

第三章静电场中的电介质

一、判断题

1

1、当同一电容器内部充满同一种均匀电介质后，介质电容器的电容为真空电容器的 ϵ_r 倍。

×

2、对有极分子组成的介质，它的介电常数将随温度而改变。

√

3、在均匀介质中一定没有体分布的极化电荷。(内有自由电荷时，有体分布)

×

4、均匀介质的极化与均匀极化的介质是等效的。

×

5、在无限大电介质中一定有自由电荷存在。

√

6、如果一平行板电容器始终连在电源两端，那么充满均匀电介质后的介质中的场强与真空中场强相等。

√

7、在均匀电介质中，如果没有体分布的自由电荷，就一定没有体分布的极化电荷。

√

8、在均匀电介质中，只有 $\vec{P}$ 为恒矢量时，才没有体分布的极化电荷。

$$\vec{P} = \text{恒矢量} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0 \quad \rho_p = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$$

×

9、电介质可以带上自由电荷，但导体不能带上极化电荷。

√

10、电位移矢量 $\vec{D}$ 仅决定于自由电荷。

×

11、电位移线仅从正自由电荷发出，终止于负自由电荷。

√

12、在无自由电荷的两种介质交界面上， $\vec{E}_f$ 线连续， $\vec{E}_p$ 线不连续。(其中， $\vec{E}_f$ 为自由电荷产生的电场， $\vec{E}_p$ 为极化电荷产生的电场)

√

13、在两种介质的交界面上，当界面上无面分布的自由电荷时，电位移矢量的法向分量是连续的。

√

14、在两种介质的交界面上，电场强度的法向分量是连续的。

×

15、介质存在时的静电能等于在没有介质的情况下，把自由电荷和极化电荷从无穷远搬到场中原有位置的过程中外力作的功。

×

16、当均匀电介质充满电场存在的整个空间时，介质中的场强为自由电荷单独产生的场强的 ϵ_r 分之一。

√

二、选择题

1. 一平行板真空电容器，充电到一定电压后与电源切断，把相对介质常数为 ϵ_r 的均匀电介质充满电容器。那么以下说法中不正确的选项是：

(A) 介质中的场强为真空中场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍。

(B) 介质中的场强为自由电荷单独产生的场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍。

- (C) 介质中的场强为原来场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍。
 (D) 介质中的场强等于真空中的场强。

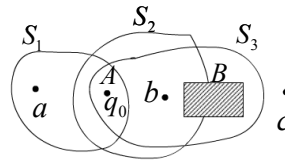
D

2. 如果电容器两极间的电势差保持不变, 这个电容器在电介质存在时所储存的自由电荷与没有电介质 (即真空) 时所储存的电荷相比
 (A) 增多 (B) 减少 (C) 相同 (D) 不能比拟

A

3. 在图中, A 是电量 q_0 的点电荷, B 是一小块均匀的电介质, s_1 、 s_2 和 s_3 都是封闭曲面, 以下说法中不正确的选项是:

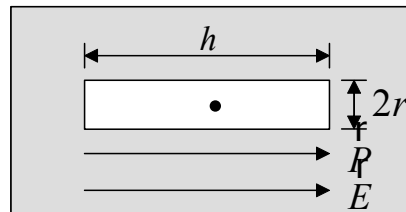
- (A) $\oint_{s_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}$
 (B) $\int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_{s_3} \vec{D} \cdot d\vec{s}$
 (C) $\oint_{s_1} \vec{E}_f \cdot d\vec{s} = \oint_{s_2} \vec{E}_f \cdot d\vec{s} = \oint_{s_3} \vec{E}_f \cdot d\vec{s}$
 (D) $E_a > E_f, E_b < E_f, E_c < E_f$



