

2024 年东北三省四城市联考暨沈阳市高三质量检测（二）

数学

沈阳命题：沈阳市第一二〇中学 高越

东北育才学校 王海涛

沈阳铁路实验中学 徐嘉龙

沈阳主审：沈阳市教育研究院 王孝宇

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。考生作答时，将答案答在答题卡上，在本试卷上答题无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上，并将条码粘贴在答题卡指定区域。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡指定位置书写作答，在本试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生将答题卡交回。

第Ⅰ卷（选择题 共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^3 = x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

【答案】D

【解析】

【分析】化简集合 B ，由集合的交集定义计算即可。

【详解】因为 $B = \{x | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$,

所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

故选：D

2. 抛物线 $\Gamma: y = ax^2$ 过点 $(2, 1)$ ，则 Γ 的准线方程为 ()

A. $x=1$

B. $y=-1$

C. $x=-2$

D. $y=-2$

【答案】B

【解析】

【分析】把点 $(2,1)$ 代入抛物线方程，再求得准线方程.【详解】把点 $(2,1)$ 代入抛物线方程 $y=ax^2$ ，得 $1=4a$ ，

解得 $a=\frac{1}{4}$ ，

所以抛物线方程为 $x^2=4y$ ，准线方程为 $y=-1$.

故选：B.

3. 已知向量 $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(3,-1)$ ，则“ $k=\sqrt{2}$ ”是“ $(\vec{a}+k\vec{b})\perp(\vec{a}-k\vec{b})$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】计算 $(\vec{a}+k\vec{b})\perp(\vec{a}-k\vec{b})$ 时 k 的取值，再根据必要与充分条件的定义判断即可.【详解】当 $(\vec{a}+k\vec{b})\perp(\vec{a}-k\vec{b})$ 时， $(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-k\vec{b})=0$ ，即 $\vec{a}^2-k^2\vec{b}^2=0$ ，

故 $(2^2+4^2)-k^2[3^2+(-1)^2]=0$ ，解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

故“ $k=\sqrt{2}$ ”是“ $(\vec{a}+k\vec{b})\perp(\vec{a}-k\vec{b})$ ”的充分不必要条件.

故选：A

4. 已知 $a\in(0,\pi)$ ，且 $\sin a+\cos a=\frac{1}{5}$ ，则 $\tan 2a=(\quad)$

A. $\frac{12}{7}$

B. $-\frac{12}{7}$

C. $\frac{24}{7}$

D. $-\frac{24}{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据 $\sin a+\cos a=\frac{1}{5}$ 结合 $a\in(0,\pi)$ 可得 $\sin a, \cos a$ 与 $\tan a$ ，进而可得 $\tan 2a$.【详解】 $\sin a+\cos a=\frac{1}{5}$ 则 $(\sin a+\cos a)^2=1+2\sin a\cos a=\frac{1}{25}$ ，

即 $\sin a\cos a=-\frac{12}{25}$ ，

又因为 $a\in(0,\pi)$ ，故 $\sin a>0$ ， $\cos a<0$ ， $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ，

故 $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - 2 \sin a \cos a = \frac{49}{25}$, 因为 $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin a - \cos a = \frac{7}{5}$,

结合 $\sin a + \cos a = \frac{1}{5}$ 可得 $\sin a = \frac{4}{5}$, $\cos a = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan a = -\frac{4}{3}$.

$$\text{故 } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{-\frac{8}{3}}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}.$$

故选: C

5. 甲、乙、丙三人从事 a, b, c 三项工作, 乙的年龄比从事 c 工作人的年龄大, 丙的年龄与从事 b 工作人的年龄不同, 从事 b 工作人的年龄比甲的年龄小, 则甲、乙、丙的职业分别是 ()

- A. a, b, c B. c, a, b C. c, b, a D. b, c, a

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意合理进行推理, 求解答案即可.

