

2024 届云南省昆明八中高三（普通班）下学期期末考试数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

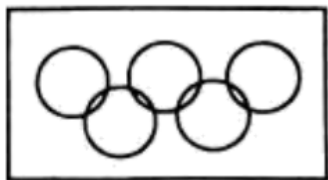
1. 若 $z = 1 - i + \frac{2}{i}$ ，则 z 的虚部是

- A. 3 B. -3 C. 3i D. -3i

2. 我国著名数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界瞩目的成就，哥德巴赫猜想内容是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”（注：如果一个大于 1 的整数除了 1 和自身外无其他正因数，则称这个整数为素数），在不超过 15 的素数中，随机选取 2 个不同的素数 a 、 b ，则 $|a-b| < 3$ 的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

3. 第 24 届冬奥会将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在北京市和张家口市举行，为了解奥运会会旗中五环所占面积与单独五个环面积之和的比值 P ，某学生做如图所示的模拟实验：通过计算机模拟在长为 10，宽为 6 的长方形奥运会旗内随机取 N 个点，经统计落入五环内部及其边界上的点数为 n 个，已知圆环半径为 1，则比值 P 的近似值为（ ）



- A. $\frac{\pi n}{8N}$ B. $\frac{12n}{\pi N}$ C. $\frac{8n}{\pi N}$ D. $\frac{\pi n}{12N}$

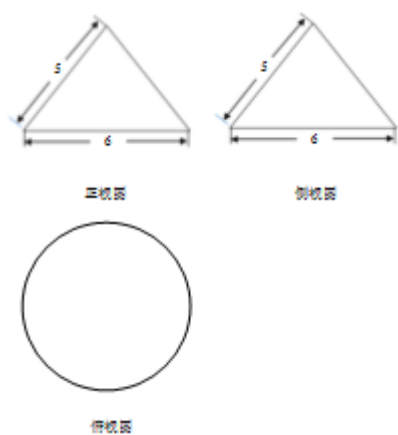
4. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x$ ， $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ，则 $f(x)$ 的最小值为（ ）

- A. $2 - \sqrt{2}$ B. 1 C. 0 D. $-\sqrt{2}$

5. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方)， l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$ ，则 M 到直线 NF 的距离为（ ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

6. 如图所示，已知某几何体的三视图及其尺寸（单位：cm），则该几何体的表面积为（ ）



A. $15\pi \text{ cm}^2$

B. $21\pi \text{ cm}^2$

C. $24\pi \text{ cm}^2$

D. $33\pi \text{ cm}^2$

7. 为了加强“精准扶贫”，实现伟大复兴的“中国梦”，某大学派遣甲、乙、丙、丁、戊五位同学参加 A 、 B 、 C 三个贫困县的调研工作，每个县至少去 1 人，且甲、乙两人约定去同一个贫困县，则不同的派遣方案共有（ ）

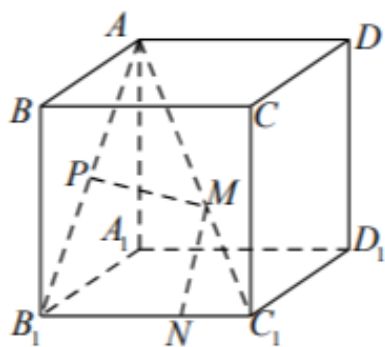
A. 24

B. 36

C. 48

D. 64

8. 如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为线段 AB_1 的中点， M, N 分别为线段 AC_1 和棱 B_1C_1 上任意一点，则 $2PM + \sqrt{2}MN$ 的最小值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

9. 在钝角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， B 为钝角，若 $a \cos A = b \sin A$ ，则 $\sin A + \sin C$ 的最大值为（ ）

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{9}{8}$

C. 1

D. $\frac{7}{8}$

10. 已知角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边经过点 $P(1, 2)$ ，则 $\cos 2\theta =$ （ ）

A. $-\frac{3}{5}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

11. 已知函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图像的一条对称轴为直线 $x = \frac{5\pi}{6}$, 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为()

- A. $\frac{11}{8}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 有以下四个命题: ①在 $\triangle ABC$ 中, $A > B$ 的充要条件是 $\sin A > \sin B$; ②函数 $y = f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点的充要条件是 $f(1) \cdot f(2) < 0$; ③对于函数 $y = f(x)$, 若 $f(2) = f(-2)$, 则 $f(x)$ 必不是奇函数; ④函数 $y = f(1-x)$ 与 $y = f(1+x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称. 其中正确命题的序号为_____.

