专题04 四边形的证明与计算

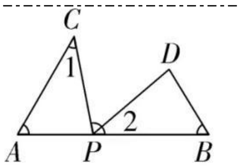
目录

热点题型归纳 REDIANTIXING

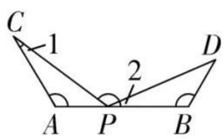
题型01 四边形与全等

【解题策略】

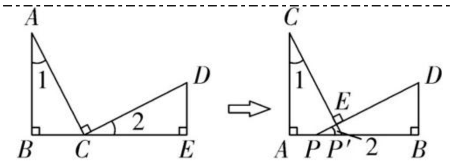
六个全等模型



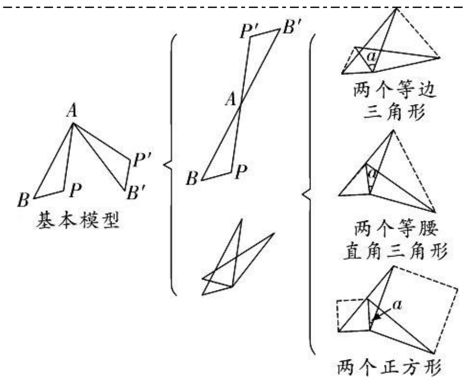
锐角一线三等角



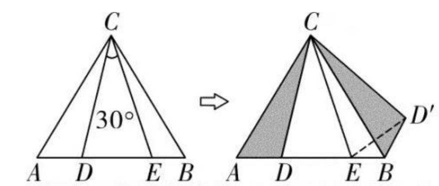
钝角一线三等角



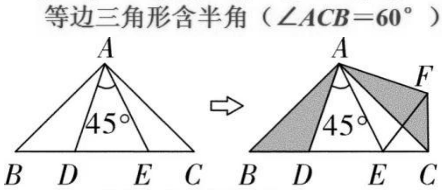
直角一线三等角



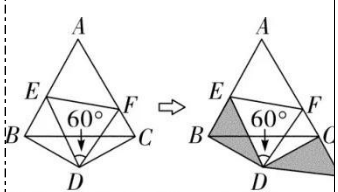
手拉手模型



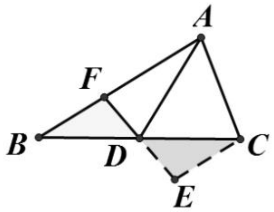
等边三角形含半角（∠ACB=60°）



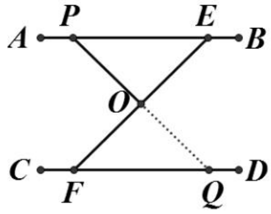
等腰直角三角形含半角



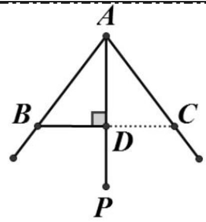
等边三角形含半角（∠BDC=120



倍长中线模型



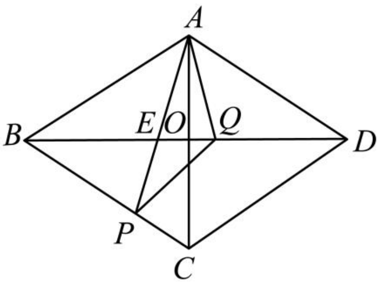
平行线中等模型

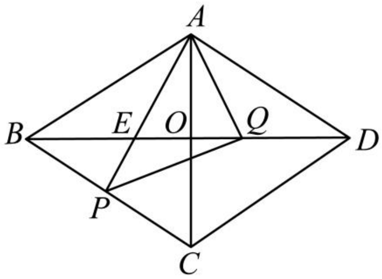


雨伞模型

【典例分析】

例1．（2023·内蒙古·中考真题）如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC,BD相交于点O，点P,Q分别是边BC，线段OD上的点，连接AP,QP,AP与OB相交于点E．





(1)如图1，连接QA．当$QA=QP$时，试判断点Q是否在线段PC的垂直平分线上，并说明理由；

(2)如图2，若$\angle APB=90°$，且$\angle BAP=\angle ADB$，

①求证：$AE=2EP$；

②当$OQ=OE$时，设$EP=a$，求PQ的长（用含a的代数式表示）．

【答案】(1)点Q在线段PC的垂直平分线上(2)①证明见解析，②$PQ=\sqrt{7}a$

【分析】（1）根据菱形的性质及垂直平分线的判定证明即可；

（2）①根据菱形的性质得出$AB=BC=CD=DA$，再由各角之间的关系得出$\angle BAP=\angle ABD=\angle CBD=30°$，由含30度角的直角三角形的性质求解即可；③连接$QC$．利用等边三角形的判定和性质得出$AE=2a,AP=3a$，再由正切函数及全等三角形的判定和性质及勾股定理求解即可．

