X ，求变量X 的分布列和数学期望.

（2）当游戏得分为$n(n\quad N*)$时，游戏停止，记得n分的概率和为Q_n,$Q_1\quad \frac{1}{2}$.

①求Q_2；

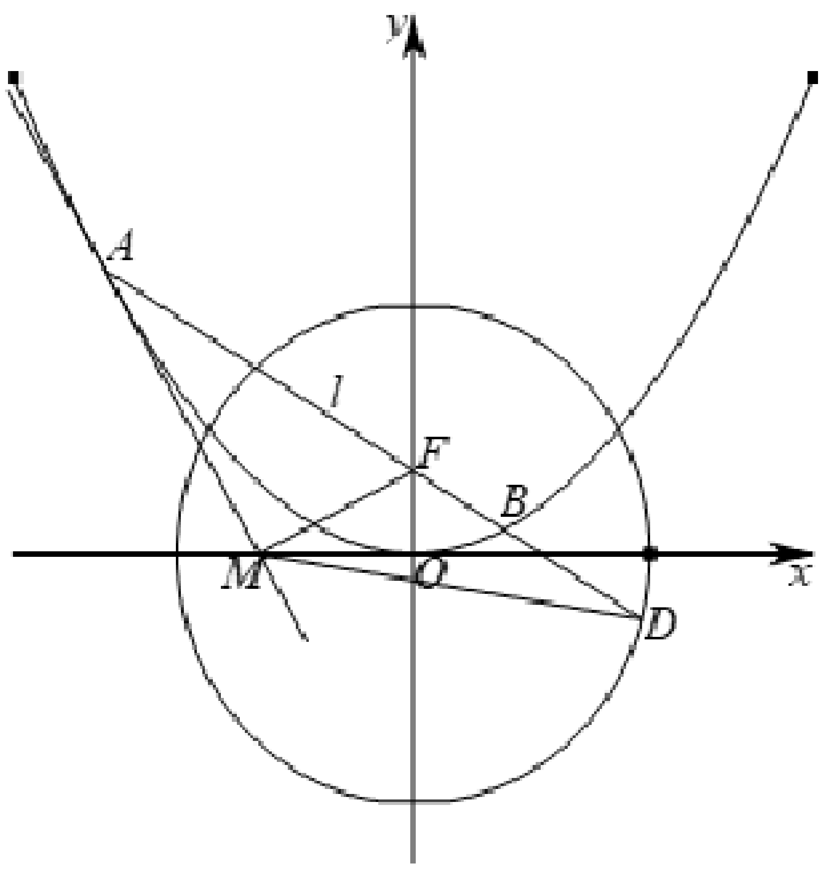
②当$n\quad N*$时，记$A_n\quad Q_{n\ 1}\quad \frac{1}{2}Q_n$,$B_n\quad Q_{n\ 1}\quad Q_n$，证明：数列$A_n$ 为常数列，数列B_n 为等比数列.

21.（12 分）已知函数$f(x)\quad \frac{1}{3}|x\quad a|(a\quad R)$.

（1）当$a\quad 2$时，解不等式$\left|x\quad \frac{1}{3}\right|\quad f(x)\quad 1$；

（2）设不等式$\left|x\quad \frac{1}{3}\right|\quad f(x)\quad x$的解集为$M$ ，若$\frac{1}{3},\frac{1}{2}\quad M$ ，求实数a的取值范围.

22.（10 分）已知抛物线$C_1:x^2\quad 4y$的焦点F 也是椭圆$C_2:\frac{y^2}{a^2}\quad \frac{x^2}{b^2}\quad 1\ a\quad b\quad 0$ 的一个焦点，C_1与C_2的公共弦的长为$2\sqrt{6}$.



