

微专题 24 利用函数单调性与奇偶性解不等式的 7 种常考题型总结

高频考点

题型 1 根据简单抽象函数的单调性解不等式

题型 2 根据简单抽象函数的单调性与奇偶性解不等式

题型 3 根据复杂抽象函数的单调性解不等式

题型 4 根据单调性定义构造函数解不等式

题型 5 根据简单具体函数的单调性解不等式

题型 6 根据复杂具体函数的单调性解不等式

题型 7 利用函数的单调性解不等式与恒成立问题的综合



解题策略

1、单调性定义的等价形式

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是增函数:

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} > 0$.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是减函数:

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$;

$\Leftrightarrow$ 任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} < 0$.

2、定义法判断函数奇偶性

判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系时, 也可以使用如下结论:

如果 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x) \neq 0)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数;

如果 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x) \neq 0)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数.

3、利用单调性、奇偶性解不等式原理

(1) 解 $f(m)<f(n)$ 型不等式

①利用函数的单调性, 去掉函数符号“ f ”, 将“抽象”的不等式问题转化为“具体”的不等式问题求解;

②若不等式一边没有函数符号“ f ”, 而是常数(如 $f(m)<a$), 那么我们应该将常数转化带有函数符号“ f ”的函数值再解.

(2) $f(x)$ 为奇函数, 形如 $f(m)+f(n)<0$ 的不等式的解法

第一步: 将 $f(n)$ 移到不等式的右边, 得到 $f(m)>-f(n)$;

第二步: 根据 $f(x)$ 为奇函数, 得到 $f(m)>f(-n)$;

第三步: 利用函数的单调性, 去掉函数符号“ f ”, 列出不等式求解.

4、利用函数单调性与奇偶性解不等式示例

函数的奇偶性和单调性是函数的重要性质, 同时它也能应用到解决实际问题中去, 今天我们就来看用这两种性质解不等式. 要注意, 当我们遇到的不等式中, 没有给出函数解析式, 或者解析式很复杂时, 就可以考虑借助函数的性质来辅助解题.

示例 1: 已知定义在 R 上的偶函数, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 且 $f(1)=0$, 则不等式 $f(x-2) \geq 0$ 的解集是_____.

解: 我们发现函数解析式并未给出, 可以看作抽象函数

则根据函数的奇偶性和单调性共同来解不等式

因为 $f(1)=0$, 所以有 $f(x-2) \geq f(1)$

又因为函数为偶函数,

所以 $f(|x-2|) \geq f(1)$

再利用函数在 $[0, +\infty)$ 上的单调性,

有 $|x-2| \geq 1$

脱绝对值: $x-2 \geq 1$ 或 $x-2 \leq -1$

所以不等式的解集为: $\{x|x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 1\}$

整理:

奇函数在两个对称的区间上单调性相同

偶函数在两个对称的区间上单调性相反

注意: 对称区间的含义. 我们知道奇函数、偶函数的定义域都关于原点对称. 但其在原点处是否有定义, 并不确定; 同理定义域在 $[0, +\infty)$ 上是否连续, 也不确定.

如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x) = f(-x) = f(|x|)$

单调递增, $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$;

单调递减, $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

利用单调性比较大小的常见思路:

$f(x)$ 在区间 I 上单调递增, $f(x) > a, a = f(x_0), x > x_0$

利用函数的奇偶性把不等式两边的函数值转化到同一个单调区间上, 然后利用函数的单调性脱掉符号“ f ”

示例 2: 已知函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 若 $f(x) > f(2x-1)$, 则实数 x 的取值范围是()

解: 如果我们按照正常思路, 把 $x, 2x-1$ 代入函数,

会发现构成的不等式相当复杂, 难以求解. 所以我们考虑换一种思路.

