2024 届内蒙古自治区包头市三十三中高三下学期 3 月初态考试数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_n=\begin{cases}2 & n\le 5\\ a_1a_2\text{L}\ a_{n-1}-1,n\ldots 6\end{cases}(n\in N^*)$)若正整数$k(k\ge 5)$使得$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=a_1a_2\ldots a_k$成立，则$k=$（　　）

A．16　　B．17　　C．18　　D．19

2．设 i 是虚数单位，若复数$z=1+i$，则$\frac{|z|^2}{z}+z^2=$（　　）

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1-i$　　D．$-1+i$

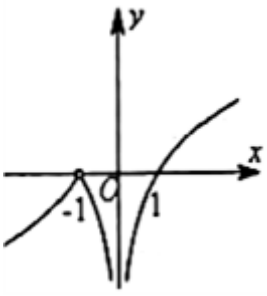
3．已知命题p：“关于x的方程$x^2-4x+a=0$有实根”，若$\neg p$为真命题的充分不必要条件为$a>3m+1$，则实数m的取值范围是（　　）

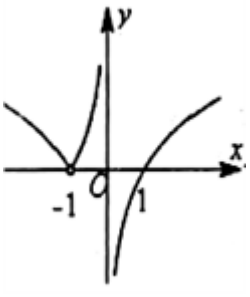
A．$[1,+\infty)$　　B．$(1,+¥)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(-\infty,1]$

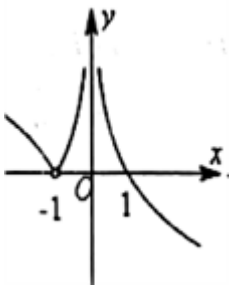
4．若$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^6$的展开式中$x^6$的系数为 150，则$a^2=$（　　）

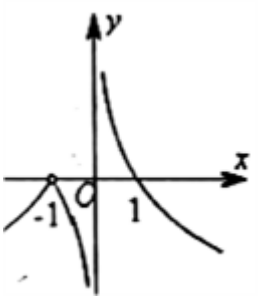
A．20　　B．15　　C．10　　D．25

5．函数$f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\log_a|x|$（$0<a<1$）的图象的大致形状是（　　）

A．

B．

C．

D．

6．已知函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像与一条平行于 x 轴的直线有两个交点，其横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

7．已知等差数列{a_n}，则“$a_2>a_1$”是“数列{a_n}为单调递增数列”的（　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

8．设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，当 $x>0$ 时，$f'(x)\ln x<-\frac{1}{x}f(x)$，则使得 $(x^2-1)f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　）

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

9．已知关于 x 的方程 $\sqrt{3}\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=m$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上有两个根 x_1，x_2，且 $|x_1-x_2|\geq\pi$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left[0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$[1,2)$　　C．$[0,1)$　　D．$[0,1]$

10．已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（　　）．

A．2^{12}　　B．2^{11}　　C．2^{10}　　D．2^9

11．已知盒中有 3 个红球，3 个黄球，3 个白球，且每种颜色的三个球均按 A，B，C 编号，现从中摸出 3 个球（除颜色与编号外球没有区别），则恰好不同时包含字母 A，B，C 的概率为（　　）

A．$\frac{17}{21}$　　B．$\frac{19}{28}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$\frac{23}{28}$

12．1777 年，法国科学家蒲丰在宴请客人时，在地上铺了一张白纸，上面画着一条条等距离的平行线，而他给每个客人发许多等质量的，长度等于相邻两平行线距离的一半的针，让他们随意投放.事后，蒲丰对针落地的位置进行统计，发现共投针 2212 枚，与直线相交的有 704 枚.根据这次统计数据，若客人随意向这张白纸上投放一根这样的针，则针落地后与直线相交的概率约为（　　）

A．$\frac{1}{2\pi}$　　B．$\frac{3}{\pi}$　　C．$\frac{2}{\pi}$　　D．$\frac{1}{\pi}$

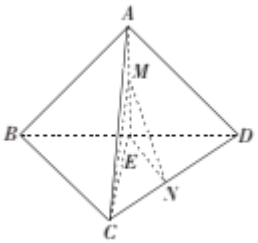
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，　$AB=BC=AC$，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，且三棱柱的侧面积为 $3\sqrt{3}$.若该三棱柱的顶点都在同一个球 O 的表面上，则球 O 的表面积的最小值为_____.

14．若 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{3},\alpha\in(0,\pi)$，则 $\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$_____.

15．已知复数 $z=1+2i$，其中 i 为虚数单位，则 z^2 的模为_____.