【详解】由题意得丙的年龄与从事 b 工作人的年龄不同, 故从事 b 工作的人不是丙,

又从事 b 工作人的年龄比甲的年龄小, 故从事 b 工作的人不是甲,

则推出从事 b 工作的人一定是乙,

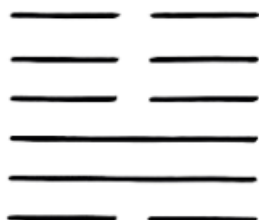
又从事 b 工作人的年龄比甲的年龄小, 故乙的年龄小于甲的年龄,

而乙的年龄比从事 c 工作人的年龄大, 故从事 c 工作的人是丙,

可反推出从事 a 工作的人是甲, 显然甲、乙、丙的职业分别是 a, b, c .

故选: A

6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化, 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“”和阴爻“”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 记事件 $A =$ “取出的重卦中至少有 1 个阴爻”, 事件 $B =$ “取出的重卦中至少有 3 个阳爻”. 则 $P(B|A) =$ ()



A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{11}{32}$

C. $\frac{41}{63}$

D. $\frac{15}{64}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据条件概率的公式，分析 $P(A), P(AB)$ 求解即可.【详解】 $P(A) = \frac{2^6 - 1}{2^6} = \frac{63}{64}$ ，事件 $AB =$ “取出的重卦中有 3 阳 3 阴或 4 阳 2 阴或 5 阳 1 阴”，

$$\text{则 } P(AB) = \frac{C_6^3 + C_6^4 + C_6^5}{2^6} = \frac{41}{64}, \text{ 则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{41}{63}$$

故选：C

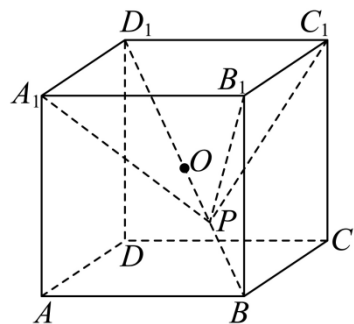
7. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为正方形 $ABCD$ 内一点（不含边界），记 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，直线 PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$. 若 $\theta_1 = \theta_3, \theta_2 > \theta_4$ ，则点 P 在

()

A. 线段 OA 上B. 线段 OB 上C. 线段 OC 上D. 线段 OD 上

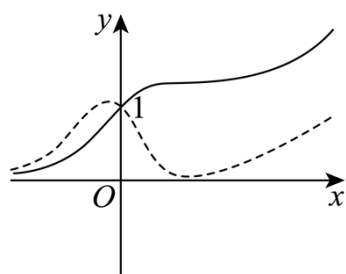
【答案】B

【解析】

【分析】根据线面角的定义可得直线 PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 与直线 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 所成角大小关系，再根据 $\theta_1 = \theta_3, \theta_2 > \theta_4$ 判断即可.【详解】直线 PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角大小分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ，等价于直线 PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 与直线 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 成角大小分别为 $\frac{\pi}{2} - \theta_1, \frac{\pi}{2} - \theta_2, \frac{\pi}{2} - \theta_3, \frac{\pi}{2} - \theta_4$ ，由 $\theta_1 = \theta_3$ ，可知 P 在线段 BD 上，又 $\theta_2 > \theta_4$ ，则 $\frac{\pi}{2} - \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \theta_4$ ， PB_1 与 BB_1 所成角更小，则点 P 在线段 OB 上.

故选：B.

8. 在同一平面直角坐标系内，函数 $y = f(x)$ 及其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，已知两图象有且仅有一个公共点，其坐标为 $(0,1)$ ，则 ()



- A. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最大值为 1
- B. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最小值为 1
- C. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最大值为 1
- D. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最小值为 1

【答案】C

【解析】

【分析】AB 选项，先判断出虚线部分为 $y = f'(x)$ ，实线部分为 $y = f(x)$ ，求导得到 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，AB 错误；再求导得到 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，故 C 正确，D 错误.