首先通过观察函数含有绝对值和平方, 应该是一个偶函数,

即有 $f(-x) = f(x)$

再考虑函数的单调性:

当 $x > 0, f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$

整理为: $= \ln(1+x) + [-\frac{1}{1+x^2}]$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增;

由偶函数的性质将原不等式转化为:

$f(|x|) > f(|2x-1|)$

等价于解不等式 $|x| > |2x-1|$

两边平方得: $x^2 > 4x^2 - 4x + 1$

整理得: $3x^2 - 4x + 1 < 0$

$(3x-1)(x-1) < 0$

所以 x 的取值范围是 $(\frac{1}{3}, 1)$

示例 3: 已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $f(-3)=0$, 则 $xf(x) < 0$ 的解集是()

解: 同上面的题目, 函数是抽象函数, 且为奇函数

由已知 $f(-3)=0$, 则原不等式等价于

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) > 0 = f(-3) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 = f(-3) \end{cases}$$

再根据函数的单调性,

$$-3 < x < 0 \qquad 0 < x < 3$$

所以解集为 $(-3, 0) \cup (0, 3)$

总结:

1. 当我们遇到没有给出解析式的函数, 或很难求解的函数要想到用函数的性质.
2. 综合使用奇偶性和单调性, 往往能判断出函数在定义域内各个区间的单调性.
3. 通过利用偶函数的性质 $f(x) = f(-x) = f(|x|)$, 往往可以将研究对象转化到 $x > 0$ 的区间上求解.



考点精析

题型 1 根据简单抽象函数的单调性解不等式

【例 1】 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则满足 $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【答案】C

【分析】根据函数的单调性得到 $\frac{1}{x} > 1$ ，从而得到 $x(1-x) > 0$ ，即可求解.

【详解】因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

所以由 $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$ ，得： $\frac{1}{x} > 1$ ，

即 $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} > 0$ ，即 $x(1-x) > 0$ ，解得： $0 < x < 1$ ，

所以实数 x 的取值范围为 $(0,1)$ ，

故选：C.

【变式1】设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，若 $f(m^2+2) > f(2m+5)$ ，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $(-1,3)$

【解析】因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

则 $f(m^2+2) > f(2m+5)$ 等价于 $m^2+2 < 2m+5$ ，

即 $m^2-2m-3 < 0$ ，即 $(m+1)(m-3) < 0$ ，解得 $-1 < m < 3$ ，即 $m \in (-1,3)$ ；

【变式2】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2,4]$ 上的增函数，且 $f(1-m) < f(m)$ ，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$

【分析】根据题意列出不等式组，解出即可.

【详解】由题意得
$$\begin{cases} -2 \leq 1-m \leq 4 \\ -2 \leq m \leq 4 \\ 1-m < m \end{cases}$$
，解得 $\frac{1}{2} < m \leq 3$ ，则实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$.

故答案为： $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$.

【变式3】已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0]$ 上的单调递增函数，且 $f(-2)=3$ ，则满足 $f(2x-3) < 3$ 的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < \frac{1}{2}$

【解析】因为 $f(-2)=3$ ，所以 $f(2x-3) < 3$ 和化为 $f(2x-3) < f(-2)$ ，

又因为 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0]$ 上的单调递增函数，

所以 $2x-3 < -2$ ，解得 $x < \frac{1}{2}$ 。

【变式 4】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 4]$ ，且在定义域内是增函数，若 $f(2m-1) - f(1-m) > 0$ ，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $\frac{2}{3} < m \leq \frac{5}{2}$

【分析】 根据函数的单调性逆用解抽象不等式。

【详解】 由 $f(2m-1) - f(1-m) > 0$ 得 $f(2m-1) > f(1-m)$ ，

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 4]$ ，且在定义域内是增函数，

$$\text{所以 } \begin{cases} 2m-1 > 1-m \\ -3 \leq 2m-1 \leq 4 \\ -3 \leq 1-m \leq 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{2}{3} < m \leq \frac{5}{2},$$

所以 m 的取值范围是 $\frac{2}{3} < m \leq \frac{5}{2}$ 。

故答案为: $\frac{2}{3} < m \leq \frac{5}{2}$ 。

【变式 5】 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = (-1, 2)$ ， $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$ ， $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 。若 $f(2a-1) > f(1-3a)$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{2}{5}\right)$

【答案】 A

【解析】 由题意得 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 2)$ 上的增函数，

$$\text{由 } f(2a-1) > f(1-3a), \text{ 得 } \begin{cases} -1 < 2a-1 < 2 \\ -1 < 1-3a < 2 \\ 2a-1 > 1-3a \end{cases} \text{ 解得 } \frac{2}{5} < a < \frac{2}{3}.$$

所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ ，选项 A 正确，故选: A.