【详解】（1）解：如图，点Q在线段PC的垂直平分线上．

理由如下：连接QC．

∵四边形$ABCD$是菱形，对角线AC,BD相交于点O，

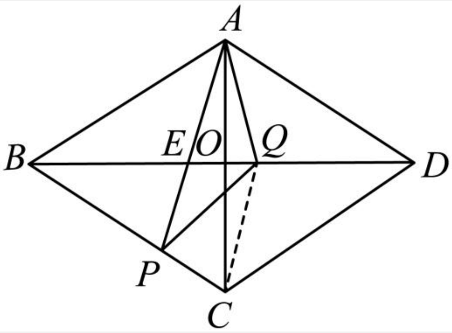
∴$BD\perp AC,OA=OC$

$\therefore QA = QC$.

$\because QA = QP$,

$\therefore QC = QP$,

∴点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上.



（2）①证明：如图，∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD = DA$，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$， $\angle CBD = \angle CDB$，

$\because BD \perp AC$，

$\therefore \angle ADO = \angle CDO$，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle ADO$.

$\because \angle BAP = \angle ADB$，

$\therefore \angle BAP = \angle ABD = \angle CBD$.

$\therefore AE = BE$，

$\because \angle APB = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAP + \angle ABP = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAP = \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$.

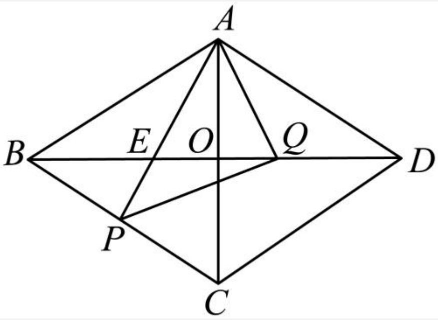
在 $\mathrm{Rt}\triangle BPE$ 中， $\because \angle EPB = 90^\circ, \angle PBE = 30^\circ$，

$\therefore EP = \frac{1}{2}BE$.

$\because AE = BE$.

$\therefore EP = \frac{1}{2}AE$,

$\therefore AE = 2EP$;



②如图，连接QC.

$\because AB = BC, \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore$ $\triangle ABC$是等边三角形.

$\because$ $\angle APB = 90^\circ$,

$\therefore$ $BP = CP$，$EP = a$,

$\therefore AE = 2a, AP = 3a$

在$\text{Rt}\triangle APB$中，$\angle APB = 90^\circ$,

$\because \tan\angle ABP = \frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore BP = \sqrt{3}a$.

$\therefore CP = BP = \sqrt{3}a$

$\because AO = CO$，$\angle AOE = \angle COQ, OE = OQ$,

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COQ$,

$\therefore AE = CQ = 2a, \angle EAO = \angle QCO$.

$\therefore AE \,//\, CQ$,

$\because \angle APB = 90^\circ$，

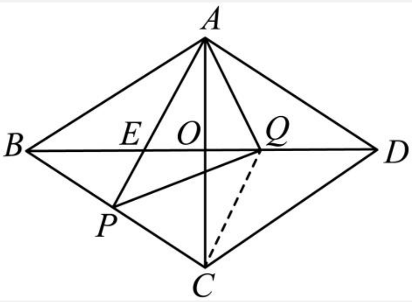
$\therefore \angle QCP = 90^\circ$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCQ$ 中，$\angle QCP = 90^\circ$，

由勾股定理得 $PQ^2 = PC^2 + CQ^2$，

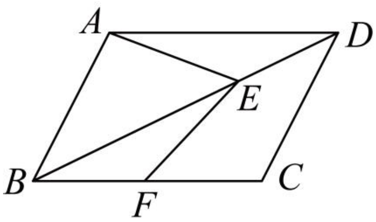
$\therefore PQ^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2 = 7a^2$

