

# 2021 年高考全国乙卷数学（理）高考真题变式题

## 11-15 题

原题 11

1. 设  $B$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点, 若  $C$  上的任意一点  $P$  都满足

$|PB| \leq 2b$ , 则  $C$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$       B.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$       C.  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$       D.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

变式题 1 基础

2. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ , 点  $P$  在椭圆

上, 且  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ,  $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率  $e$  等于 ( )

- A.  $\sqrt{2} - 1$       B.  $\sqrt{3} - 1$       C.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$       D.  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

变式题 2 基础

3. 若椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  满足  $2b = a + c$ , 则该椭圆的离心率  $e =$  ( ).

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{3}{5}$   
C.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$       D.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

变式题 3 巩固

4. 焦点在  $x$  轴上的椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4a} + \frac{y^2}{a^2+1} = 1 (a > 0)$ , 则它的离心率  $e$  的取值范围为

( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$       B.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$   
C.  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$       D.  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

变式题 4 巩固

5. 已知  $F$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点, 椭圆  $E$  上一点  $P(2, 1)$  关于原点的对称点为  $Q$ , 若  $\triangle PQF$  的周长为  $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ . 则离心率  $e =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

变式题 5 巩固

6. 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 = b^2$ , 若在椭圆  $C_1$  上存在点  $P$

，使得过点  $P$  所作的圆  $C_2$  的两条切线互相垂直，则椭圆  $C_1$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$       B.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$       C.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$       D.  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

变式题 6 巩固

7. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上存在点  $P$ ，使得

$|PF_1| = 3|PF_2|$ ，其中  $F_1, F_2$  分别为椭圆的左、右焦点，则该椭圆的离心率取值范围是

( )

- A.  $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$       B.  $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$   
C.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$       D.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

变式题 7 提升

8. 已知  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点，若在椭圆上存在点

$P$  满足  $2|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| \leq |\overrightarrow{F_1F_2}|$ ，则椭圆  $C$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$       B.  $\left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$       C.  $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$       D.  $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

原题 12

9. 设  $a = 2\ln 1.01$ ， $b = \ln 1.02$ ， $c = \sqrt{1.04} - 1$ 。则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < a < b$

变式题 1 基础

10. 已知对数函数  $f(x)$  的图象经过点  $A\left(\frac{1}{9}, -2\right)$  与点  $B(81, t)$ ， $a = \log_{0.1} t$ ， $b = 0.2^t$ ，

$c = t^{0.1}$ ，则 ( )

- A.  $c < a < b$       B.  $c < b < a$       C.  $b < a < c$       D.  $a < b < c$

变式题 2 基础

11. 已知函数  $y = f(x)$  对任意的  $x \in (0, \pi)$  满足  $f'(x)\cos x > f(x)\sin x$  (其中  $f'(x)$  为函数

$f(x)$  的导函数)，则下列不等式成立的是 ( )

- A.  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$       B.  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$   
C.  $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\frac{\pi}{3}\right)$       D.  $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right) < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

变式题 3 巩固

12. 已知  $a < 5$  且  $ae^5 = 5e^a$ ， $b < 4$  且  $be^4 = 4e^b$ ， $c < 3$  且  $ce^3 = 3e^c$ ，则 ( )

- A.  $c < b < a$       B.  $b < c < a$       C.  $a < c < b$       D.  $a < b < c$

变式题 4 巩固

13.  $a = \frac{3(2-\ln 3)}{e^2}, b = \frac{1}{e}, c = \frac{\ln 3}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小顺序为 ( )

- A.  $a < c < b$       B.  $c < a < b$   
C.  $a < b < c$       D.  $b < a < c$

变式题 5 巩固

14. 已知  $a, b \in (0, e^2)$ , 且  $2a = e^2 \ln a, 3b = e^3 \ln b$ , 则 ( )

- A.  $1 < b < a < e$       B.  $1 < a < b < e$   
C.  $e < a < b < e^2$       D.  $1 < b < e < a < e^2$

变式题 6 提升

15. 已知  $a = \frac{5+2\sqrt{3}}{6} - \ln 3, b = \frac{2}{e^2}, c = 1 - \ln 2$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < b < a$

变式题 7 提升

16. 已知  $a = 2\ln 3 - 4, b = 2\ln \frac{7}{2} - \sqrt{11} - 1, c = 4\ln 2 - \sqrt{13} - 1$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$   
C.  $c < b < a$       D.  $b < c < a$

原题 13

17. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$  的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + my = 0$ , 则  $C$  的焦距为 \_\_\_\_\_.