【详解】AB 选项，由题意可知，两个函数图像都在 x 轴上方，任何一个为导函数，则另外一个函数应该单调递增，判断可知，虚线部分为 $y = f'(x)$ ，

实线部分为 $y = f(x)$ ，

故 $y' = f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = (f'(x) + f(x)) \cdot e^x > 0$ 恒成立，

故 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，则 A，B 显然错误，

对于 C，D， $y' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

由图像可知 $x \in (-\infty, 0)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ 恒成立，故 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，

当 $x \in (0, +\infty)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，

所以函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $x=0$ 处取得极大值，也为最大值， $\frac{f(0)}{e^0} = 1$ ，C 正确，D 错误.

故选：C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 设方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 在复数范围内的两根分别为 z_1, z_2 ，则下列关于 z_1, z_2 的说法正确的有（ ）

- A. $z_1^2 = z_2$ B. $z_1^3 - z_2^3 = 0$ C. $z_1^2 - z_2^2 = 0$ D. $z_1 z_2 = 1$

【答案】ABD

【解析】

【分析】求解可得 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，再逐个选项判断即可.

【详解】对 A，由实系数一元二次方程求根公式知 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，

则 $z_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_2$ （与 z_1, z_2 顺序无关），故 A 正确；

对 B，因为 $z_1^3 = z_2^3 = 1$ ，所以 $z_1^3 - z_2^3 = 0$ ，故 B 正确；

对 C，由 A， $z_1^2 - z_2^2 = z_2 - z_1 \neq 0$ ，故 C 错误；

对 D，由韦达定理可得 $z_1 z_2 = 1$ ，故 D 正确.

故选：ABD

10. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的所有棱长均相等， O 为顶点 S 在底面内的射影，则下列说法正确的有（ ）

- A. 平面 $SAD \perp$ 平面 SBC
B. 侧面 SBC 内存在无穷多个点 P ，使得 $OP \parallel$ 平面 SAD
C. 在正方形 $ABCD$ 的边上存在点 Q ，使得直线 SQ 与底面所成角大小为 $\frac{\pi}{3}$
D. 动点 M, N 分别在棱 AB 和 BC 上（不含端点），则二面角 $S-MN-O$ 的范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

【答案】BD

【解析】

【分析】过 S 作直线 $l \parallel AD$ ，则 l 为平面 SAD 与平面 SBC 的交线，取 AD 中点 E , BC 中点 F ，连接 ES, FS ，求得 $\cos \angle ESF$ 可判断 A；取 SB 中点 G , SC 中点 H ，连接 OG, OH, GH ，可得， $P \in GH$ ，可判断 B；由已知可知当 Q 在正方形 $ABCD$ 各边中点时， SQ 与底面 $ABCD$ 所成的角最大，可得 $\cos \angle SEO > \frac{1}{2}$ ，判断 C；作 OI 垂直于 MN ，连接 SI ，则 $\angle SIO$ 为二面角 $S-MN-O$ 的平面角，求得二面角 $S-MN-O$ 范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，判断 D.

【详解】已知所有棱长都相等，不妨设为 1.

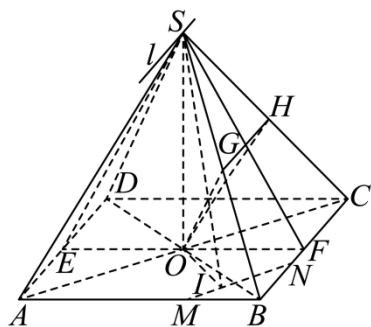
对于 A：过 S 作直线 $l \parallel AD$ ，因为 $BC \parallel AD$ ，所以 $l \parallel BC$ ，

所以 l 为平面 SAD 与平面 SBC 的交线，

取 AD 中点 E , BC 中点 F ，连接 ES, FS ，由正四棱锥 $S-ABCD$ ，

可得 $SE \perp AD, SF \perp BC$ ，所以 $l \perp AD, l \perp BC$ ，

所以 $\angle ESF$ 为二面角 $A-l-B$ 的平面角，连接 EF ，



$$\text{在 } \triangle EFS \text{ 中, } \cos \angle ESF = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

