

2024 届湖南省凤凰县皇仓中学高考仿真卷数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线的离心率 e 的取值范围是 ()

- A. $[2, +\infty)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(1, 2]$

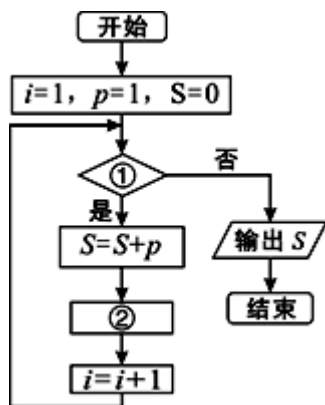
2. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_2(x+1) + ax^2 - a + 1$ (a 为常数), 则不等式 $f(3x+4) > -5$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-2, +\infty)$

3. 已知角 α 的终边经过点 $(3, -4)$, 则 $\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} =$

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{37}{15}$
C. $\frac{37}{20}$ D. $\frac{13}{15}$

4. 给出 50 个数 1, 2, 4, 7, 11, $\dots$, 其规律是: 第 1 个数是 1, 第 2 个数比第 1 个数大 1, 第 3 个数比第 2 个数大 2, 第 4 个数比第 3 个数大 3, 以此类推, 要计算这 50 个数的和. 现已给出了该问题算法的程序框图如图, 请在图中判断框中的①处和执行框中的②处填上合适的语句, 使之能完成该题算法功能()



- A. $i \leq 50; p = p + i$ B. $i < 50; p = p + i$
C. $i \leq 50; p = p + 1$ D. $i < 50; p = p + 1$

5. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{3} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = m$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上有两个根 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| \geq \pi$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ B. $[1, 2)$ C. $[0, 1)$ D. $[0, 1]$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距是虚轴长的 2 倍, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

7. 已知 $\vec{a} = (2 \sin \frac{\omega x}{2}, \cos \frac{\omega x}{2})$, $\vec{b} = (\sqrt{3} \cos \frac{\omega x}{2}, 2 \cos \frac{\omega x}{2})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ 在区间 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上恰有 3 个极值点, 则正实数 ω 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{8}{5}, \frac{5}{2})$ B. $[\frac{7}{4}, \frac{5}{2})$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2]$

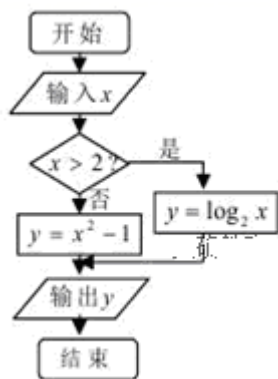
8. 过抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点且倾斜角为 α 的直线交抛物线于两点 A, B , $|AF| = 2|BF|$, 且 A 在第一象限, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

9. 下列与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 定义域和单调性都相同的函数是 ()

- A. $y = 2^{\log_2 x}$ B. $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$ D. $y = x^{\frac{1}{4}}$

10. 执行如图所示的程序框图, 若输出的结果为 3, 则可输入的实数 x 值的个数为 ()

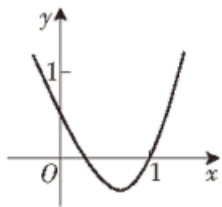


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 五名志愿者到三个不同的单位去进行帮扶, 每个单位至少一人, 则甲、乙两人不在同一个单位的概率为 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{13}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{19}{25}$

12. 如图是二次函数 $f(x) = x^2 - bx + a$ 的部分图象，则函数 $g(x) = a \ln x + f'(x)$ 的零点所在的区间是 ()



- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 直线 $x \sin \alpha + y + 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$ ，则 $\cos^2 A + \cos^2 B$ 的范围为_____.

15. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，过 F 作直线与 C 相交于 P, Q 两点，且 Q 在第一象限，若 $2\overline{PF} = \overline{FQ}$ ，则直线 PQ 的斜率是_____.

16. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1, F_2 是椭圆 Γ 的左、右焦点， A 为椭圆 Γ 的上顶点，延长 AF_2 交椭圆 Γ 于点 B ，若 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形，则椭圆 Γ 的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 选修 4-2：矩阵与变换 (本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($k \neq 0$) 的一个特征向量为 $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ -1 \end{bmatrix}$,

A 的逆矩阵 A^{-1} 对应的变换将点 $(3, 1)$ 变为点 $(1, 1)$. 求实数 a, k 的值.

18. (12 分) 语音交互是人工智能的方向之一，现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱. 主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱，它们可以通过语音交互满足人们的部分需求. 某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度，从某地区随机抽取了 100 名购买“小爱同学”和 100 名购买“天猫精灵”的人，具体数据如下：

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计
男	45	60	105
女	55	40	95

合计	100	100	200
----	-----	-----	-----

- (1) 若该地区共有 13000 人购买了“小爱同学”，有 12000 人购买了“天猫精灵”，试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人？
- (2) 根据列联表，能否有 95%的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关？

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分) 设函数 $f(x)=|x-1|+|x-a|(a \in R)$.