变式题 1 基础

18. 双曲线  $2x^2 - y^2 = 6$  的焦距为 \_\_\_\_\_.

变式题 2 基础

19. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线的倾斜角为  $45^\circ$ , 且过点  $(3, 1)$ , 则双曲线的焦距等于 \_\_\_\_\_.

变式题 3 巩固

20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知双曲线  $C$  与双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  有公共的渐近线, 且经过点  $P(-2, \sqrt{3})$ , 则双曲线  $C$  的焦距为 \_\_\_\_\_.

变式题 4 巩固

21. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点分别为  $F_1, F_2$ , 若以坐标原点  $O$  为圆心,  $b$  为半径的圆与双曲线  $C$  交于点  $P$  (点  $P$  在第一象限), 且  $OP \perp PF_2$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

变式题 5 巩固

22. 已知焦点在  $y$  轴上的双曲线  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$  的一条渐近线方程为  $y = \frac{x}{2}$ , 点  $P(1, 0)$  关于双曲线的渐近线的对称点在双曲线上, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

变式题 6 提升

23. 已知点  $F$  为双曲线  $E: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的右焦点,  $M, N$  两点在双曲线上, 且  $M, N$  关于原点对称, 若  $MF \perp NF$ , 设  $\angle MNF = \theta$ , 且  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \right]$ , 则该双曲线  $E$  的焦距的取值范围是\_\_\_\_\_.

变式题 7 提升

24. 已知双曲线  $C: x^2 - y^2 = \lambda (\lambda > 0)$  的一个焦点为  $F$ ,  $O$  为坐标原点, 在双曲线  $C$  的渐近线上取一点  $P$ , 使得  $|PF| = |PO|$ , 且  $\triangle POF$  的面积为 1, 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

原题 14

25. 已知向量  $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (3, 4)$ , 若  $(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

变式题 1 基础

26. 已知向量  $\vec{a} = (-2, 5), \vec{b} = (2, m)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

变式题 2 巩固

27. 已知向量  $\vec{a} = \left( k, \frac{3}{2} \right)$  与  $\vec{b} = (2, -2)$ , 若  $\vec{b} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$ , 则实数  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

变式题 3 巩固

28. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $120^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ , 若  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \lambda \vec{b})$ , 则实数  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

变式题 4 巩固

29. 已知  $\vec{a} = (1, x), \vec{b} = (x, 4)$ , 若  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ , 则  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

变式题 5 巩固

30. 已知向量  $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (1, -3), \vec{c} = (1, \lambda)$ , 若  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{c}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

变式题 6 提升

31. 已知向量  $\vec{a} = (1, x)$ ,  $\vec{b} = (1, x-1)$ ,  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}| =$  \_\_\_\_\_.

原题 15

32. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a^2 + c^2 = 3ac$ , 则  $b =$  \_\_\_\_\_.

变式题 1 基础

33. 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 且  $\angle A = 60^\circ, a = 7, c = 5$ , 则  $\triangle ABC$  的面积等于 \_\_\_\_\_.

变式题 2 基础

34. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $BC = 8$ ,  $AC = 5$ , 三角形面积为 12, 则  $\sin C =$  \_\_\_\_\_.

变式题 3 巩固

35. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 若三角形的面积  $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$ , 则  $\angle C$  的度数是 \_\_\_\_\_.

变式题 4 巩固

36. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $(a+b)^2 - c^2 = 4, C = 60^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 \_\_\_\_\_.

变式题 5 巩固

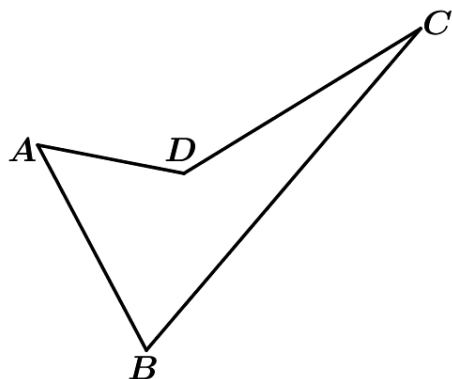
37.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $b = \sqrt{3}$ ,  $a = 2c$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 \_\_\_\_\_.