D

4. 在均匀极化的电介质中, 挖出一半径为 r , 高度为 h 的圆柱形空腔, 圆柱的轴平行于极化强度 $\vec{P}$ 底面与 $\vec{P}$ 垂直, 当 $h \gg r$ 时, 那么空腔中心 E_0 和 D_0 与介质中 E 和 D 的关系为:

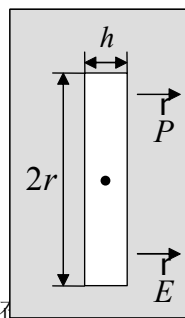
- (A) $\vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}$
 (B) $\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$
 (C) $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$
 (D) $\vec{D}_0 = \vec{D}$



C

5. 在均匀极化的, 挖出一半径为 r , 高度为 h 的圆柱形空腔, 圆柱的轴平行于极化强度 $\vec{P}$ 底面与 $\vec{P}$ 垂直, 当 $h \ll r$ 时, 那么空腔中心 E_0 和 D_0 与介质中 E 和 D 的关系为:

- (A) $\vec{E}_0 = (\epsilon_r - 1) \vec{E}$
 (B) $\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}_0}{\epsilon_0}$
 (C) $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$
 (D) $\vec{D}_0 = \epsilon_r \vec{D}$



B

6. 一个介质球其内半径为 R , 外半径为 $R+a$, 在球心处有一电量为 q_0 的点电荷, 对于 $R < r < R+a$ 电场强度为:

- (A) $\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$ (B) $\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (C) $\frac{q_0}{4\pi r^2}$ (D) $\frac{(\epsilon_r - 1) q_0}{4\pi\epsilon_r r^2}$

A

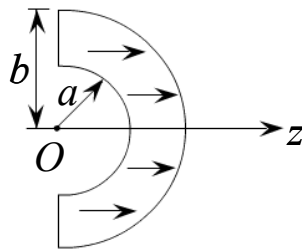
7. 一内半径为 a , 外半径为 b 的驻体半球壳, 如下图, 被沿 $+Z$ 轴方向均匀极化, 设极化强度为 $\vec{P} = P\hat{k}$, 球心 O 处的场强是:

(A) $\vec{E}_0 = -\frac{P}{6\epsilon_0} \hat{K}$

(B) $\vec{E}_0 = \frac{P}{6\epsilon_0} \hat{K}$

(C) $\vec{E} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{K}$

(D) $\vec{E}_0 = 0$



D

8. 内外半径为 R_1 和 R_2 的驻极体球壳被均匀极化, 极化强度为 $\vec{P}$; $\vec{P}$ 的方向平行于球壳直径, 壳内空腔中任一点的电场强度是:

(A) $\vec{E} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$

(B) $\vec{E} = 0$

(C) $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$

(D) $\vec{E} = \frac{2\vec{P}}{3\epsilon_0}$

B

9. 半径为 R 相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质球的中心放置一点电荷 q , 那么球内电势 Φ 的分布规律是

(A) $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(B) $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r}$

(C) $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

(D) $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$

C

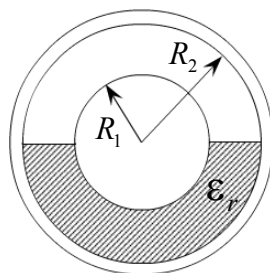
10. 球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的导体球壳所构成, 球壳的内半径为 R_2 , 其间一半充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质, 另一半为空气, 如下图, 该电容器的电容为:

(A) $C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

(B) $C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

(C) $C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

(D) $C = \frac{2\pi\epsilon_0 (1 + \epsilon_r) R_1 R_2}{R_2 - R_1}$



D

11. 把一相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质球壳套在一半径为 a 的金属球外, 金属球带有电量 q , 设介质球壳的内半径为 a , 外半径为 b , 那么系统的静电能为:

(A) $W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}$

$$(B) \quad W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} + \frac{\epsilon_r - 1}{b} \right)$$