（1）求 C_2 的方程；

（2）过点 F 的直线与 C_1 相交于 A 、B 两点，与 C_2 相交于 C 、D 两点，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向，设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M ，证明：直线 l 绕点 F 旋转时， MFD 总是钝角三角形；

（3）P 为 C_2 上的动点，A_1、A_2 为 C_2 长轴的两个端点，过点 O 作 A_2P 的平行线交椭圆于点 R ，过点 O 作 A_1P 的平行线交椭圆于点 S ，请问 ORS 的面积是否为定值，并说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解题分析】

分析：根据流程图中的 $a \quad a \quad \frac{a}{2}$ 可知，每次循环 a 的值应是一个等比数列，公比为 $\frac{3}{2}$；根据流程图中的 $b \quad 2b$ 可知，每次循环 b 的值应是一个等比数列，公比为 2，根据每次循环得到的 a,b 的值的大小决定循环的次数即可.

详解： 记执行第 n 次循环时，a 的值记为有 a_n，则有 $a_n \quad 32 \ \frac{3}{2}\ ^{n}$；

记执行第 n 次循环时，b 的值记为有 b_n，则有 $b_n \quad 12 \quad 2^n$.

令 $32\ \frac{3}{2}\ ^{n}\quad 12\quad 2^{n}$，则有 $\frac{3}{4}\ ^{n}\quad \frac{3}{8}$，故

$n\quad 4$，故选 B.

点睛：本题为算法中的循环结构和数列通项的综合，属于中档题，解题时注意流程图中蕴含的数列关系（比如相邻项满足等比数列、等差数列的定义，是否是求数列的前 n 和、前 n 项积等）.

2、A

【解题分析】

根据幂函数的定义域与分母不为零列不等式组求解即可.

【题目详解】

因为函数 $y=\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-3}$，$\therefore\begin{cases}2x-3\geq 0\\ x-3\neq 0\end{cases}$，

解得 $x\geq\frac{3}{2}$ 且 $x\neq 3$；

$\therefore$ 函数 $f(x)=\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-3}$ 的定义域为 $\left[\frac{3}{2},3\right)\cup(3,+\infty)$，故选 A.

【题目点拨】

定义域的三种类型及求法：(1)已知函数的解析式，则构造使解析式有意义的不等式(组)求解；(2) 对实际问题：由实际意义及使解析式有意义构成的不等式(组)求解；(3) 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a\leq g(x)\leq b$ 求出.