变式题 6 巩固

38. 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ,  $AC = \sqrt{3}, \angle ABC = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的周长等于 \_\_\_\_\_.

变式题 7 提升

39. 如图, 平面凹四边形  $ABCD$ , 其中  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 120^\circ$ , 则四边形  $ABCD$  面积的最小值为 \_\_\_\_\_.



变式题 8 提升

40. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 若 $b^2 + c^2 = a^2 + bc, b = 2$ , 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围是\_\_\_\_\_

参考答案:

1. C

【分析】设  $P(x_0, y_0)$ ，由  $B(0, b)$ ，根据两点间的距离公式表示出  $|PB|$ ，分类讨论求出  $|PB|$  的最大值，再构建齐次不等式，解出即可.

【详解】设  $P(x_0, y_0)$ ，由  $B(0, b)$ ，因为  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以

$$|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + (y_0 - b)^2 = -\frac{c^2}{b^2} \left(y_0 + \frac{b^3}{c^2}\right)^2 + \frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2,$$

因为  $-b \leq y_0 \leq b$ ，当  $-\frac{b^3}{c^2} \leq -b$ ，即  $b^2 \geq c^2$  时， $|PB|_{\max}^2 = 4b^2$ ，即  $|PB|_{\max} = 2b$ ，符合题意，

由  $b^2 \geq c^2$  可得  $a^2 \geq 2c^2$ ，即  $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

当  $-\frac{b^3}{c^2} > -b$ ，即  $b^2 < c^2$  时， $|PB|_{\max}^2 = \frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2$ ，即  $\frac{b^4}{c^2} + a^2 + b^2 \leq 4b^2$ ，化简得，

$(c^2 - b^2)^2 \leq 0$ ，显然该不等式不成立.

故选：C.

【点睛】本题解题关键是如何求出  $|PB|$  的最大值，利用二次函数求指定区间上的最值，要根据定义域讨论函数的单调性从而确定最值.

2. B

【分析】在  $\triangle PF_1F_2$  中，得出直角边与斜边的关系，再结合椭圆的定义易得离心率.

【详解】由题设知  $\triangle F_1PF_2$  是直角三角形，

$$\angle PF_1F_2 = 30^\circ, \angle PF_2F_1 = 60^\circ, |F_1F_2| = 2c,$$

$$\therefore |PF_2| = c, |PF_1| = \sqrt{3}c.$$

又由椭圆的定义，得  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ， $\therefore \sqrt{3}c + c = 2a$ ，

$$\text{故 } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1.$$

故选：B.

3. B

【分析】由题意构建齐次式即可得到结果.

【详解】由题意知  $2b = a + c$ , 又  $a^2 = b^2 + c^2$ ,

$$\therefore 4(a^2 - c^2) = (a + c)^2$$

$$\therefore 5e^2 + 2e - 3 = 0, \text{ 即 } e = \frac{3}{5} \text{ 或 } e = -1 \text{ (舍)},$$

故选:B.

4. C

【解析】先根据焦点在  $x$  轴上, 得  $2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$ , 再结合  $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ ,

求其范围, 即得结果.

【详解】椭圆  $\frac{x^2}{4a} + \frac{y^2}{a^2 + 1} = 1 (a > 0)$  焦点在  $x$  轴上, 故  $4a > a^2 + 1$ , 即  $a^2 - 4a + 1 < 0$ ,

$$\text{解得 } 2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}, \text{ 又 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad 0 < e < 1,$$

$$\text{故 } e^2 = 1 - \frac{a^2 + 1}{4a} = 1 - \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right), \text{ 其中对勾函数 } \varphi(a) = a + \frac{1}{a} \text{ 在 } [2 - \sqrt{3}, 1] \text{ 上递减, } (1, 2 + \sqrt{3}] \text{ 上}$$

$$\text{递增, 故 } \varphi(a)_{\min} = \varphi(1) = 2, \quad \varphi(a)_{\max} = \varphi(2 + \sqrt{3}) = \varphi(2 - \sqrt{3}) = 4, \text{ 故 } e^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \text{ 则 } e \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

故选: C.