$\therefore PQ = \sqrt{7}a$．

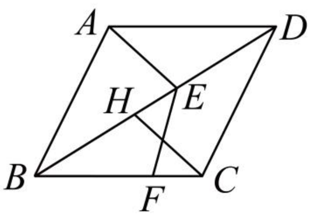


【点睛】题目主要考查菱形的性质，全等三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定和性质及解直角三角形，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键．

例 2．（2023·黑龙江哈尔滨·中考真题）已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在对角线 BD 上，点 F 在边 BC 上，连接 AE， EF， $DE = BF, BE = BC$．



图①



图②

(1)如图①，求证 $\triangle AED \cong \triangle EFB$；

(2)如图②，若 $AB = AD, AE \neq ED$，过点 C 作 $CH \parallel AE$ 交 BE 于点 H，在不添加任何轴助线的情况下，请直接写出图②中四个角（$\angle BAE$ 除外），使写出的每个角都与 $\angle BAE$ 相等．

【答案】(1)见解析；(2) $\angle BEA = \angle EFC = \angle DCH = \angle DHC = \angle BAE$，理由见解析．

【分析】（1）由平行四边形的性质得 $AD = BC = BE$， $BC // AD$，进而有 $\angle ADE = \angle EBF$，从而利用 SAS 即可证明结论成立；

（2）先证四边形 $ABCD$ 是菱形， 得 $AB=BC=BE=CD=AD$，又证 $\triangle ABE \cong \triangle CDH(\text{AAS})$，得 $\angle BAE=\angle DCH=\angle BEA=\angle DHC$，由（1）得 $\triangle AED \cong \triangle EFB(\text{SAS})$ 得 $\angle AED=\angle EFB$，根据等角的补角相等即可证明.

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $BE=BC$

∴ $AD=BC=BE$， $BC // AD$，

∴ $\angle ADE=\angle EBF$，

∵ $DE=BF, \angle ADE=\angle EBF$， $AD=BE$

∴ $\triangle AED \cong \triangle EFB(\text{SAS})$；

（2）解： $\angle BEA=\angle EFC=\angle DCH=\angle DHC=\angle BAE$，理由如下：

∵ $AB=AD$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴四边形 $ABCD$ 是菱形， $BC // AD$， $AB \parallel CD$

∴ $AB=BC=BE=CD=AD$， $\angle ADE=\angle EBF$， $\angle ABE=\angle CDH$，

∴ $\angle BEA=\angle BAE$，

∵ $CH // AE$，

∴ $\angle BEA=\angle DHC$，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDH(\text{AAS})$，

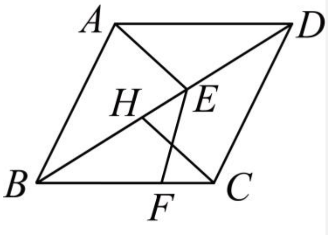
∴ $\angle BAE=\angle DCH=\angle BEA=\angle DHC$，

由（1）得 $\triangle AED \cong \triangle EFB(\text{SAS})$，

∴ $\angle AED=\angle EFB$，

∵ $\angle AED+\angle BEA=\angle EFB+\angle EFC=180^{\circ}$，

∴ $\angle BEA=\angle EFC=\angle DCH=\angle DHC=\angle BAE$．

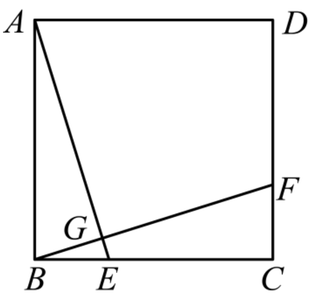


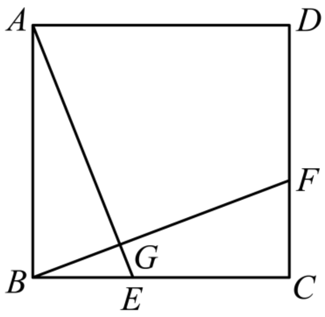
图②

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、菱形的判定及性质、等边对等角、全等三角形的判定及性质以及等角的补角相等．熟练掌握全等三角形的判定及性质是解题的关键．

【变式演练】

1．（2023·北京海淀·一模）如图，正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，$BE=CF$，AE，BF交于点G；





(1)$\angle AGF=$________．

(2)在线段AG上截取$MG=BG$，连接DM，$\angle AGF$的角平分线交DM于点N．

①依题意补全图形；

②用等式表示线段MN与ND的数量关系，并证明．

【答案】(1)$90°$ (2)①见解析；②$MN=ND$

【分析】本题考查正方形的性质和全等三角形的判定，等腰直角三角形性质和判定等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，合理作出辅助线．