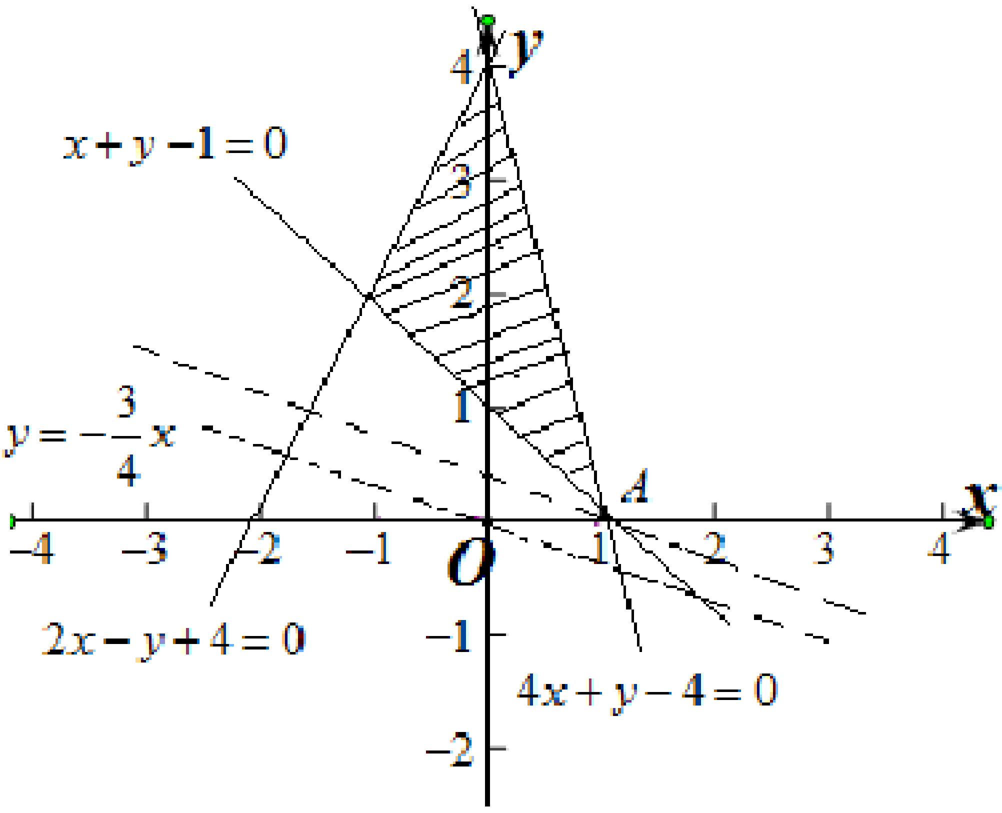
3、B

【解题分析】

作出约束条件的可行域，在可行域内求 $z\quad 3x\quad 4y$ 的最小值即为 $|3x\quad 4y|$ 的最小值，作 $y\quad \frac{3}{4}x$，平移直线即可求解.

【题目详解】

作出实数 x,y 满足不等式组 $\begin{matrix}x\quad y\quad 1\quad 0\\ 2x\quad y\quad 4\quad 0\\ 4x\quad y\quad 4\quad 0\end{matrix}$ 的可行域，如图（阴影部分）



令 $z \quad 3x \quad 4y$，则 $y \quad \frac{3}{4}x \quad \frac{z}{4}$，

作出 $y \quad \frac{3}{4}x$，平移直线，当直线经过点 $A\ 1, 0$ 时，截距最小，

故 $z_{min} \quad 3\ 1 \quad 0 \quad 3$，

即 $|3x \quad 4y|$ 的最小值为 3.

故选：B

【题目点拨】

本题考查了简单的线性规划问题，解题的关键是作出可行域、理解目标函数的意义，属于基础题.

4、A

【解题分析】

设 $P \quad x_1, y_1 \quad ,Q \quad x_2, y_2$ ，直线 PQ 的方程为 $x \quad \frac{b}{a}y \quad c$，联立方程得到 $y_1 \quad y_2 \quad \frac{2ab^3}{b^2 \quad a^2 \quad c}$，$y_1y_2 \quad \frac{a^2b^4}{b^2 \quad a^2 \quad c^2}$，

根据向量关系化简到 $b^2 \quad 9a^2$，得到离心率.

【题目详解】

设 $P \quad x_1, y_1 \quad ,Q \quad x_2, y_2$ ，直线 PQ 的方程为 $x \quad \frac{b}{a}y \quad c$.

联立 $\begin{matrix} x \quad \frac{b}{a}y \quad c, \\ \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1, \end{matrix}$ 整理得 $b^4 \quad a^4 \quad y^2 \quad 2ab^3cy \quad a^2b^4 \quad 0$,

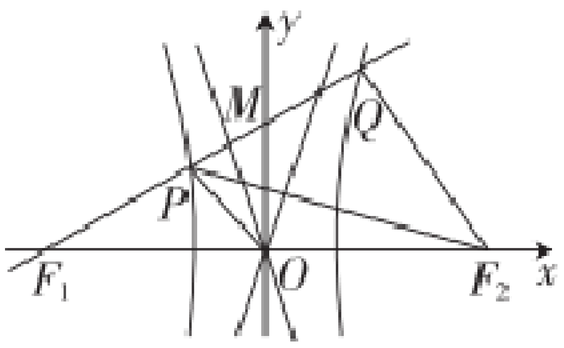
则 $y_1 \quad y_2 \quad \frac{2ab^3}{b^2 \quad a^2 \quad c}, y_1 y_2 \quad \frac{a^2b^4}{b^2 \quad a^2 \quad c^2}$.

因为 $\overrightarrow{OP} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{OF_1} \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，所以 P 为线段 QF_1 的中点，所以 $y_2 \quad 2y_1$，

$\frac{y_1 \quad y_2{}^2}{y_1 \quad y_2} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{4a^2b^6 \quad b^2 \quad a^2 \quad c^2}{b^2 \quad a^2 \quad {}^2c^2a^2b^4} \quad \frac{4b^2}{b^2 \quad a^2}$，整理得 $b^2 \quad 9a^2$，

故该双曲线的离心率 $e \quad \sqrt{10}$.