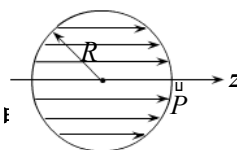
$$(C) \quad W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$(D) \quad W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

B

三、填空题

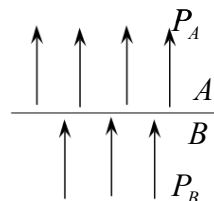
1、如图，有一均匀极化的介质球，半径为 R ，极化强度为 P ，那么极化电荷在球心处产生的场强是 () 在球外 Z 轴上任一点产生的场强是 ()



2、带电棒能吸引轻小物体的原因是 ()。

轻小物体由于极化在靠近带电棒一端出现与带电棒异号的极化电荷。

3、附图给出了 A、B 两种介质的分界面，设两种介质



A、B 中的极化强度都是与界面垂直，且 $P_A > P_B$ ，当

取 $\hat{e}_n$ 由 A 指向 B 时，界面上极化电荷为 () 号。

当 $\hat{e}_n$ 由 B 指向 A 时，界面上极化电荷为 () 号。

正负

4、如果电介质中各的 () 相同，这种介质为均匀电介质。如果电介质的总体或某区域内各点的 () 相同，这个总体或某区域内是均匀极化的。

5、 $C = \epsilon_r C_0$ 成立的条件是 ()。

介质为均匀介质

6、在两种不同的电介质交界面上，如果交界面上无自由电荷，那么 $E_{1n} - E_{2n} = ()$ 。

7、介质中电场能量密度表示为 $\omega_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$ 只适用于 () 介质。 $\omega_E = \frac{1}{2} D \cdot E$ 适用于 () 介质。

各向同性的均匀线性线性

8、假设先把均匀介质充满平行板电容器，(极板面积为 S ，极板间距为 L ，板间介电常数为 ϵ_r) 然后使电容器充电至电压 U 。在这个过程中，电场能量的增量是 ()。

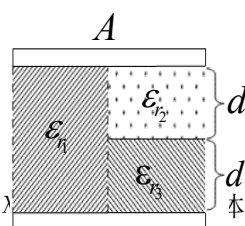
9、平行板电容器的极板面积为 s ，极板间距为 d 中间有两层厚度各为 d_1 和 d_2 的均匀介质 ($d_1 + d_2 = d$)，它们的相对介电常数分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 。(1) 当金属板上自由电荷的面密度为 $\pm \sigma_f$ 时，两层介质分界面上极化电荷的面密度 $\sigma_p = ()$ 。(2) 两极板间的电势差 $\Delta \phi = ()$ 。(3) 电容 $C = ()$ 。

10、如下图一平行板电容器充满三种不同的电

介质，相对介电常数分别为 ϵ_{r1} ， ϵ_{r2} 和 ϵ_{r3} 。极

板面积为 A ，两极板的间距为 $2d$ ，略去边缘效

应，此电容器的电容是 ()。



11、无限长的圆柱形导体，半径为 R ，沿轴线单位长度上带电量 λ ，导体放在无限大的均匀电介质 ϵ_r 中，那么电介质外表的束缚电荷面密度是 ()。

12、半径为 a 的长直导线，外面套有共轴导体圆筒，筒的内半径为 b ，导线与圆筒间充满介电常数为 ϵ_r 的均匀介质，沿轴线单位长度上导线带电为 λ ，圆筒带电为 $-\lambda$ ，略去边缘效应，那么沿轴线单位长度的电场能量是（）。