所以平面 SAD 与平面 SBC 不垂直，故 A 错误；

对于 B：取 SB 中点 G , SC 中点 H ，连接 OG, OH, GH ，

因为 $OG \parallel SD, OH \parallel SA$ ，又 $OG, OH \not\subset$ 平面 SAD ， $SD, SA \subset$ 平面 SAD ，

所以 $OG \parallel$ 平面 SAD ， $OH \parallel$ 平面 SAD ，又 $OG \cap OH = O$ ，

所以平面 $OGH \parallel$ 平面 SAD ，所以当 $P \in GH$ 时， $OP \parallel$ 平面 SAD ，这样的点 P 有无穷多，故 B 正确；

对于 C：由已知可知当 Q 在正方形 $ABCD$ 各边中点时， SQ 与底面 $ABCD$ 所成的角最大，

$$\cos \angle SEO = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \angle SEO < \frac{\pi}{3}, \text{ 所以不存在 } Q \text{ 使得 } SQ \text{ 与底面 } ABCD \text{ 成的角为 } \frac{\pi}{3}, \text{ 故 C}$$

错误;

对于 D: 作 OI 垂直于 MN , 连接 SI ,

因为 $SO \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $MN \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SO \perp MN$,

又 $SO \cap OI = O$, 所以 $MN \perp$ 平面 SIO , 因为 $SI \subset$ 平面 SIO , 所以 $MN \perp SI$,

因为则 $\angle SIO$ 为二面角 $S-MN-O$ 的平面角,

当 MN 都无限向点 B 靠拢时, $\angle SIO \rightarrow \frac{\pi}{4}$; 当 $M \rightarrow A, N \rightarrow C$ 时, $\angle SHO \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

所以二面角 $S-MN-O$ 范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 D 正确.

故选: BD.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(n-c)^2 + 1} (n=1, 2, 3, \dots)$, 则下列说法正确的有 ()

A. 若 $c \leq 1$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 单调递减

B. 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n \geq a_1$, 则 $c \leq 1$

C. 若 $c \in \mathbf{N}^*$, 则对任意 $i, j \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_i + a_j \neq 0$

D. 若 $\{a_n\}$ 的最大项与最小项之和为正数, 则 $2k - \frac{1}{2} < c < 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{N}^*$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于选项 A, 求出 $|a_n| = \frac{1}{(n-c)^2 + 1}, |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1-c)^2 + 1}$, 再作差判断两式分母的大小关系判断即可; 对于选项 B, 求解 a_1 , 再分 n 为奇数与偶数的情况讨论即可; 对于选项 C, 分 n 为奇数与偶数的情况讨论, 进而求和分析是否为 0 即可; 对于选项 D, 先将条件转化为: 到 c 距离最小的正奇数到 c 的距离大于到 c 距离最小的正偶数到 c 的距离, 再分情况讨论即可.

【详解】对于选项 A, 由条件知 $|a_n| = \frac{1}{(n-c)^2 + 1}, |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1-c)^2 + 1}$, 而

$$((n+1-c)^2 + 1) - ((n-c)^2 + 1) = 2n + 1 - 2c,$$

结合 $c \leq 1$, $n \in \mathbf{N}^*$ 知 $2n+1-2c \geq 2n-1 > 0$, 所以 $(n+1-c)^2 + 1 > (n-c)^2 + 1$,

所以 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 即数列 $\{|a_n|\}$ 单调递减, 故 A 正确;

对于选项 B, 首先有 $a_1 = -\frac{1}{(1-c)^2 + 1} < 0$.