【变式 6】 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，对 $\forall x_1, x_2 \in R$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，总有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，且函数 $f(x)$ 的图像经过点 $A(5, -2)$ ，若 $f(2m-1) < -2$ ，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, 3)$

【解析】 因为对 $\forall x_1, x_2 \in R$ ，且 $x_1 \neq x_2$ 总有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 R 上是增函数.

又 $f(x)$ 的图像经过点 $A(5, -2)$, 即 $f(5) = -2$,

所以 $f(2m-1) < -2$ 等价于 $f(2m-1) < f(5)$,

所以 $2m-1 < 5$ 即 $m < 3$, 即 m 的取值范围 $(-\infty, 3)$

题型 2 根据简单抽象函数的单调性与奇偶性解不等式

【例 2】 定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 为减函数, 且 $f(1+a) + f(1-a^2) > 0$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $(-\sqrt{2}, -1)$

【解析】 由题 $f(1+a) + f(1-a^2) > 0$ 即 $f(1+a) > -f(1-a^2)$

根据奇函数定义 $f(-x) = -f(x)$ 可知原不等式为 $f(1+a) > f(-1+a^2)$

又因为单调递减函数, 故 $1+a < -1+a^2$, 解得 $a < -1$ 或 $a > 2$

又因为函数定义域为 $(-1, 1)$ 故 $\begin{cases} -1 < 1+a < 1 \\ -1 < 1-a^2 < 1 \end{cases}$, 解得 $-\sqrt{2} < a < 0$,

所以 $-\sqrt{2} < a < -1$

综上得 a 的范围为 $(-\sqrt{2}, -1)$.

【变式 1】 已知奇函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 若 $f(3) = 1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 0$ 的 x 取值范围是 ()

A. $[-1, 0]$

B. $[-1, 2]$

C. $[1, 2]$

D. $[1, 3]$

【答案】 B

【分析】 利用 $f(x)$ 的奇偶性可得 $f(-3) = -1$, $f(0) = 0$, 再结合 $f(x)$ 的单调性得到 $-3 \leq x-2 \leq 0$, 从而得解.

【详解】 因为函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数, $f(3) = 1$, 则 $f(-3) = -f(3) = -1$, $f(0) = 0$,

所以 $-1 \leq f(x-2) \leq 0$ 可化 $f(-3) \leq f(x-2) \leq f(0)$,

又函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 所以 $-3 \leq x-2 \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 2$.

故选: B.

【变式 2】 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则不等式 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的解集为_____

【答案】 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】 因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(|2x-1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$, 即 $|2x-1| < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

故该不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则不等式 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的解集为_____

【答案】 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】 因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(|2x-1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$, 即 $|2x-1| < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

故该不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

【变式 3】 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则不等式 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的解集为_____

【答案】 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】 因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(|2x-1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$, 即 $|2x-1| < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < 2x-1 < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

故该不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

【变式 4】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $f(-2) = 0$, 则不等式 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

B. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【答案】 A

【分析】 先根据函数的单调性和奇偶性的综合运用求出 $f(x) > 0$ 和 $f(x) < 0$ 的解, 再 $x \cdot f(x) < 0$ 分解为

$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$, 两种情况分别求解即可.

【详解】 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增,

又 $f(-2)=0$,

所以 $f(x)>0$ 可化为 $f(|x|)>f(|-2|)$,

可得 $|x|>2$, 解得: $x<-2$ 或 $x>2$,

同理可得 $f(x)>0$ 的解: $-2<x<2$,

由 $x \cdot f(x)<0$ 可得 $\begin{cases} x>0 \\ f(x)<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ f(x)>0 \end{cases}$,

解得: $0<x<2$ 或 $x<-2$,

则不等式 $x \cdot f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$,

故选: A.