13、一圆柱形的电介质截面积为 S ，长为 L ，被沿着轴线方向极化，极化强度 $\vec{P}$ 沿 x 方向，且 $P=KX$ （ K 为比例常数）

坐标原点取在圆柱的一个端面上，如下图

那么极化电荷的体密度（）

在 $X=L$ 的端面上极化电荷面密度为（）

极化电荷的总电量为（）。

14、在如下图的电荷系中相对其位形中心的偶极矩为（）。

0

四、问答题

1、电介质的极化和导体的静电感应，两者的微观过程有何不同？

答：从微观看，金属中有大量自由电子，在电场的作用下可以在导体内位移，使导体中的电荷重新分布。结果在导体外表出感应电荷。到达静电平衡时感应电荷所产生的电场与外加电场相抵消，导体中的合场强为零。导体中自由电子的宏观移动停止。在介质中，电子与原子核的结合相当紧密。电子处于束缚状态，在电场的作用下，只能作一微观的相对位移或者它们之间连线稍微改变方向。结果出现束缚电荷。束缚电荷所产生的电场只能局部地抵消外场，到达稳定时，电介质内部的电场不为零。

2、为什么要引入电位移矢量 $\vec{D}$ ？ $\vec{E}$ 与 $\vec{D}$ 哪个更根本些？

答：当我们研究有电介质存在的电场时，由于介质受电场影响而极化，出现极化电荷，极化电荷的场反过来改变原来场的分布。空间任一点的场仍是自由电荷和极化电荷共同产生即：

因此，要求介质中的 $\vec{E}$ ，必须同时知道自由电荷及极化电荷的分布。而极化电荷的分布取决于介质的形状和极化强度 $\vec{P}$ ，而 $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ ，而 $\vec{E}$ 正是要求的电场强度。这样似乎形成计算上的循环，为了克服这一困难，引入辅助量 $\vec{D}$ 。由 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$ 知，只要自由电荷，原那么上即可求 $\vec{D}$ ，再由 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ 求 $\vec{E}$ 。故 $\vec{D}$ 更根本些。

3、把平行板电容器的一个极板置于液态电介质中，极板平面与液面平行，当电容器与电源连接时会产生什么现象？为什么？

答：当电容器与电源连接时，电容器将离开电介质。这是因为当考虑电容器边缘效应时两极板外外表也带上等量异号电荷，当其中一极板平面与液面平行时，由于介质极化，该极板电荷所受到的静电力小于另一极板电荷所受到静电力。且二者方向相反电容器整体受一个向上的合力作用。

五、证明题

1、一个半径为 R 的电介质球，球内均匀地分布着自由电荷，体密度为 ρ_f ，设介质是线性、各向同性和均匀的，相对介电常数为 ϵ_r ，试证明球心和无穷远处的电势差是：

证明：当 $r \leq R$ 时以球心为心， r 为半径作球面（高斯面）

如图虚线所示，由对称性和 $\vec{D}$ 的高斯定理得

$$\text{由 } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \text{ 得}$$

当 $r > R$ 时取高斯面如图虚线所示，同理得

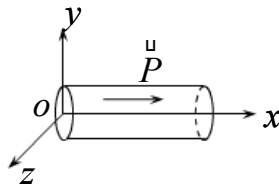
取无限远处电势为零，那么球心与无限远处的电势差等于球心电势。根据电势与场强的关系得

六、计算题

1、将一个半径为 a 的均匀介质球放在电场强度为 E_0 的均匀电场中；电场 E_0 由两块带等量异号电荷的无限大的平行板所产生，假定介质球的引入未改变平板上的电荷分布，介质的相对介电常数为 ϵ_r ，

（1）求介质小球的总电偶极矩

（2）假设用一个同样大小的理想导体做成的小圆球代替上述介质球（并设 E_0 不变），求导体球上感应电荷的等效电偶极矩。



解：(1) 均匀介质球放在均匀电场中将被均匀极化，故只有球面上有极化电荷，设极化电荷面密度为 σ' ，在球心产生的电场强度为 $\vec{E}'$ ，那么球心的场强为