14. 如图, 半圆的直径 $AB = 6$, O 为圆心, C 为半圆上不同于 A, B 的任意一点, 若 P 为半径 OC 上的动点, 则



15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e \ln x}{x}, & x > 0 \\ -2019x, & x \leq 0 \end{cases}$ (其中 e 为自然对数的底数), $g(x) = f^2(x) - (2m-1)f(x) + 2$, 若函数 $g(x)$ 恰有 4

个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

16. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 4$, 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{5}}{c-2}$ 的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - 2|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 7$ 的解集;

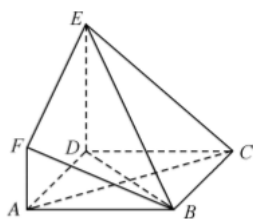
(2) 若 $f(x), |x - 4| + |x + 2a|$ 的解集包含 $[0, 2]$, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求矩阵 N ;

(2) 求矩阵 N 的特征值.

19. (12分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$.



(1) 求证: $AC \perp$ 平面 BDE ;

(2) 若 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° , 求二面角 $F-BE-D$ 的正弦值.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = |2x + a| - |x - 3|$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a = -1$, 求不等式 $f(x) + 1 > 0$ 的解集;

(2) 已知 $a > 0$, 若 $f(x) + 3a > 2$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2ax^2 + 3x - a$, $a \in \mathbf{Z}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 判断 $x = 1$ 是否是函数 $f(x)$ 的极值点, 并说明理由;

(2) 当 $x > 0$ 时, 不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

22. (10分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ b & 0 \end{bmatrix}$. 若曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 在矩阵 A 对应的变换作用下得到另一曲线 C_2 , 求曲线 C_2 的方程.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

因为 $z = 1 - i - 2i = 1 - 3i$, 所以 z 的虚部是 -3 . 故选 B.

2、B

【解析】

先列举出不超过 15 的素数, 并列举出所有的基本事件以及事件“在不超过 15 的素数中, 随机选取 2 个不同的素数 a 、

b ，满足 $|a-b|<3$ ”所包含的基本事件，利用古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

不超过15的素数有：2、3、5、7、11、13，

在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数，所有的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(2,5)$ 、 $(2,7)$ 、 $(2,11)$ 、 $(2,13)$ 、 $(3,5)$ 、 $(3,7)$ 、 $(3,11)$ 、 $(3,13)$ 、 $(5,7)$ 、 $(5,11)$ 、 $(5,13)$ 、 $(7,11)$ 、 $(7,13)$ 、 $(11,13)$ ，共15种情况，

其中，事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，且 $|a-b|<3$ ”包含的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(3,5)$ 、 $(5,7)$ 、 $(11,13)$ ，共4种情况，

因此，所求事件的概率为 $P = \frac{4}{15}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查古典概型概率的计算，一般利用列举法列举出基本事件，考查计算能力，属于基础题.

3、B

【解析】

根据比例关系求得会旗中五环所占面积，再计算比值 P .

【详解】

设会旗中五环所占面积为 S ，

由于 $\frac{S}{60} = \frac{n}{N}$ ，所以 $S = \frac{60n}{N}$ ，

故可得 $P = \frac{S}{5\pi} = \frac{12n}{\pi N}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查面积型几何概型的问题求解，属基础题.

4、B

【解析】

$f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $-\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ 利用整体换元法求最小值.

【详解】

由已知， $f(x) = 1 + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$,

又 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 故当 $2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 1$.

故选: B.

【点睛】

本题考查整体换元法求正弦型函数的最值, 涉及到二倍角公式的应用, 是一道中档题.

5、C

【解析】

联立方程解得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 根据 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 4$, 得到 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形, 计算距离得到答案.