- (1) 当 $a=4$ 时，求不等式 $f(x)^3 \leq 5$ 的解集；
- (2) 若 $f(x) \geq 4$ 对 $x \in R$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$ ，集合 $B=\{x|2x^2+(2k+5)x+5k<0\}$ ， $k \in R$.

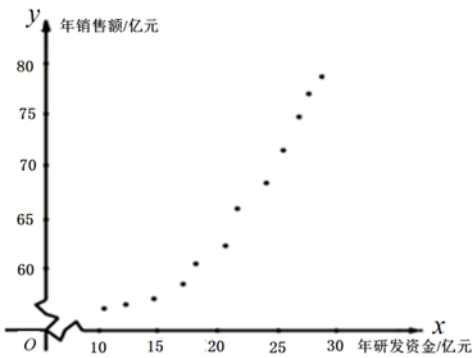
- (1) 求集合 B ；
- (2) 记 $M=A \cap B$ ，且集合 M 中有且仅有一个整数，求实数 k 的取值范围.

21. (12 分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏，每次由一个小孩与其一位家长参与，测试家长对小孩饮食习惯的了解程度. 在每一轮游戏中，主持人给出 A, B, C, D 四种食物，要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序，然后由家长猜测小孩的排序结果. 设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_Ax_Bx_Cx_D$ ，家长猜测的序号依次为 $y_Ay_By_Cy_D$ ，其中 $x_Ax_Bx_Cx_D$ 和 $y_Ay_By_Cy_D$ 都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列. 定义随机变量 $X=(x_A-y_A)^2+(x_B-y_B)^2+(x_C-y_C)^2+(x_D-y_D)^2$ ，用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度.

- (1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解.
- (i) 求他们在一轮游戏中，对四种食物排出的序号完全不同的概率；
- (ii) 求 X 的分布列（简要说明方法，不用写出详细计算过程）；
- (2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏，三轮的结果都满足 $X<4$ ，请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解，说明理由.

22. (10 分) 某芯片公司为制定下一年的研发投入计划，需了解年研发资金投入量 x （单位：亿元）对年销售额 y （单位：亿元）的影响.该公司对历史数据进行对比分析，建立了两个函数模型:① $y=a+bx^2$ ，② $y=e^{ax+b}$ ，其中

a, b, c, d 均为常数, e 为自然对数的底数.



现该公司收集了近 12 年的年研发资金投入量 x_i 和年销售额 y_i 的数据, $i = 1, 2, \dots, 12$, 并对这些数据作了初步处理, 得到了右侧的散点图及一些统计量的值. 令 $u_i = x_i^2, v_i = \ln x_i (i = 1, 2, \dots, 12)$, 经计算得如下数据:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2$	$\bar{u}$	$\bar{v}$
20	66	770	200	460	4.20
$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2$		$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$		$\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2$	
3125000		21500		0.308	

- (1) 设 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数为 r_1 , $\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 的相关系数为 r_2 , 请从相关系数的角度, 选择一个拟合程度更好的模型;
- (2) (i) 根据 (1) 的选择及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程 (系数精确到 0.01);
- (ii) 若下一年销售额 y 需达到 90 亿元, 预测下一年的研发资金投入量 x 是多少亿元?

附: ① 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, 回归直线 $\hat{y} = a + bx$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, a = \bar{y} - b\bar{x};$$

② 参考数据: $308 = 4 \times 77, \sqrt{90} \approx 9.4868, e^{4.4998} \approx 90.$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

若过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率。根据这个结论可以求出双曲线离心率的取值范围。

【详解】

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，

若过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，

则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率 $\frac{b}{a}$ ，

$$\therefore \frac{b}{a} \dots \sqrt{3}, \text{ 离心率 } e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \dots 4,$$

$$\therefore e \dots 2,$$

故选：A。

【点睛】

本题考查双曲线的性质及其应用，解题时要注意挖掘隐含条件。

2、D

【解析】

由 $f(0) = 0$ 可得 $a = 1$ ，所以 $f(x) = \log_2(x+1) + x^2 (x \geq 0)$ ，由 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数结合增函数+增函数=增函数，可知 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，注意到 $f(-2) = -f(2) = -5$ ，再利用函数单调性即可解决。

【详解】

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.所以 $f(0) = 0$ ，解得 $a = 1$ ，所以当 $x \geq 0$ 时，

$f(x) = \log_2(x+1) + x^2$ ，且 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单调递增，所以

$y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(2) = 5$ ， $f(-2) = -5$ ，

故有 $3x+4>-2$ ，解得 $x>-2$ ．

故选：D.

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性、单调性解不等式，考查学生对函数性质的灵活运用能力，是一道中档题.

3、D

【解析】

因为角 α 的终边经过点 $(3, -4)$, 所以 $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, 则 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

即 $\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{13}{15}$. 故选 D.

4、A

【解析】

要计算这 50 个数的和，这就需要循环 50 次，这样可以确定判断语句①，根据累加最的变化规律可以确定语句②.

【详解】

因为计算这 50 个数的和，循环变量 i 的初值为 1，所以步长应该为 1，故判断语句①应为 $i = i + 1$ ，第 1 个数是 1，第 2 个数比第 1 个数大 1，第 3 个数比第 2 个数大 2，第 4 个数比第 3 个数大 3，这样可以确定语句②为 $p = p + i$ ，故本题选 A.