【变式 5】 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1)=0$, 则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}>0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【答案】 A

【分析】 利用函数的单调性和奇偶性解不等式.

【详解】 因为奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1)=0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)<0$, 当 $x=1$ 时, $f(x)=0$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)>0$,

又因为 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(0)=0$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x)>0$, 当 $x=-1$ 时, $f(x)=0$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f(x)<0$,

由 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}>0$ 得 $\frac{2f(x)}{x}>0$,

即 $\begin{cases} x>0 \\ f(x)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ f(x)<0 \end{cases}$, 解得 $x>1$ 或 $x<-1$,

所以不等式的解集为 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

故选：A.

【变式 6】 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，且 $f(3) = 0$ ，则不等式

$(2x-5)f(x-1) < 0$ 的解集为 ()

A. $\left(-2, \frac{5}{2}\right) \cup (4, +\infty)$

B. $(4, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$

D. $\left(-2, \frac{5}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

【答案】 A

【分析】 根据偶函数的性质及区间单调性可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增且 $f(-3) = f(3) = 0$ ，进而确定 $f(x)$ 的区间符号，讨论 $\begin{cases} 2x-5 > 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} 2x-5 < 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases}$ 求解集即可.

【详解】 由题设， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增且 $f(-3) = f(3) = 0$ ，
所以在 $(-\infty, -3)$ 、 $(3, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ ， $(-3, 3)$ 上 $f(x) > 0$ ，
对于 $(2x-5)f(x-1) < 0$ ，

当 $\begin{cases} 2x-5 > 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x-1 < -3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x-1 > 3 \end{cases}$ ，可得 $x > 4$ ；

当 $\begin{cases} 2x-5 < 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ -3 < x-1 < 3 \end{cases}$ ，可得 $-2 < x < \frac{5}{2}$ ；

综上，解集为 $\left(-2, \frac{5}{2}\right) \cup (4, +\infty)$.

故选：A

【变式 7】 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(1) = -2$ ，则不等式 $2^x f(x) + 1 < 2^{x+2}$ 的解集是_____.

【答案】 $(-1, +\infty)$

【解析】 因为 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(1) = -2$ ，所以 $f(-1) = 2$ 。

因为 $2^x f(x) + 1 < 2^{x+2}$ ，所以 $f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ 。

因为函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以函数 $g(x) = f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。

因为 $g(-1) = f(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4$,

所以 $g(x) < g(-1)$, 则 $x > -1$.

【变式 8】 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 若实数 a 满足 $f(\log_4 a) + f\left(\log_{\frac{1}{4}} a\right) \leq 2f(1)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup [4, +\infty)$

【解析】 $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增;

$$\because f\left(\log_{\frac{1}{4}} a\right) = f(-\log_4 a) = f(\log_4 a), \therefore f(\log_4 a) + f\left(\log_{\frac{1}{4}} a\right) = 2f(\log_4 a) \leq 2f(1),$$

即 $f(\log_4 a) \leq f(1)$, $\therefore |\log_4 a| \geq 1$, 即 $\log_4 a \leq -1$ 或 $\log_4 a \geq 1$,

解得: $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 或 $a \geq 4$, 即实数 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup [4, +\infty)$.

【变式 9】 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[1-2m, m+1]$ 上的偶函数, $\forall x_1, x_2 \in [0, m+1]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时,

$[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$, 则不等式 $f(1-x) \leq f(x)$ 的解集是 ()

A. $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

B. $[-2, 3]$

C. $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

【答案】 C

【分析】 根据偶函数的定义域关于原点对称求出 m 的值, 依题意可得 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减, 则在 $[-3, 0]$

上单调递增, 根据函数的奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式, 需注意函数的定义域.