【详解】

依题意得 $F(1, 0)$, 则直线 FM 的方程是 $y = \sqrt{3}(x - 1)$. 由 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$.

由 M 在 x 轴的上方得 $M(3, 2\sqrt{3})$, 由 $MN \perp l$ 得 $|MN| = |MF| = 3 + 1 = 4$

又 $\angle NMF$ 等于直线 FM 的倾斜角, 即 $\angle NMF = 60^\circ$, 因此 $\triangle MNF$ 是边长为 4 的等边三角形

点 M 到直线 NF 的距离为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

故选: C.

【点睛】

本题考查了直线和抛物线的位置关系, 意在考查学生的计算能力和转化能力.

6、C

【解析】

由三视图知, 该几何体是一个圆锥, 其母线长是 5cm , 底面直径是 6cm , 据此可计算出答案.

【详解】

由三视图知, 该几何体是一个圆锥, 其母线长是 5cm , 底面直径是 6cm ,

$\therefore$ 该几何体的表面积 $S = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 5 = 24\pi$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了三视图的知识, 几何体的表面积的计算. 由三视图正确恢复几何体是解题的关键.

7、B

【解析】

根据题意, 有两种分配方案, 一是 $3:1:1$, 二是 $2:2:1$, 然后各自全排列, 再求和.

【详解】

当按照 3:1:1 进行分配时, 则有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种不同的方案;

当按照 2:2:1 进行分配, 则有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种不同的方案.

故共有 36 种不同的派遣方案,

故选: B.

【点睛】

本题考查排列组合、数学文化, 还考查数学建模能力以及分类讨论思想, 属于中档题.

8、D

【解析】

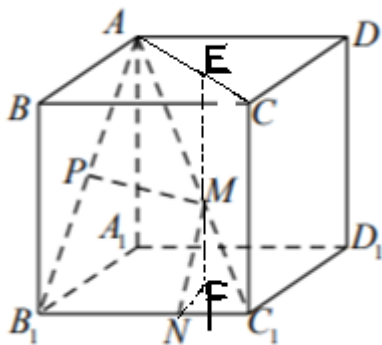
取 AC 中点 E , 过 M 作 $MF \perp$ 面 $A_1 B_1 C_1 D_1$, 可得 $\triangle MFN$ 为等腰直角三角形, 由 $\triangle APM \cong \triangle AEM$, 可得

$PM = EM$, 当 $MN \perp B_1 C_1$ 时, MN 最小, 由 $MF = \frac{\sqrt{2}}{2} MN$, 故

$$2PM + \sqrt{2}MN = 2\left(PM + \frac{\sqrt{2}}{2}MN\right) = 2(EM + MF) \geq 2AA_1 = 2, \text{ 即可求解.}$$

【详解】

取 AC 中点 E , 过 M 作 $MF \perp$ 面 $A_1 B_1 C_1 D_1$, 如图:



则 $\triangle APM \cong \triangle AEM$, 故 $PM = EM$,

而对固定的点 M , 当 $MN \perp B_1 C_1$ 时, MN 最小.

此时由 $MF \perp$ 面 $A_1 B_1 C_1 D_1$, 可知 $\triangle MFN$ 为等腰直角三角形, $MF = \frac{\sqrt{2}}{2} MN$,

$$\text{故 } 2PM + \sqrt{2}MN = 2\left(PM + \frac{\sqrt{2}}{2}MN\right) = 2(EM + MF) \geq 2AA_1 = 2.$$

故选: D

【点睛】

本题考查了空间几何体中的线面垂直、考查了学生的空间想象能力，属于中档题.