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 + \vec{E}' \dots\dots ①$$

如图 1-1 因

$$\sigma' = \hat{n} \cdot \vec{P} = P \cos \theta \dots\dots ②$$

由于余弦分布带电球面在球内产生匀强电场，所以根据对称性可得球内的场强为

$$= \frac{P}{3\epsilon_0} \dots\dots ③$$

其方向与 $\vec{E}_0$ 方向相反
所以

$$E_c = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0} \dots\dots ④$$

根据 $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的关系

$$P = P_c = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_c \dots\dots ⑤$$

由④、⑤式得

由极化强度定义得介质球的总电偶极矩为

$$= 4\pi a^3 \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} E_0 \dots\dots ⑥$$

(2) 将导体球放在均匀电场中，导体球感应电荷面密度为余弦分布，如图 1-2 所示设 $\sigma' = \sigma_0 \cos \theta$ 根据对称性那么球内的场强为

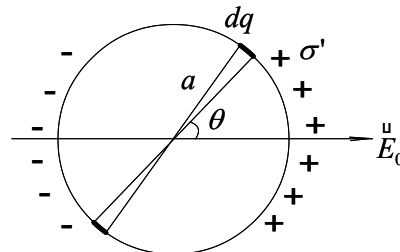
$$= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \dots\dots ⑦$$

其方向与 $\vec{E}_0$ 方向相反
由静电平衡条件得

$$\vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

$$E'_c = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = E_0 \quad \text{图 1-2}$$

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0 \dots\dots ⑧$$



在球面上取一电偶极子，电量为 $dq = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ 偶极子臂为 $l = 2a$ ，根据对称性，元电偶极矩为 $= \sigma_0 4\pi a^3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \dots\dots ⑨$

由⑧、⑨式得感应电荷的等效电偶极矩为

2、一圆柱形电介质长为 L ，其横截面的半径为 R ，被沿着轴线方向极化，极化强度 $\vec{P} = kx\hat{i}$ (k 为一常数)，设坐标原点 O 在介质圆柱内左端面的中心，此外无其它电场源，试求：

(1) 在介质圆柱中心一点的电场强度 E 和电位移 D ；

(2) 在坐标原点 O 处的电场强度 E 和电位移 D 。

解：极化电荷的体密度为

即介质内均匀地分布差负的体极化电荷，在 $x=0$ 的端面上的极化电荷面密度为

在 $x=L$ 的端面上的极化电荷密度为

(1) 在圆柱中心体极化电荷不产生场，只有在 $x=L$ 处而极化电荷产生场，根据均匀带电圆盘轴线上的场强公式得

由电位移矢量定义式 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 得中心处的 $\vec{D}$ 为

(2) 在圆柱端部中心的场由体极化电荷和面极化电荷共同产生。在距原点 x 处，取一圆盘，厚度 dx 如下图，其上电量为

圆盘上电荷面密度为

该圆盘在原点 O 处产生的电场为

体极化电荷在原点 O 处产生的电场强度为

面极化电荷在原点 O 处产生的电场强度为

原点处电位移矢量为

3、一块柱极体圆片，半径为 R ，厚度为 t ，在平行于轴线的方向上永久极化，且极化是均匀的，极化强度为 P ，试计算在轴线上的场强 E 和电位移 D （包括圆片内外）。

解：在垂直 x 轴的两个外表均匀带正负面极化电荷，如下图，其面密度为

对在圆片内任一点而言两外表相当无穷大均匀带电平面，圆片内电场强度为

电位移矢量为

对圆片内外轴线任一点而言，两外表相当于均匀带电圆盘。

在距原点 $x \left(x \geq \frac{t}{2} \right)$ 处，正负带电圆盘产生的场强分别为

该处的总电场强度为

因为 t 很小，用台劳级数将上式在 $t=0$ 处展开，取前两项

$$f(t) = \frac{x + \frac{t}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{t}{2})^2}} - \frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{t}{2})^2}}$$