（1）通过证明$\triangle ABE\cong\triangle BCF(\text{SAS})$，得出$\angle BAE=\angle CBF$，根据$\angle BAE+\angle AEB=90°$，得出$\angle CBF+\angle AEB=90°$，即可解答；

（2）①根据题意补全图形即可；②过点A作$AH\perp AE$，AH交GN延长线于点H，连接DH，先证明$\triangle BAG\cong\triangle DAH(\text{SAS})$，得出$BG=DH,\angle AHD=\angle AGB=90°$，则$GM=DH,\angle DHN=\angle NGM=45°$，再证明$\triangle HND\cong\triangle GNM(\text{AAS})$，即可得出结论$MN=ND$．

【详解】（1）解：∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AB = BC, \angle ABE = \angle BCF = 90^\circ$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle BCF \\ BE = CF \end{cases},$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle BCF(\text{SAS})$，

∴ $\angle BAE = \angle CBF$，

∵ $\angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$，

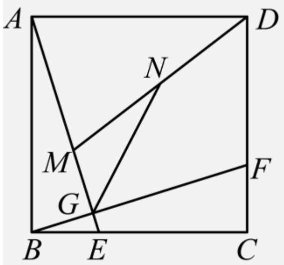
∴ $\angle CBF + \angle AEB = 90^\circ$，

∴ $\angle BGE = 90^\circ$，

∴ $\angle AGF = 90^\circ$，

故答案为：90°．

（2）解：①根据题意补全图形如图所示：



②证明：过点 A 作 $AH \perp AE$， AH 交 GN 延长线于点 H，连接 DH，

∵ $\angle AGF = 90^\circ$， GN 平分 $\angle AGF$，

∴ $\angle AGN = \frac{1}{2}\angle AGF = 45^\circ$，

∵ $AH \perp AE$，

∴ $\angle GAH = 90^\circ$，

$\therefore \angle AHG = \angle AGH = 45°$，

$\therefore AG = AH$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle BAD = 90°, AB = AD$，

$\because \angle GAH = 90°$，

$\therefore \angle BAG = \angle DAH$，

$\because AG = AH$， $\angle BAG = \angle DAH$， $AB = AD$，

$\therefore \triangle BAG \cong \triangle DAH(\text{SAS})$，

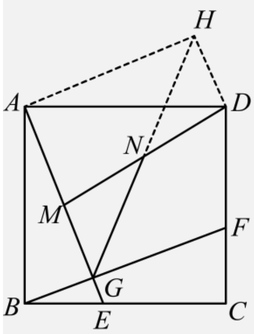
$\therefore BG = DH, \angle AHD = \angle AGB = 90°$，

$\because BG = GM$， $\angle AHG = 45°$，

$\therefore GM = DH, \angle DHN = \angle NGM = 45°$，

$\because \angle DHN = \angle NGM, \angle DNH = \angle MNG, GM = DH$， $\therefore \triangle HND \cong \triangle GNM(\text{AAS})$，

$\therefore MN = ND$．



2．（2023·山东泰安·三模）已知如图1，P 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 上任意一点，$BE \perp AP$ 于点 E，在 AP 的延长线上取点 F，使 $EF = AE$，连接 BF，$\angle CBF$ 的平分线交 AF 于点 G．

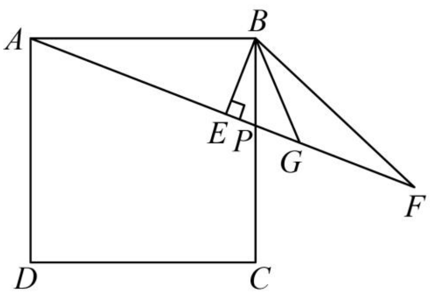


图 1

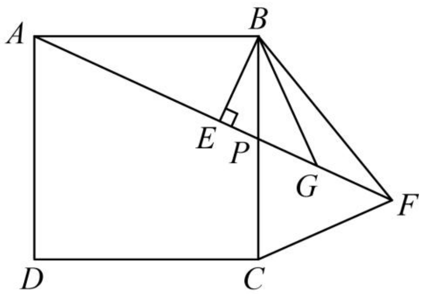


图 2

(1)求证：$BF = BC$；

(2)求证：$\triangle BEG$是等腰直角三角形；

(3)如图2，若正方形$ABCD$的边长为4，连接CF，当P点为BC的中点时，求CF的长．

【答案】(1)详见解析

(2)详见解析

(3)$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

【分析】（1）利用线段的垂直平分线的性质以及正方形的性质即可证明；

（2）想办法证明$\angle F = \angle BAF = \angle EBP$，由$\angle EBG = \angle EBP + \angle PBG$，$\angle EGB = \angle F + \angle GBF$，即可解决问题；