【点睛】求椭圆离心率 (或取值范围) 常见方法:

(1) 直接法: 由  $a, b, c$  的值或者关系, 直接计算离心率  $e = \frac{c}{a}$ ;

(2) 构建齐次式: 利用已知条件和椭圆的几何关系构建关于  $a, b, c$  的方程和不等式, 利用  $b^2 = a^2 - c^2$  和  $e = \frac{c}{a}$  转化成关于  $e$  的方程和不等式, 通过解方程和不等式即求得离心率的值或取值范围.

5. A

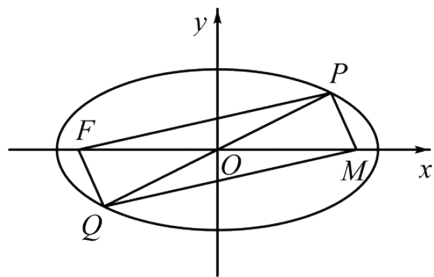
【分析】得出点  $Q$  的坐标, 可得  $|PQ|$ , 再由已知可得  $|PF| + |QF| = 4\sqrt{2}$ , 设椭圆的右焦点为  $M$ , 则由椭圆的性质可得  $|PF| = |QM|$ , 得  $|QM| + |QF| = 2a = 4\sqrt{2}$ , 求得  $a$ , 然后代入点  $P$  的坐标求出  $b$  的值, 最后即可求得椭圆的离心率.

【详解】解:  $P$  与  $Q$  关于原点对称, 则  $Q(-2, -1)$ ,

$$\therefore |PQ| = 2\sqrt{1^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{又三角形 } PQF \text{ 的周长为 } |QP| + |PF| + |QF| = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5},$$

设圆的右焦点为  $M$ ，则由椭圆的性质可得  $|PF| = |QM|$ ，



$$\therefore |QM| + |QF| = 2a = 4\sqrt{2}, \text{ 得 } a = 2\sqrt{2},$$

将点  $P$  代入椭圆方程可得:  $\frac{4}{8} + \frac{1}{b^2} = 1$ , 解得  $b = \sqrt{2}$ ,

$$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{则离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故选  $A$ .

【点睛】关键点睛: 根据椭圆性质得出  $|PF| = |QM|$  和  $|QM| + |QF| = 2a$  是解出本题的关键. 本题考查了椭圆的方程以及性质, 涉及到椭圆的定义, 考查了学生的运算能力, 属于中档题.

6. C

【分析】若长轴端点  $P'$ , 由椭圆性质: 过  $P$  的两条切线互相垂直可得  $\alpha = \angle AP'O \leq 45^\circ$ , 结合  $\sin \alpha = \frac{b}{a}$  求椭圆离心率的范围.

【详解】在椭圆  $C_1$  的长轴端点  $P'$  处向圆  $C_2$  引两条切线  $P'A$ ,  $P'B$ ,

若椭圆  $C_1$  上存在点  $P$ , 使过  $P$  的两条切线互相垂直, 则只需  $\angle AP'B \leq 90^\circ$ , 即  $\alpha = \angle AP'O \leq 45^\circ$ ,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{b}{a} \leq \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 得 } a^2 \leq 2c^2,$$

$$\therefore e^2 \geq \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < e < 1,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1, \text{ 即 } e \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right).$$

故选: C

7. D

【分析】由题意及椭圆的定义可得 $|PF_2|$ 的值，再由 $P$ 在椭圆上满足 $|PF_2|$ 的范围，求出 $a, c$ 的关系，进而求出离心率的范围即可.

【详解】解：因为 $|PF_1|=3|PF_2|$ ，而 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ ，所以可得 $|PF_2|=\frac{a}{2}$ ，

因为 $P$ 在椭圆上，所以 $|PF_2|\leq a-c$ ，

所以 $\frac{a}{2}\leq a-c$ ，可得 $e=\frac{c}{a}\geq \frac{1}{2}$ ，又因为 $e\in(0,1)$ ，所以 $e\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

故选：D.

8. D

【解析】根据平面向量加法的几何意义，结合椭圆的范围、离心率的公式进行求解即可.