16．如图，在三棱锥 *A*－ *BCD* 中，点 *E* 在 *BD* 上，*EA*＝*EB*＝*EC*＝*ED*，$BD=\sqrt{2}$ *CD*，△*ACD* 为正三角形，点 *M*，*N* 分别在 *AE*，*CD* 上运动（不含端点），且 *AM*＝*CN*，则当四面体 *C*－ *EMN* 的体积取得最大值 $\frac{2}{3}$ 时，三棱锥 *A*－ *BCD* 的外接球的表面积为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）图 1 是由矩形 *ADEB*，Rt△*ABC* 和菱形 *BFGC* 组成的一个平面图形，其中 *AB*=1，*BE*=*BF*=2，∠*FBC*=60°，将其沿 *AB*，*BC* 折起使得 *BE* 与 *BF* 重合，连结 *DG*，如图 2.

（1）证明：图 2 中的 *A*，*C*，*G*，*D* 四点共面，且平面 *ABC*⊥平面 *BCGE*；

（2）求图 2 中的二面角 *B*−*CG*−*A* 的大小.

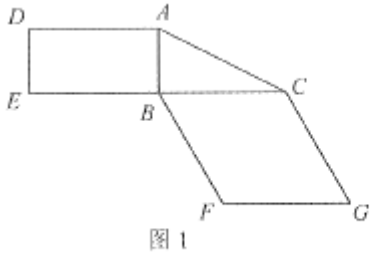


图 1

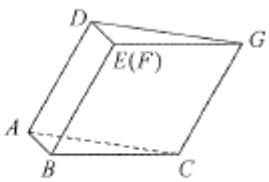


图 2

18．（12 分）随着时代的发展，*A*

城市的竞争力、影响力日益卓著，这座创新引领型城市有望踏上向“全球城市”发起“冲击”的新征程.*A* 城市的活力与包容无不吸引着无数怀揣梦想的年轻人前来发展，目前 *A* 城市的常住人口大约为 1300 万.近日，某报社记者作了有关“你来 *A* 城市发展的理由”的调查问卷，参与调查的对象年龄层次在 25~44 岁之间.收集到的相关数据如下：

来 *A* 城市发展的理由		人数	合计
自然环境	1.森林城市，空气清新	200	300
	2.降水充足，气候怡人	100	
人文环境	3.城市服务到位	150	700
	4.创业氛围好	300	
	5.开放且包容	250	
合计		1000	1000

（1）根据以上数据，预测 400 万 25~44 岁年龄的人中，选择“创业氛围好”来 *A* 城市发展的有多少人；

（2）从所抽取选择“自然环境”作为来 *A* 城市发展的理由的 300 人中，利用分层抽样的方法抽取 6 人，从这 6 人中再选取 3 人发放纪念品.求选出的 3 人中至少有 2 人选择“森林城市，空气清新”的概率；

（3）在选择“自然环境”作为来 *A* 城市发展的理由的 300 人中有 100 名男性；在选择“人文环境”作为来 *A* 城市发展的理由的 700 人中有 400 名男性；请填写下面 2×2 列联表，并判断是否有 99.9% 的把握认为性别与“自然环境”或“人文环境”的选择有关？

	自然环境	人文环境	合计
男			
女			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）已知 a,b,c 均为正实数，函数 $f\left(x\right)=\left|x+\frac{1}{a^2}\right|+\left|x-\frac{1}{b^2}\right|+\frac{1}{4c^2}$ 的最小值为1.证明：

（1）$a^2+b^2+4c^2\geq 9$；

（2）$\frac{1}{ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2ac}\leq 1$.

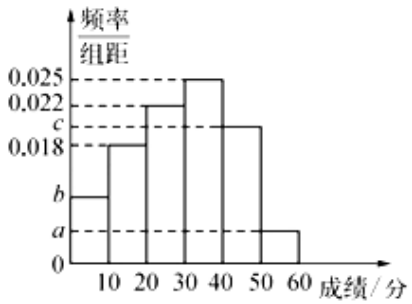
20.（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}m\left(x^2-1\right)-\ln x(m\in \mathbf{R})$.

（1）若 $m=1$，求证：$f(x)\geq 0$.

（2）讨论函数 $f(x)$ 的极值；

（3）是否存在实数 m，使得不等式 $f(x)>\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x-1}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立？若存在，求出 m 的最小值；若不存在，请说明理由.

21.（12 分）为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中，参考的文科生与理科生人数之比为 $1:4$，且成绩分布在 $[0,60]$ 的范围内，规定分数在 50 以上（含 50）的作文被评为“优秀作文”，按文理科用分层抽样的方法抽取 400 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图所示.其中 a,b,c 构成以 2 为公比的等比数列.



（1）求 a,b,c 的值；

（2）填写下面 2×2 列联表，能否在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关？

	文科生	理科生	合计
获奖	6		
不获奖			
合计			400

（3）将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2 \ldots k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22.（10 分）在平面直角坐标系 *xoy* 中，以坐标原点 *O* 为极点，*x* 轴正半轴为极轴建立极坐标系。已知曲线 *C* 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta = 2a\cos\theta(a>0)$，过点 $P(-2,-4)$ 的直线 *l* 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（为参数），直线 *l* 与曲线 *C* 交于 *M*、*N* 两点。

（1）写出直线 *l* 的普通方程和曲线 *C* 的直角坐标方程：

（2）若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列，求 *a* 的值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

计算 $a_6^2 + a_7^2 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$，故 $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1$，解得答案.