9、B

【解析】

首先由正弦定理将边化角可得 $\cos A = \sin B$ ，即可得到 $A = B - \frac{\pi}{2}$ ，再求出 $B \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ，最后根据

$\sin A + \sin C = \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left[\pi - \left(B - \frac{\pi}{2}\right) - B\right]$ 求出 $\sin A + \sin C$ 的最大值；

【详解】

解：因为 $a \cos A = b \sin A$ ，

所以 $\sin A \cos A = \sin B \sin A$

因为 $\sin A \neq 0$

所以 $\cos A = \sin B$

$$\text{Q } B > \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore A = B - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Q } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < B < \pi \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 0 < B - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < B < \pi \\ 0 < \pi - \left(B - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \therefore B \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \therefore \cos B \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\therefore \sin A + \sin C = \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left[\pi - \left(B - \frac{\pi}{2}\right) - B\right]$$

$$= -\cos B - \cos 2B$$

$$= -2\cos^2 B - \cos B + 1$$

$$= -2\left(\cos B + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$$\therefore \cos B = -\frac{1}{4} \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ 时 } (\sin A + \sin C)_{\max} = \frac{9}{8}$$

故选：B

【点睛】

本题考查正弦定理的应用，余弦函数的性质的应用，属于中档题.

10、A

【解析】

由已知可得 $\sin \theta$ ，根据二倍角公式即可求解.

【详解】

角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，

终边经过点 $P(1,2)$ ，则 $|OP| = \sqrt{5}$ ， $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = -\frac{3}{5}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数定义、二倍角公式，考查计算求解能力，属于基础题.

11、D

【解析】

运用辅助角公式，化简函数 $f(x)$ 的解析式，由对称轴的方程，求得 a 的值，得出函数 $f(x)$ 的解析式，集合正弦函数的最值，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，函数 $f(x) = a \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \theta)$ (θ 为辅助角)，

由于函数的对称轴的方程为 $x = \frac{5\pi}{6}$ ，且 $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{a}{2} + \frac{3}{2}$ ，

即 $\left| \frac{a}{2} + \frac{3}{2} \right| = \sqrt{a^2 + 3}$ ，解得 $a = 1$ ，所以 $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，

又由 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$ ，所以函数必须取得最大值和最小值，

所以可设 $x_1 = 2k_1\pi + \frac{5\pi}{6}$ ， $k_1 \in Z$ ， $x_2 = 2k_2\pi - \frac{\pi}{6}$ ， $k_2 \in Z$ ，

所以 $|x_1 + x_2| = 2k_1\pi + 2k_2\pi + \frac{2\pi}{3}$ ， $k \in Z$ ，

当 $k_1 = k_2 = 0$ 时， $|x_1 + x_2|$ 的最小值 $\frac{2\pi}{3}$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查了正弦函数的图象与性质，其中解答中利用三角恒等变换的公式，化简函数的解析式，合理利用正弦函数的对称性与最值是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于中档试题.

12、D

【解析】

设 $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, 作为一个基底, 表示向量 $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, $\vec{DF} = \frac{3}{2}\vec{DE} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$,
 $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$, 然后再用数量积公式求解.

【详解】

设 $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$,

所以 $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, $\vec{DF} = \frac{3}{2}\vec{DE} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$, $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$,

所以 $\vec{AF} \cdot \vec{BC} = -\frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{b} = \frac{1}{8}$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查平面向量的基本运算, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、①

【解析】

由三角形的正弦定理和边角关系可判断①; 由零点存在定理和二次函数的图象可判断②;

由 $f(2) = f(-2) = 0$, 结合奇函数的定义, 可判断③; 由函数图象对称的特点可判断④.

【详解】

解: ①在 $\triangle ABC$ 中, $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2R \sin A > 2R \sin B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$, 故①正确;

②函数 $y = f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点, 比如 $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ 在 $(1, 2)$ 存在零点 $\frac{3}{2}$,

但是 $f(1) \cdot f(2) > 0$, 故②错误;

③对于函数 $y = f(x)$, 若 $f(2) = f(-2) = 0$, 满足 $f(-2) = -f(2)$,

但 $f(x)$ 可能为奇函数, 故③错误;

④函数 $y = f(1-x)$ 与 $y = f(1+x)$ 的图象, 可令 $1-x = t$, 即 $x = 1-t$,

即有 $y = f(t)$ 和 $y = f(2-t)$ 的图象关于直线 $t=1$ 对称, 即 $x=0$ 对称, 故④错误.

故答案为: ①.

【点睛】

本题主要考查函数的零点存在定理和对称性、奇偶性的判断, 考查判断能力和推理能力, 属于中档题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/986104140052010211>