【详解】 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[1-2m, m+1]$ 上的偶函数, 所以 $1-2m+m+1=0$, 解得 $m=2$,

又 $\forall x_1, x_2 \in [0, m+1]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $[-3, 0]$ 上单调递增,

不等式 $f(1-x) \leq f(x)$ 即 $f(|1-x|) \leq f(|x|)$, 等价于
$$\begin{cases} |x| \leq |1-x| \\ -3 \leq 1-x \leq 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}, \text{ 解得 } -2 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

所以不等式 $f(1-x) \leq f(x)$ 的解集是 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

故选：C

【变式 10】【多选】已知偶函数 $y=f(x)(x \in \mathbf{R})$ ，有 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 时， $(x_1 - x_2) \cdot (f(x_1) - f(x_2)) < 0$ 成立，则 $f(2ax) < f(2x^2 + 1)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立的一个必要不充分条件是 ()

- A. $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ B. $-1 < a < 1$ C. $0 < a < \sqrt{2}$ D. $-2 < a < 2$

【答案】 AD

【解析】 当 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 时， $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ 成立，
则函数在 $(-\infty, 0]$ 为单调递减函数，又函数 $y=f(x), x \in \mathbf{R}$ 为偶函数，

则函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数，

$f(2ax) < f(2x^2 + 1)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $|2ax| < 2x^2 + 1$ ，

当 $x=0$ 时，不等式恒成立，

当 $x \neq 0$ 时， $2|a| < \frac{2x^2 + 1}{|x|} = 2|x| + \frac{1}{|x|}$ ，

又 $2|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2\sqrt{2|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $2|x| = \frac{1}{|x|}$ 时取等号，

则 $2|a| < 2\sqrt{2}$ ，即 $|a| < \sqrt{2}$ ，解得 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ ，

由必要不充分条件的概念可知选项 A、D 正确，选项 B、C 错误。

故选：AD

【变式 11】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $\forall x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ， $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，且 $f(x+2)$

是奇函数，则满足 $f(x^2) < f(x+2)$ 的 x 的取值范围为_____。

【答案】 $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$

【分析】 利用函数的单调性及奇函数的性质计算即可。

【详解】 不妨设 $x_1 < x_2$ ，则由 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ，

即 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是单调递减函数，

又 $f(x+2)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 关于 $(2, 0)$ 中心对称，

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减函数，

$f(x^2) \langle f(x+2) \Rightarrow x^2 \rangle x+2$, 解之得 $x > 2$ 或 $x < -1$.

故答案为: $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$

题型 3 根据复杂抽象函数的单调性解不等式

【例 3】已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 且对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, 则不等式 $f(x-2) > \left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2$ 的解集为 ()

- A. $(-3, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -3)$ D. $(-\infty, 2)$

【答案】B

【解析】根据题意, $f(x)$ 满足 $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$,

$$\text{则 } [f(x+\frac{1}{2})]^2 = f(x+\frac{1}{2}) \times f(x+\frac{1}{2}) = f(2x+1),$$

$$\text{则 } f(x-2) > [f(x+\frac{1}{2})]^2 \Leftrightarrow f(x-2) > f(2x+1),$$

又由 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

$$\text{则有 } \begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ x-2 < 2x+1 \end{cases}, \text{ 解可得 } x > 2,$$

即不等式的解集为 $(2, +\infty)$. 故选: B.

【变式 1】已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 总有 $f(x) + f(y) = f(x+y)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 且 $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$, 则不等式 $f(x^2 - 8) < 4$ 的解集为_____.

【答案】 $(-3, 3)$

【分析】利用赋值法判定函数的奇偶性与单调性, 再根据条件求出 $f(1) = 4$, 根据单调性解不等式即可.