取

那么有

所以

电位移矢量为

4、半导体器件的 $p-n$ 结中， n 型内有不受晶格束缚的自由电子、 p 型区内那么有相当于正电荷的空穴。

由于两区交界处自由电子和空穴密度不同，电子向 p 区扩散，空穴向 n 区扩散，在结的两边留下杂质离子，因而产生电场，阻止电荷继续扩散，当扩散作用与电场的作用相平衡时，电荷及电场的分布到达稳定状态，而在结内形成了一个偶电区（如图如示），称为阻挡层。现设半导体材料的相对介电常数为 ϵ ，

结外电荷体密度 $\rho(x)=0$ ，结内电荷的体分布为 $\rho(x)=-ekx$ （ $-a \leq x \leq a$ ，线性缓慢变结）式中 e 为

电子电量， k 为常数，试求 $p-n$ 结内电场强度和电势的分布，并画出 $\rho(x)$ 、 $E(x)$ 和 $\phi(x)$ 随 x 变化的曲线。

解：建立坐标轴如图 4-1 所示，在结内距原点 x' 处取宽度为 dx' 的无限大平面，该平面电荷密度为

该带电平面在结内 P 点产生的场强为

OB 区电荷在 P 点产生的场强为

$$E_{BO} = \int dE = \frac{1}{2\epsilon_0\epsilon_r} \int_0^a ekx' dx' \quad \text{图 4-1}$$

所以

OP 区电荷在 P 点产生的场强为图 4-2

所以

PA 区电荷在 P 点产生的场强为图 4-3

所以

$$\vec{E}_{PA} = \frac{ek}{4\epsilon_0\epsilon_r} (a^2 - x^2) \hat{i} \quad \text{图 4-4}$$

由叠加原理得 P 点的总场强为

场强随 x 变化曲线如图 4-3 所示

由高斯定理知，结外的场强为

在结内任意点 P 的电势为

电势随 x 变化曲线如图 4-4 所示，结内电荷体密度随 x 变化曲线如图 4-2 所示。

5、半导体器件的 p-n 结中，n 型内有不受晶格束缚的自由电子、p 型区内那么有相当于正电荷的空穴。由于两区交界处自由电子和空穴密度不同，电子向 p 区扩散，空穴向 n 区扩散，在结的两边留下杂质离子，因而产生电场，阻止电荷继续扩散，当扩散作用与电场的作用相平衡时，电荷及电场的分布到达稳定状态，而在结内形成了一个偶电区（如图 5-1 所示），称为阻挡层。现设半导体材料的相对介电常数为 ϵ ，如果电荷的体分布为

$$n \text{ 区: } \rho(x) = N_D e \quad (\text{突变结})$$

$$p \text{ 区: } \rho(x) = -N_A e$$

式中 N_D, N_A 是常数， e 为电子数且 $N_A x_p = N_D x_n$ ，其中 x_p 和 x_n 各为 p 区和 n 区的厚度，试求结内电场强度和电势的分布并画出 $\rho(x)$ 、 $E(x)$ 和 $\phi(x)$ 随 x 变化的曲线。

解：建立坐标轴，如图 5-1 所示，在 P 区内距原点 x 处找一个考察点 P，P 点的场强由三局部即 BO 段、OP 段和 PA 段体分布电荷产生的。每一段即可看成是由许多无限大带电平面组成的，其电荷面密度为 $\sigma = \rho dx'$

图 5-1

图 5-2

图 5-3

$$dE = \frac{\rho dx'}{2\epsilon_0} \quad \text{由}$$

$$E_{OP} = -\frac{N_A e}{2\epsilon_0} \int_0^x dx' = -\frac{N_A e}{2\epsilon_0} x \quad \text{图 5-4}$$

所以，P 点的总场强为

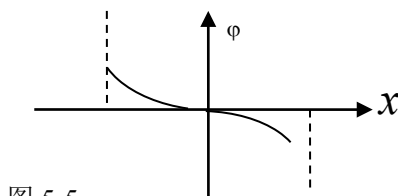


图 5-5

取原点电势为零，由电势定义得

在 n 区内取一点 P，如图 5-2 所示

同理得各段在 P 点的场强为

所以，P 点的总场强为

同理可得 P 点的电势为

画出 $\rho(x)$ 、 $\phi(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化曲线如图 5-3、5-4、5-5 所示