（3）等面积法求出BE，证明$\triangle CBG \cong \triangle FBG(\text{SAS})$得到$CG = FG$，证明$\triangle EBP \cong \triangle GCP$，即可推出$CG = BE$，$\angle CGP = \angle BEP = 90°$，由此即可解决问题．

【详解】（1）证明：Q $BE \perp AF$，$AE = EF$，

$\therefore BE$是线段AF的垂直平分线，

$\therefore AB = BF$，

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB = BC$，

$\therefore BF = BC$．

（2）证明：$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ABC = 90°$，

$\therefore \angle ABE + \angle EBP = 90^\circ$，

Q $BE \perp AF$，

$\therefore \angle ABE + \angle BAP = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAP = \angle EBP$，

$\because AB = BF$，

$\therefore \angle BAP = \angle BFP$，

$\therefore \angle EBP = \angle BFP$，

$\because \angle CBF$ 的平分线交 AF 于 G，

$\therefore \angle CBG = \angle FBG$，

$\therefore \angle EBP + \angle CBG = \angle BFP + \angle FBG$，

$\therefore \angle EBG = \angle EGB$，

又Q $BE \perp AF$，

$\therefore \triangle BEG$ 是等腰直角三角形.

（3）解：连接 CG .

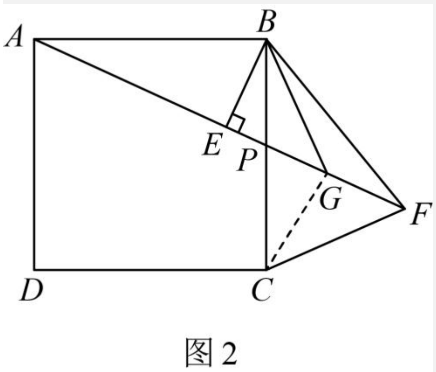


图 2

$\because P$ 是 BC 中点，正方形的边长为 4，

$\therefore AB = 4$， $BP = CP = 2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 中， $AP = \sqrt{BP^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$，

$\because BE \perp AP$，

$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times BE=\frac{1}{2}\times4\times2$，

$\therefore BE=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\because AB=BC$， $AB=BF$，

$\therefore BC=BF$，

$\angle CBG=\angle FBG$， $BG=BG$，

$\therefore\triangle CBG\cong\triangle FBG(\mathrm{SAS})$，

$\therefore\angle BFP=\angle BCG$， $CG=FG$，

由（2）可知$\angle EBP=\angle BFP$， $\therefore\angle EBP=\angle BCG$，

$\because\angle EPB=\angle CPG$， $\therefore\triangle EBP\cong\triangle GCP(\mathrm{ASA})$，

$\therefore CG=FG=BE=\frac{4\sqrt{5}}{5}$， $\angle CGP=\angle BEP=90^{\circ}$，

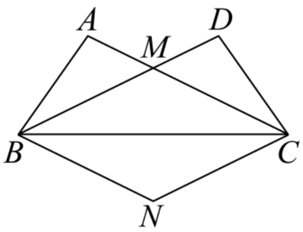
$\therefore\angle CGF=90^{\circ}$，

$\therefore CF=\sqrt{CG^{2}+FG^{2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

故答案为：$\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

【点睛】本题考查正方形的性质、全等三角形的判定和性质、线段的垂直平分线的性质、等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考压轴题.