【详解】

当 $n \geq 6$ 时，$a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n - 1 = (a_n + 1)a_n - 1$，即 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$，且 $a_6 = 31$.

故 $a_6^2 + a_7^2 + \ldots + a_n^2 = (a_7 - a_6) + (a_8 - a_7) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) + n - 5 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$，

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1$，故 $k = 17$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了数列的相关计算，意在考查学生的计算能力和对于数列公式方法的综合应用.

2、A

【解析】

结合复数的除法运算和模长公式求解即可

【详解】

∵复数$z=1+i$，∴$|z|=\sqrt{2}$，$z^2=(1+i)^2=2i$，则$\frac{|z|^2}{z}+z^2=\frac{2}{1+i}+2i=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}+2i=1-i+2i=1+i$，

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的除法、模长、平方运算，属于基础题

3、B

【解析】

命题 p：$a\le 4$，$\neg p$ 为$a>4$，又$\neg p$ 为真命题的充分不必要条件为$a>3m+1$，故$3m+1>4\Rightarrow m>1$

4、C

【解析】

通过二项式展开式的通项分析得到$C_6^2a^2x^6=150x^6$，即得解.

【详解】

由已知得$T_{r+1}=C_6^r\left(x^2\right)^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r=C_6^r(a)^rx^{12-3r}$，

故当$r=2$时，$12-3r=6$，

于是有$T_3=C_6^2a^2x^6=150x^6$，

则$a^2=10$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查二项式展开式的通项和系数问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、C

【解析】

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

【详解】

$$f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\log_a|x|=\begin{cases}-\log_a(-x), & x<-1,\\ \log_a(-x), & -1<x<0,\\ \log_a x, & x>0.\end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

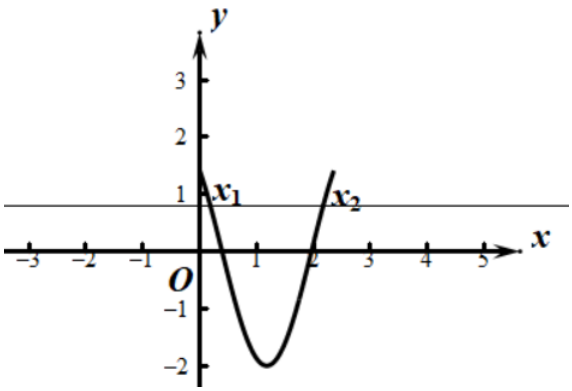
6、A

【解析】

画出函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像，函数对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，即得解.

【详解】

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像如图，



对称轴方程为 $2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又Q $0<x<\frac{3\pi}{4},\therefore x=\frac{3\pi}{8}$，

由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

故选：A

【点睛】

本题考查了正弦型函数的对称性，考查了学生综合分析，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

7、C

【解析】

试题分析：根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

解：在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_2>a_1$，则 $d>0$，即数列$\{a_n\}$为单调递增数列，

若数列$\{a_n\}$为单调递增数列，则 $a_2>a_1$，成立，

即“$a_2>a_1$”是“数列$\{a_n\}$为单调递增数列”充分必要条件，

故选 C.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断.

8、D

【解析】

构造函数，令$g(x)=\ln x\cdot f(x)(x>0)$，则$g'(x)=\ln xf'(x)+\dfrac{f(x)}{x}$，

由$f'(x)lnx<-\dfrac{1}{x}f(x)$可得$g'(x)<0$，

则$g(x)$是区间$(0,+\infty)$上的单调递减函数，

且$g(1)=\ln 1\times f(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，$\because lnx<0$，$f(x)<0$，$(x^2-1)f(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，$\because lnx>0$，$\therefore f(x)<0$，$(x^2-1)f(x)<0$

$\because f(x)$是奇函数，当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$，$(x^2-1)f(x)<0$

$\therefore$当 $x\in(-\infty,-1)$时，$f(x)>0$，$(x^2-1)f(x)>0$.

综上所述，使得$(x^2-1)f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

本题选择 D 选项.

点睛：函数的单调性是函数的重要性质之一，它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中．某些数学问题从表面上看似乎与函数的单调性无关，但如果我们能挖掘其内在联系，抓住其本质，那么运用函数的单调性解题，能起到化难为易、化繁为简的作用．因此对函数的单调性进行全面、准确的认识，并掌握好使用的技巧和方法，这是非常必要的．根据题目的特点，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧．许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效.

9、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/986025154225010210