6、平行板电容器的极板面积为 S，间距为 d，其间充满线性的、各向同性的电介质。介质的相对介电常数 ϵ_r 在一极板处为 ϵ_{r1} ，线性地增加到另一极板处为 ϵ_{r2} 。略去边缘效应。

(1) 求这电容器的电容 C；

(2) 当两极板上的电荷分别为 Q 和 -Q 时，求介质内极化电荷体密度和外表上极化电荷的面密度。

解：(1) 建立坐标轴，如下图

$$\text{设 } \epsilon_r = kx + \epsilon_{r1}, \quad 0 \leq x \leq d$$

那么

由此得

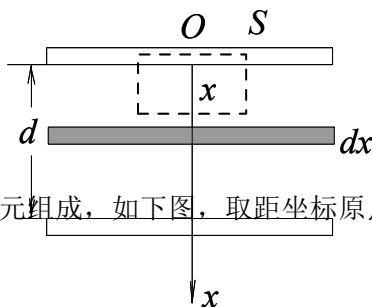
因此板间任一点的介电常数为

将平行板电容器的电容视为无限多个平行板电容元组成，如下图，取距坐标原点为 x ，厚度为 dx 一个电容元，该电容元的电容为

其倒数为

积分得

所以



(2) 作一圆柱形高斯面 S，如图中虚线所示，由介质中的高斯定理 $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$ ，得电位移矢量为

由 $\vec{E}$ 与 $\vec{D}$ 的关系和 $E = \frac{P}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$ 根据电位移矢量定义式 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 得，极化强度为极化电荷体密度为正极板处的极化强度为

板外表上的极化电荷面密度为

负极板处的极化强度为

板外表上的极化电荷面密度为

7、一半径为 a 的导体球被内半径为 b 的同心导体球壳所包围，两球间充满各向同性的电介质，在离球

心为 r 处介质的相对介电常数 $\epsilon_r = (A+r)/r$ (A 为常数)。如果内球带电荷 Q ，外球壳接地，试求：

(1) 在电介质中离球心为 r 处的电势；

(2) 介质外表上的极化电荷面密度和介质中任一点处极化电荷的体密度；

(3) 介质中极化电荷的总量。

解：(1) 根据对称性，以球心为心， r 为半径在介质内作球面〔高斯面〕 S ，由 $\vec{D}$ 的高斯定理得所以

因球壳的电势为零，故有

(2) 半径为 a 球面上的极化强度为

该外表上极化电荷面密度为

半径为 b 的球面上的极化强度为

该外表上极化电荷面密度为

半径为 r 球面上的极化强度为

介质内极化电荷体密度为

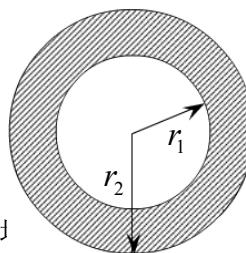
(3) 介质中极化电荷总量包括介质外表上的极化电荷和介质中极化电荷，即

8、为了使金属球的电势升高而又不使其周围空气击穿，可以在金属球外表上均匀地涂上一层石蜡。设球的半径为 1cm ，空气的击穿场强为 $2.5 \times 10^6 \text{V/m}$ ，石蜡的击穿场强为 $1.0 \times 10^7 \text{V/m}$ ，其相对介电常数为 2.0 ，问为使球的电势升到最高，石蜡的厚度应为多少？其中球的电势之值是多少？

解：设金属球带电量为 Q ，由对称性和介质中高斯定理得介质内外的场强为

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \quad (r_1 \leq r \leq r_2) \quad \dots\dots ①$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq r_2) \quad \dots\dots ②$$