【详解】令 $x = y = 0 \Rightarrow 2f(0) = f(0)$ 得 $f(0) = 0$,

令 $y = -x$, 得 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数,

设 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$,

因为当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x_1 - x_2) > 0$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

由 $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$ ，得 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$ ，

所以 $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=4f\left(\frac{1}{4}\right)=4$ 。

$f(x^2-8)<4$ 可化为 $f(x^2-8)<f(1)$ ，所以 $x^2-8<1$ ，

解得 $-3<x<3$ 。

故答案为： $(-3,3)$

【变式 2】 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为增函数，且满足 $f(2)=1$ ， $f(xy)=f(x)+f(y)$ 。

(1) 求 $f(1)$ 和 $f(4)$ 的值；

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x)<2+f(x-3)$ 。

【答案】 (1) $f(1)=0$ ， $f(4)=2$ ； (2) $(4,+\infty)$ 。

【解析】 (1) $f(2)=f(1\times 2)=f(1)+f(2)$ ， $\therefore f(1)=0$

又 $\because f(2)=1$ ， $\therefore f(4)=f(2\times 2)=f(2)+f(2)=2$ ；

(2) $f(x)<2+f(x-3)=f(4)+f(x-3)=f(4x-12)$ ，

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$$\text{所以 } \begin{cases} x < 4x-12 \\ x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4,$$

不等式的解集为 $\{x|x>4\}$ 。

【变式 3】 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数， $f(0)=\sqrt{2}$ ，任意 $x,y\in\mathbf{R}$ ，都有

$f(x)f(y)=f(x+y+1)$ ，则不等式 $f(2x^2+x)f(-3x^2+4x-2)>4$ 的解集为 ()

A. $\{x|x<1 \text{ 或 } x>4\}$

B. $\{x|1<x<4\}$

C. $\{x|x<-1 \text{ 或 } x>4\}$

D. $\{x|-1<x<4\}$

【答案】 B

【分析】 根据题意利用赋值法可得 $f(3)=4$ ，将不等式化为 $f(-x^2+5x-1)>f(3)$ ，结合函数单调性运算求解。

【详解】 因为 $f(x)f(y)=f(x+y+1)$ ，则有：

令 $x=y=0$ ，可得 $f(1)=f(0)f(0)=2$ ；

令 $x = y = 1$ ，可得 $f(3) = f(1)f(1) = 4$ ；

且不等式 $f(2x^2 + x)f(-3x^2 + 4x - 2) > 4$ 可化为： $f(-x^2 + 5x - 1) > f(3)$ ，

又因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则 $-x^2 + 5x - 1 > 3$ ，

即 $x^2 - 5x + 4 < 0$ ，解得 $1 < x < 4$ ，

所以不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 4\}$ 。

故选：B.

【变式 4】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(xy) - f(x) = f(y) + 1$ ，当 $x > 1$ 时， $f(x) < -1$ 。

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 证明：函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调减函数；

(3) 解不等式 $f(x-2) + f(x) > -2$ 。

【答案】 (1)-1

(2) 证明见解析

(3) $(2, 1 + \sqrt{2})$

【分析】 (1) 令 $x = y = 1$ ，代入题意中的等式即可求解；

(2) 由题意可得 $f(xy) = f(x) + f(y) + 1$ ，令 $x = x_1, y = \frac{x_2}{x_1}$ ，利用定义法即可证明函数的单调性；

(3) 将原不等式转化为 $f(x-2) + f(x) = f[x(x-2)] - 1 > -2$ ，由 (1) 得 $f[x(x-2)] > f(1)$ ，结合 (2) 建立不等式组，解之即可求解。

【详解】 (1) 由题意知，令 $x = y = 1$ ，

则 $f(1) - f(1) = f(1) + 1$ ，得 $f(1) = -1$ ；

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时，有 $f(xy) - f(x) = f(y) + 1$ ，且当 $x > 1$ 时 $f(x) < -1$ ，

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$ ， $f(\frac{x_2}{x_1}) < -1$ 。

由 $f(xy) - f(x) = f(y) + 1$ ，得 $f(xy) = f(x) + f(y) + 1$ ，

有 $f(x_2) = f(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}) = f(x_1) + f(\frac{x_2}{x_1}) + 1 < f(x_1) + (-1) + 1 = f(x_1)$ ，