故选：A.



【题目点拨】

本题考查了双曲线的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力.

5、B

【解题分析】

$M = \{y|y = 2^x, x > 0\} = \{y|y > 1\}$,

$N = \{x|y = \lg(2x - x^2)\} = \{x|2x - x^2 > 0\}$

$= \{x|x^2 - 2x < 0\} = \{x|0 < x < 2\}$,

$\therefore M \cap N = (1,2)$.

故选B.

6、A

【解题分析】

由题意可知直线过定点即为圆心，由此得到 A,B 坐标的关系，再根据点差法得到直线的斜率 k 与 A,B 坐标的关系，由此化简并求解出离心率的取值范围.

【题目详解】

设 $A \quad x_1, y_1 \quad ,B \quad x_2, y_2$ ，且线 $l: kx \quad y \quad 3k \quad 1 \quad 0$ 过定点 $3,1$ 即为 C_2 的圆心，

因为 $\overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{DB}$，所以 $\begin{matrix} x_1 \quad x_2 \quad x_C \quad x_D \quad 2 \quad 3 \quad 6 \\ y_1 \quad y_2 \quad y_C \quad y_D \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{matrix}$，

又因为 $\begin{cases} b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 \\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 \end{cases}$，所以 $b^2(x_1^2-x_2^2)=-a^2(y_1^2-y_2^2)$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以 $k=-\frac{3b^2}{a^2}\in(-2,-1)$，

所以 $\frac{b^2}{a^2}\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，所以 $\frac{a^2-c^2}{a^2}\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，所以 $1-e^2\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以 $e\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

故选：A.

【题目点拨】

本题考查椭圆与圆的综合应用，着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用，难度一般.通过运用点差法达到“设而不求”的目的，大大简化运算.

7、A

【解题分析】

先化简已知得 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})$,再根据题意得出 f（x）的最小值正周期 T 为 1×2，再求出 ω的值.

【题目详解】

由题得 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})$,

设 x_1，x_2 为 f（x）=2sin（ωx-$\frac{\pi}{6}$）（ω>0）的两个零点，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 1，

∴ $\frac{T}{2}$=1，解得 T=2；

∴ $\frac{2\pi}{\omega}$=2，

解得 ω=π

故选 A .

【题目点拨】

本题考查了三角恒等变换和三角函数的图象与性质的应用问题，是基础题.

8、A

【解题分析】

由题意画出图形，求出三棱锥 S-ABC 的外接球的半径，再求出外接球球心到 D 的距离，利用勾股定理求得过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径，则答案可求.

【题目详解】

如图，设三角形 ABC 外接圆的圆心为 G，则外接圆半径 $AG=\frac{2}{3}\ \ 3\sqrt{3}\ \ \ 2\sqrt{3}$,

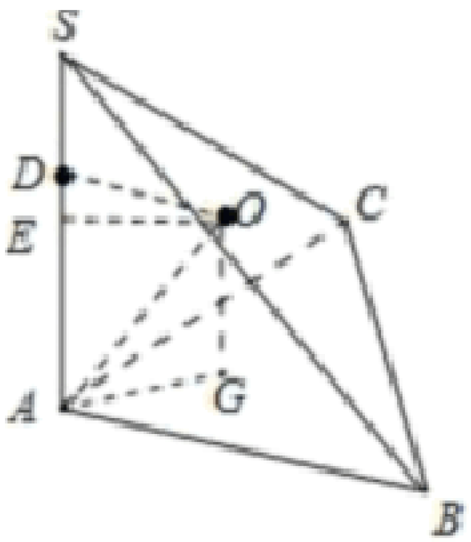
设三棱锥 S-ABC 的外接球的球心为 O，则外接球的半径 $R=\sqrt{\ 2\sqrt{3}\ ^{2}\ \ \ 2^{2}}\ \ \ 4$

取 SA 中点 E，由 SA =4，AD =3SD，得 DE =1,

所以 $OD=\sqrt{\ 2\sqrt{3}\ ^{2}\ \ \ 1^{2}}\ \ \ \sqrt{13}$.