取 $r = r_1$ ， $r = r_2$ 代入上两式，得介质球壳内外外表的最大

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_1^2} \quad \dots\dots ③$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad \dots\dots ④$$

由③式和④式联立得

$$r_2^2 = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_1^2 E_1}{4\pi\epsilon_0 E_2} = \frac{\epsilon_r r_1^2 E_1}{E_2} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = r_1 \sqrt{\epsilon_r \frac{E_1}{E_2}} - r_1 \quad \dots\dots ⑥$$

将数值代入⑥式得

由电势与场强积分关系得

$$\varphi_{\max} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{r_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \quad \dots\dots ⑦$$

将 $Q = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_1^2 E_1$ 代入⑦式得

$$= r_1^2 E_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{\epsilon_r}{r_2} \right) = r_1^2 E_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{r_2} \right) \dots\dots\dots ⑧$$

将数据代入⑧式得

9、如下图的圆柱形电容器，内圆柱的半径为 R_1 ，与它同轴的外圆筒的内半径为 R_2 ，长为 L ，其间充满两层同轴的圆筒形的均匀电介质，分界面的半径为 R ，它们的相对介电常数分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} ，设两导体圆筒之间的电势差 $\phi_1 - \phi_2 = U$ 略去边缘效应，求：介质内的电场强度。

解：设充电后，单位长度的电量为 λ ，由对称性和介质中的高斯定理得

由 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系得两介质内的场强分别为

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r} \dots\dots\dots ①$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r} \dots\dots\dots ②$$

圆筒之间的电势差为

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \ln \frac{R}{R_1} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_2}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln \frac{R_2}{R}}{\epsilon_{r2}} \right) \dots\dots\dots ③$$

由③式得导体圆筒电荷的线密度为

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln \frac{R_2}{R}}{\epsilon_{r2}}} \dots\dots\dots ④$$

将④式分别代入①式和②式，得介质内的场强分别为

10、为了提高输电电缆的工作电压，在电缆中常常放几种电介质，以减小内、外导体间电场强度变化，这叫分段绝缘。图中所示是这种电缆的剖面图。假设相对介电常数 $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2} > \epsilon_{r3}$ 的三种电介质作为绝缘物时，设内部导体每单位长度上带电量为 λ 。试求：（1）各层内的电场强度；（2）各层电场强度极大值；（3）在什么条件下，才能使介质内的电场强度保持为常数？

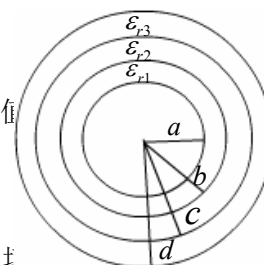
解：（1）根据对称性和高斯定理，求得电位移矢量为

根据 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ 知，介质中离轴心分别为 r 处的电场强度为

（2）当 r 分别等于 a 、 b 、 c 时，各层电场强度为极大值，其值

（3）当 $E_1 = E_2 = E_3$ 时，有

所以 $\epsilon_{r1}r_1 = \epsilon_{r2}r_2 = \epsilon_{r3}r_3 = \epsilon_r r = \text{常数}$ 时， $E = \text{常数}$



11、平行板电容器的两极板相距为 a ，极板面积为 S ，两极板之间填充介电常数按以下规律变化 $\epsilon = \epsilon_0(x+a)/a$ ， x 轴的方向与平板垂直， x 轴的原点在一块极板内外表面上，假设两极板间电势差为 U ，略去边缘效应，求电容及束缚电荷分布。

解：在距原点为 x 处取一厚度为 dx 的平行板电容器，其元电容为其倒数为

积分得

所以

极板上的自由电荷为

由如图虚线所示作高斯面，由高斯定理得板内的电位移矢量为

板内的场强为

板内的极化强度为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/986023125031010205>