即 $f(x_2) < f(x_1)$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调减函数；

(3) 由 $f(xy) - f(x) = f(y) + 1$ ，得 $f(x) + f(y) = f(xy) - 1$ ，

由 $f(x-2) + f(x) > -2$ ，得 $f(x-2) + f(x) = f[x(x-2)] - 1 > -2$ ，

即 $f[x(x-2)] > -1$ ，由 (1) 知 $f(1) = -1$ ，

所以 $f[x(x-2)] > f(1)$ ，

由 (2) 知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调减函数，

所以 $\begin{cases} x(x-2) < 1 \\ x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ ，解得 $2 < x < 1 + \sqrt{2}$ ，

即原不等式的解集为 $(2, 1 + \sqrt{2})$ 。

【变式 5】 已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$ 。当 $x < 0$ 时， $f(x) > 2$ ，且 $f(-2) = 3$ 。

(1) 求 $f(2)$ 的值；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明；

(3) 若对 $\forall x \in [-3, 3], \forall m \in [5, 7]$ ，都有 $2f(x) - f[t^2 + t^{-2} - m(t + t^{-1})] \leq 1$ 恒成立，求实数 t 的取值范围。

【答案】 (1) $f(2) = 1$

(2) $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数，证明见解析

(3) $t \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$

【分析】 (1) 利用赋值法取 $x = y = 0$ 可得 $f(0) = 2$ ，再令 $x = 2, y = -2$ 可得 $f(2) = 1$ ；

(2) 结合函数满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$ ，且当 $x < 0$ 时， $f(x) > 2$ ，按照单调性定义证明步骤证明即可；

(3) 利用 $f(2) = 1$ 可将不等式化为 $2f(x) - 2 \leq f[t^2 + t^{-2} - m(t + t^{-1})] + f(2) - 2$ ，即可得

$f(2x) \leq f[t^2 + t^{-2} - m(t + t^{-1}) + 2]$ ，在利用换元法令 $a = t + t^{-1}$ ，结合单调性可得对于

$$\forall x \in [-3, 3], \forall m \in [5, 7], 2x \geq a^2 - ma \text{ 恒成立, 即可解得 } t \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right].$$

【详解】(1) 取 $x = y = 0$,

$$\text{则 } f(0+0) = f(0) + f(0) - 2, \text{ 于是 } f(0) = 2,$$

$$\text{令 } x = 2, y = -2,$$

$$\text{则 } f(0) = f(2-2) = f(2) + f(-2) - 2,$$

$$\text{又 } f(-2) = 3, \text{ 则 } f(2) = 1;$$

(2) $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数.

证明:

任取 $m, n \in \mathbb{R}, m < n$,

$$\text{则 } f(m) - f(n) = f((m-n)+n) - f(n) = f(m-n) + f(n) - 2 - f(n) = f(m-n) - 2,$$

由于当 $x < 0$ 时, $f(x) > 2$, 易知 $m-n < 0$, 则 $f(m-n) > 2$,

$$\text{故 } f(m) > f(n),$$

可得 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数.

$$(3) \text{ 不等式可化为 } 2f(x) - 2 \leq f[t^2 + t^{-2} - m(t + t^{-1})] + f(2) - 2,$$

$$\text{也即 } f(2x) \leq f[t^2 + t^{-2} - m(t + t^{-1}) + 2],$$

$$\text{令 } a = t + t^{-1}$$

于是 $\forall x \in [-3, 3], \forall m \in [5, 7]$, 都有 $f(2x) \leq f(a^2 - ma)$ 恒成立,

由于 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的单减函数, 则 $\forall x \in [-3, 3], \forall m \in [5, 7]$,

都有 $2x \geq a^2 - ma$ 恒成立,

即 $\forall m \in [5, 7], a^2 - ma \leq -6$ 成立, 即 $a^2 - ma + 6 \leq 0$ 恒成立;

令 $h(m) = (-a)m + a^2 + 6$, 它是关于 m 的一次函数,

$$\text{故只需 } \begin{cases} h(5) = -5a + a^2 + 6 = (a-2)(a-3) \leq 0 \\ h(7) = -7a + a^2 + 6 = (a-1)(a-6) \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a \in [2, 3].$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/985224043212011343>