则过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径为 $\sqrt{4^{2}\ \ \ \ \sqrt{13}\ ^{2}}\ \ \ \sqrt{3}$

所以过点 D 的平面截球 O 所得截面的最小面积为 $\ \ \sqrt{3}\ ^{2}\ \ \ 3$



故选：A

【题目点拨】

本题考查三棱锥的外接球问题，还考查了求截面的最小面积，属于较难题.

9、B

【解题分析】

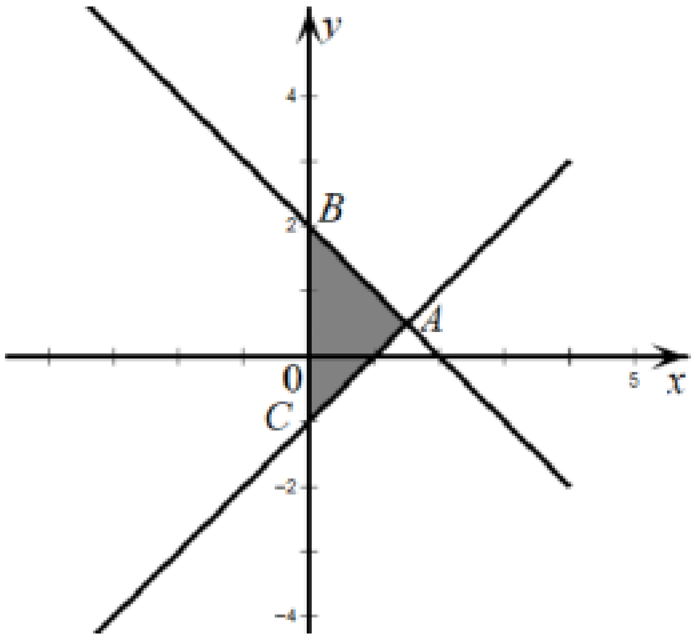
先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值.

【题目详解】

解：由变量 x，y 满足不等式组 $\begin{matrix} x\ \ \ y\ \ \ 2 \\ x\ \ \ y\ \ \ 1 \\ x\ \ \ 0 \end{matrix}$，画出相应图形如下：

可知点 $A\ \ 1,1$,$B\ \ 0,2$,

$2x\ \ \ y$ 在 B 处有最小值，最小值为 2.



故选：B.

【题目点拨】

本题主要考查简单的线性规划，运用了数形结合的方法，属于基础题.

10、B

【解题分析】

利用函数 $y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 与函数 $y \quad \log_{\frac{1}{2}} x$ 互为反函数，可得 $0 \quad a \quad b \quad 1$，再利用对数运算性质比较 a,c进而可得结论.

【题目详解】

依题意，函数 $y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 与函数 $y \quad \log_{\frac{1}{2}} x$ 关于直线 $y \quad x$ 对称，则 $0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} \quad \log_{\frac{1}{2}} 0.2$,

即 $0 \quad a \quad b \quad 1$，又 $c \quad a^{b} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2\log_{\frac{1}{2}}0.2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}0.2^{0.2}} \quad 0.2^{0.2} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} \quad a$，

所以，$c \quad a \quad b$.

故选：B.

【题目点拨】

本题主要考查对数、指数的大小比较，属于基础题.

11、D

【解题分析】

$f \ x \quad 2\cos^{2} x \quad \sqrt{3}\sin 2x \quad \cos 2x \quad \sqrt{3}\sin 2x \quad 1 \quad 2\sin(2x \quad \frac{}{6}) \quad 1$，当 $x \quad \frac{}{12}$ 时，$\sin(2x \quad \frac{}{6}) \quad \sin\frac{}{3} \quad 1$，∴$f(x)$ 不关于直线 $x \quad \frac{}{12}$ 对称；

当 $x \quad \frac{5}{12}$ 时，$2\sin(2x \quad \frac{}{6}) \quad 1 \quad 1$，∴$f(x)$ 关于点 $(\frac{5}{12}, 1)$ 对称；

$f(x)$ 得周期 $T \quad \frac{2}{2}$ ，