【详解】由 $OP$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的边 $F_1F_2$ 的中线，可得 $\vec{PO}=\frac{1}{2}(\vec{PF_1}+\vec{PF_2})$ ，

由在椭圆上存在点 $P$ 满足 $2|\vec{PF_1}+\vec{PF_2}|\leq |\vec{F_1F_2}|$ ，可得 $4|\vec{PO}|\leq 2c$ .

当椭圆的焦点在横轴上时，

$|\vec{PO}|\geq b$ ，可得 $2c\geq 4b$ ，即 $c\geq 2b\Rightarrow c^2\geq 4b^2\Rightarrow c^2\geq 4a^2-4c^2\Rightarrow 5c^2\geq 4a^2$ ，

则 $e=\frac{c}{a}\geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\leq e<1$ .

当椭圆的焦点在纵轴上时，

$|\vec{PO}|\geq a$ ，可得 $2c\geq 4a$ ，即 $c\geq 2a\Rightarrow c^2\geq 4a^2\Rightarrow c^2\geq 4b^2-4c^2\Rightarrow 5c^2\geq 4b^2$ ，

则 $e=\frac{c}{b}\geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\leq e<1$ .

故选：D

【点睛】关键点睛：利用平面向量加法的几何意义得到 $\vec{PO}=\frac{1}{2}(\vec{PF_1}+\vec{PF_2})$ 是解题的关键，

椭圆的范围也是一个重要隐含条件.

9. B

【分析】利用对数的运算和对数函数的单调性不难对 $a, b$ 的大小作出判定，对于 $a$ 与 $c$ ， $b$ 与 $c$ 的大小关系，将 $0.01$ 换成 $x$ ，分别构造函数 $f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$ ，

$g(x)=\ln(1+2x)-\sqrt{1+4x}+1$ ，利用导数分析其在 $0$ 的右侧包括 $0.01$ 的较小范围内的单调性，

结合 $f(0)=0, g(0)=0$ 即可得出 $a$ 与 $c$ ， $b$ 与 $c$ 的大小关系.

【详解】[方法一]：

$$a = 2\ln 1.01 = \ln 1.01^2 = \ln(1+0.01)^2 = \ln(1+2 \times 0.01 + 0.01^2) > \ln 1.02 = b,$$

所以  $b < a$ ;

下面比较  $c$  与  $a, b$  的大小关系.

$$\text{记 } f(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1, \text{ 则 } f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}},$$

$$\text{由于 } 1+4x - (1+x)^2 = 2x - x^2 = x(2-x)$$

$$\text{所以当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } 1+4x - (1+x)^2 > 0, \text{ 即 } \sqrt{1+4x} > (1+x), \quad f'(x) > 0,$$

所以  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增,

$$\text{所以 } f(0.01) > f(0) = 0, \text{ 即 } 2\ln 1.01 > \sqrt{1.04} - 1, \text{ 即 } a > c;$$

$$\text{令 } g(x) = \ln(1+2x) - \sqrt{1+4x} + 1, \text{ 则 } g(0) = 0, \quad g'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = \frac{2(\sqrt{1+4x} - 1 - 2x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}},$$

$$\text{由于 } 1+4x - (1+2x)^2 = -4x^2, \text{ 在 } x > 0 \text{ 时, } 1+4x - (1+2x)^2 < 0,$$

所以  $g'(x) < 0$ , 即函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(0.01) < g(0) = 0$ , 即

$$\ln 1.02 < \sqrt{1.04} - 1, \text{ 即 } b < c;$$

综上,  $b < c < a$ ,

故选: B.

**[方法二]:**

$$\text{令 } f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) - x - 1 (x > 1)$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1} < 0, \text{ 即函数 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减}$$

$$f(\sqrt{1+0.04}) < f(1) = 0, \therefore b < c$$

$$\text{令 } g(x) = 2\ln\left(\frac{x^2+3}{4}\right) - x + 1 (1 < x < 3)$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{x^2+3} > 0, \text{ 即函数 } g(x) \text{ 在 } (1, 3) \text{ 上单调递增}$$

$$g(\sqrt{1+0.04}) < g(1) = 0, \therefore a > c$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/986020220025010123>