若 $c \leq 2$, 则当 n 为偶数时, $a_n = \frac{1}{(n-c)^2 + 1} > 0 > -\frac{1}{(1-c)^2 + 1} = a_1$, 从而 $a_n \geq a_1$ 必成立;

而当 n 为奇数且 $n \geq 3$ 时, 由 $n-c \geq 3-c > 0$, 知 $|n-c| = n-c \geq 3-c = 3-2c+c \geq 3-4+c = c-1$,

$|n-c| = n-c \geq 3-c > 1-c$, 从而 $|c-1| \leq |n-c|$, 即 $(1-c)^2 \leq (n-c)^2$, 这意味着

$$a_n = -\frac{1}{(n-c)^2 + 1} \geq -\frac{1}{(1-c)^2 + 1} = a_1.$$

所以只要 $c \leq 2$, 就一定有 $a_n \geq a_1$ 恒成立, 所以由 $a_n \geq a_1$ 恒成立不可能得到 $c \leq 1$, 故 B 错误;

对于选项 C, 显然当 i, j 同为奇数或同为偶数时, 必有 a_i, a_j 同号, 故 $a_i + a_j \neq 0$;

而当 i, j 的奇偶性不同时, $i+j$ 为奇数, 此时不妨设 i, j 分别是奇数和偶数, 则

$$a_i + a_j = -\frac{1}{(i-c)^2 + 1} + \frac{1}{(j-c)^2 + 1} = \frac{((i-c)^2 + 1) - ((j-c)^2 + 1)}{((i-c)^2 + 1)((j-c)^2 + 1)} = \frac{(i-c)^2 - (j-c)^2}{((i-c)^2 + 1)((j-c)^2 + 1)} = \frac{(i-j)(i+j-2c)}{((i-c)^2 + 1)((j-c)^2 + 1)}$$

因为 $c \in \mathbf{N}^*$, 故 $2c$ 为偶数, 而 $i+j$ 为奇数, 所以 $i+j-2c \neq 0$,

所以 $a_i + a_j \neq 0$, 故 C 正确;

对于选项 D, 首先显然的是, 最大项必定是某个第偶数项, 最小项必定是某个第奇数项.

当 $n = n_1$ 为偶数时, 要让 $a_n = \frac{1}{(n-c)^2 + 1}$ 最大, 即要让 $|n-c|$ 最小;

而当 $n = n_2$ 为奇数时, 要让 $a_n = -\frac{1}{(n-c)^2 + 1}$ 最小, 即要让 $|n-c|$ 最小.

设 n_1 和 n_2 分别是到 c 距离最小的正偶数和正奇数, 则条件相当于 $a_{n_1} + a_{n_2} > 0$.

$$\text{而 } a_{n_1} + a_{n_2} = \frac{1}{(n_1-c)^2 + 1} - \frac{1}{(n_2-c)^2 + 1} = \frac{(n_2-c)^2 - (n_1-c)^2}{((n_1-c)^2 + 1)((n_2-c)^2 + 1)}, \text{ 故条件等价于}$$

$$(n_2-c)^2 > (n_1-c)^2, \text{ 即 } |n_2-c| > |n_1-c|.$$

这表明, 条件等价于, 到 c 距离最小的正奇数到 c 的距离, 大于到 c 距离最小的正偶数到 c 的距离.

若 $c \leq 1$ ，则到 c 距离最小的正奇数和正偶数分别是 1 和 2，而由 $1-c \geq 1-1=0$ 可知

$|2-c| \geq 2-c > 1-c = |1-c|$ ，不符合条件；

若 $c > 1$ ， c 是正奇数，则到 c 距离最小的正奇数到 c 的距离为 0，不可能大于到 c 距离最小的正偶数到 c 的距离，不符合条件；

若 $c > 1$ ，且 c 不是正奇数，设到 c 的距离最近的正偶数为 $2k (k \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $2k-1 < c < 2k+1$ 。

此时到 c 距离最小的正偶数到 c 的距离为 $|2k-c|$ ，从而到 c 距离最小的正奇数到 c 的距离大于 $|2k-c|$ ，进一步知任意正奇数到 c 的距离都大于 $|2k-c|$ 。