【点睛】

本题考查了补充循环结构，正确读懂题意是解本题的关键.

5、C

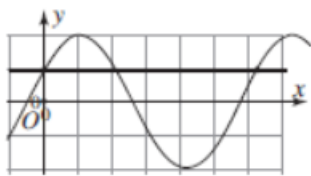
【解析】

先利用三角恒等变换将题中的方程化简，构造新的函数 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ，将方程的解的问题转化为函数图象的交点问题，画出函数图象，再结合 $|x_1 - x_2| \geq \pi$ ，解得 m 的取值范围.

【详解】

由题化简得 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = m$ ， $m = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ，

作出 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象，



又由 $|x_1 - x_2| \geq \pi$ 易知 $0 \leq m < 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换，方程的根的问题，利用数形结合法，求得范围.属于中档题.

6、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍，可得出 $c = 2b$ ，结合 $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ ，得出 $a^2 = 3b^2$ ，即可求出双曲线的渐近线方程.

【详解】

解：由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 可知，焦点在 x 轴上，

则双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

由于焦距是虚轴长的 2 倍，可得： $c = 2b$ ，

$$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{即： } a^2 = 3b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，以及双曲线的渐近线方程.

7、B

【解析】

先利用向量数量积和三角恒等变换求出 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1$ ，函数在区间 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上恰有 3 个极值点即为三个最值点， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 解出， $x = \frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$ ，再建立不等式求出 k 的范围，进而求得 ω 的范围.

【详解】

$$\begin{aligned} \text{解： } f(x) &= \sqrt{3}\sin\omega x + 2\cos\frac{2\omega x}{2} = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x + 1 \\ &= 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得对称轴 } x = \frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}, f(0) = 2,$$

$$\text{又函数 } f(x) \text{ 在区间 } [0, \frac{4\pi}{3}] \text{ 恰有 3 个极值点，只需 } \frac{\pi}{3\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \leq \frac{4\pi}{3} < \frac{\pi}{3\omega} + \frac{3\pi}{\omega}$$

解得 $\frac{7}{4} \leq \omega < \frac{5}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用向量的数量积运算和三角恒等变换与三角函数性质的综合问题.

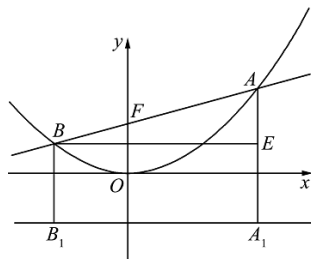
(1)利用三角恒等变换及辅助角公式把三角函数关系式化成 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + t$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi) + t$ 的形式; (2)根据自变量的范围确定 $\omega x + \varphi$ 的范围, 根据相应的正弦曲线或余弦曲线求值域或最值或参数范围.

8、C

【解析】

作 $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$; $BE \perp AA_1$, 由题意 $\sin \alpha = \frac{AE}{AB}$, 由二倍角公式即得解.

【详解】



由题意, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, 准线 $l: y = -\frac{p}{2}$,

作 $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$; $BE \perp AA_1$,

设 $|BF| = |BB_1| = t$,

故 $|AB| = |AA_1| = 2t$, $|AE| = t$,

$$\sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{9}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

9、C

【解析】

分析函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和单调性, 然后对选项逐一分析函数的定义域、单调性, 由此确定正确选项.

【详解】

函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

A 选项， $y = 2^{\log_2 x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，不符合.

B 选项， $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域为 R ，不符合.

C 选项， $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，符合.

D 选项， $y = x^{\frac{1}{4}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，不符合.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查函数的定义域和单调性，属于基础题.

10、C

【解析】

试题分析：根据题意，当 $x \leq 2$ 时，令 $x^2 - 1 = 3$ ，得 $x = \pm 2$ ；当 $x > 2$ 时，令 $\log_2 x = 3$ ，得

$x = 9$ ，故输入的实数 x 值的个数为 1.

考点：程序框图.

11、D

【解析】

三个单位的人数可能为 2, 2, 1 或 3, 1, 1，求出甲、乙两人在同一个单位的概率，利用互为对立事件的概率和为 1 即可解决.

【详解】

由题意，三个单位的人数可能为 2, 2, 1 或 3, 1, 1；基本事件总数有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} A_3^3 + \frac{C_3^3 C_2^1}{A_2^2} A_3^3$

$= 150$ 种，若为第一种情况，且甲、乙两人在同一个单位，共有 $C_3^1 C_3^2 A_2^2$ 种情况；若为第二

种情况，且甲、乙两人在同一个单位，共有 $C_3^1 C_3^1 A_2^2$ 种，故甲、乙两人在同一个单位的概率

为 $\frac{36}{150} = \frac{6}{25}$ ，故甲、乙两人不在同一个单位的概率为 $P = 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查古典概型的概率公式的计算，涉及到排列与组合的应用，在正面情况较多时，可以先求其对立事件，即甲、乙两人在同一个单位的概率，本题有一定难度.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/985334121320012101>