从而 $|2k+1-c| > |2k-c|$ ， $|2k-1-c| > |2k-c|$ ，这意味着

$$0 < (2k+1-c)^2 - (2k-c)^2 = 1 \cdot (4k+1-2c) = 4k+1-2c,$$

$$0 < (2k-1-c)^2 - (2k-c)^2 = -1 \cdot (4k-1-2c) = 2c-4k+1, \text{ 所以 } 2k-\frac{1}{2} < c < 2k+\frac{1}{2}.$$

综上， $2k-\frac{1}{2} < c < 2k+\frac{1}{2}$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ ，故 D 正确。

故选：ACD

【点睛】关键点点睛：本题的数列通项中含有 $(-1)^n$ ，这往往意味着我们需要对 n 的奇偶性作分类讨论，分两种情况对数列进行讨论才可全面地解决问题。

第 II 卷（非选择题共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，其中 14 小题第一空 2 分，第二空 3 分，共 15 分。

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x > 0 \\ f(x+2), & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f\left(\log_3 \frac{1}{16}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{81}{16}$

【解析】

【分析】根据分段函数解析式结合自变量范围求解即可。

【详解】 $\log_3 \frac{1}{16} = -\log_3 16$ ， $3^2 < 16 < 3^3$ ，

$$\therefore -3 < \log_3 \frac{1}{16} < -2,$$

$$\therefore f\left(\log_3 \frac{1}{16}\right) = f\left(\log_3 \frac{1}{16} + 2\right) = f\left(\log_3 \frac{1}{16} + 2 + 2\right) = f\left(\log_3 \frac{81}{16}\right) = 3^{\log_3 \frac{81}{16}} = \frac{81}{16}$$

故答案为: $\frac{81}{16}$

13. 已知 $A(-1,0), B(-4,0), |PB|=2|PA|$, 若平面内满足到直线 $l: 3x+4y+m=0$ 的距离为 1 的点 P 有且只有 3 个, 则实数 $m=$ _____.

【答案】 5 或 -5

【解析】

【分析】 设出动点 P 的坐标, 由 $|PB|=2|PA|$ 求得其轨迹方程, 由题意知, 只需使圆心到直线 $l: 3x+4y+m=0$ 的距离等于 1 即可.

【详解】 设点 $P(x,y)$, 由 $|PB|=2|PA|$ 可得: $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$,

两边平方整理得: $x^2+y^2=4$, 即点 P 的轨迹是圆, 圆心在原点, 半径为 2.

若该圆上有且只有 3 个点到直线 $l: 3x+4y+m=0$ 的距离为 1,

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|m|}{5}=1$, 解得 $m=\pm 5$.

故答案为: 5 或 -5.

14. 有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 称为 n 维向量, $|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$ 为该向量的范数, 范数在度量向量的长度和大小方面有着重要的作用. 已知 n 维向量 $\vec{a}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $x_i \in \{0, 1, 2\}, i=1, 2, \dots, n$. 记范数为奇数的 $\vec{a}$ 的个数为 A_n , 则 $A_4=$ _____; $A_{2n+1}=$ _____. (用含 n 的式子表示)

【答案】 ①. 40 ②. $\frac{3^{2n+1}-1}{2}$

【解析】

【分析】 根据乘法原理和加法原理即可求解 A_4 ; 根据 $(2+1)^{2n+1}$ 和 $(2-1)^{2n+1}$ 的展开式相减得到 A_{2n+1} 的通项公式.

【详解】 根据乘法原理和加法原理得到 $A_4 = C_4^1 \cdot 2^3 + C_4^3 \cdot 2 = 40$.

奇数维向量, 范数为奇数, 则 $x_i=1$ 的个数为奇数, 即 1 的个数为 1, 3, 5, ..., $2n+1$,

根据乘法原理和加法原理得到 $A_{2n+1} = C_{2n+1}^1 2^{2n} + C_{2n+1}^3 2^{2n-2} + C_{2n+1}^5 2^{2n-4} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} 2^0$,

$3^{2n+1} = (2+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 2^{2n+1} + C_{2n+1}^1 2^{2n} + C_{2n+1}^2 2^{2n-2} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} 2^0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/985241143042011201>