3．（2022·湖南长沙·三模）如图，在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中， $AB=DC$， $AC=DB$， AC与DB交于点M．



(1)求证：$\triangle ABC\cong\triangle DCB$；

(2)将$\triangle BMC$关于BC所在直线翻折，得到$\triangle BNC$，试判断四边形$BNCM$的形状，并证明你的结论；

(3)若AC平分$\angle BCD$，$DM=1$，$BM=2$，求BC的长．

【答案】(1)见解析

(2)四边形$BNCM$的形状为菱形；理由见解析

(3) $BC=2\sqrt{3}$

【分析】（1）根据SSS直接证明$\triangle ABC\cong\triangle DCB$；

（2）根据$\triangle ABC\cong\triangle DCB$，可得$\angle ACB=\angle DBC$，进而可得$BM=CM$，根据翻折的性质可得：$BM=BN$，$CM=CN$，即可得出结论；

（3）连接MN交BC于点O，过点M作$MH\perp CD$交CD的延长线于点H．利用面积法证明$BC=2CD$，再利用全等三角形的性质证明$\angle CDM=90°$，$OM=DM=1$，再利用勾股定理求出OB即可．

【详解】（1）证明：如图，在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，

$$\because \begin{cases} AB=DC \\ AC=DB \\ BC=CB \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB(\text{SSS})$；

（2）四边形$BNCM$的形状为菱形；理由如下：

$\because \triangle ABC\cong\triangle DCB$，

$\therefore \angle ACB=\angle DBC$，

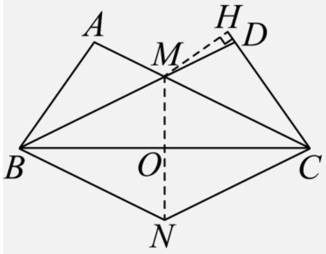
$\therefore BM=CM$，

根据翻折的性质可得：$BM=BN$，$CM=CN$

$\therefore BM=BN=CN=CM$，

$\therefore$四边形$BNCM$为菱形

（3）如图，连接MN交BC于点O，过点M作$MH\perp CD$交CD的延长线于点H．



$\because$ 四边形 $BNCM$ 是菱形，

$\therefore MN \perp CB$，

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$， $MH \perp CD$，

$\therefore MO = MH$，

$\because \dfrac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle CBM}} = \dfrac{\frac{1}{2}CD \times MH}{\frac{1}{2}CB \times MO} = \dfrac{DM}{BM} = \dfrac{1}{2}$， $\therefore BC = 2CD$，

$\because OB = OC$， $\therefore CO = CD$，

$\because \angle MCO = \angle MCD$， $CM = CM$， $\therefore \triangle MCO \cong \triangle MCD$（SAS），

$\therefore \angle MOC = \angle CDM = 90^\circ$，即点 D，点 H 重合， $\therefore MO = MD = 1$，

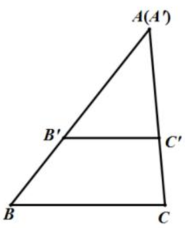
$\therefore OB = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

$\therefore BC = 2\sqrt{3}$．

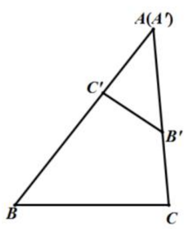
【点睛】本题考查了菱形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，角平分线的性质定理，勾股定理等知识，解题的关键是学会利用面积法解决问题．

题型 02 四边形与相似

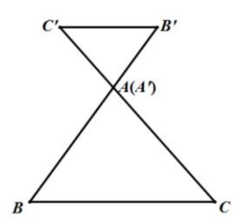
【解题策略】



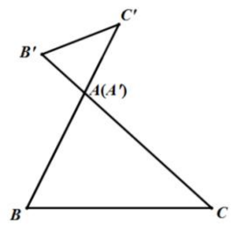
A 字型（平行）



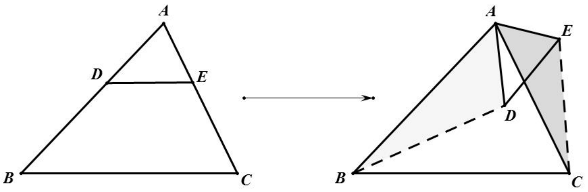
反 A 字型（不平行）



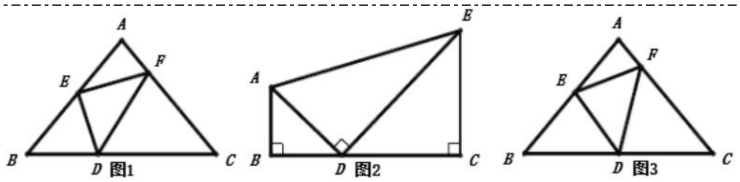
8 字模型



反 8 字模型



手拉手模型



一线三等角模型

【典例分析】

例．（2023·内蒙古·中考真题）已知正方形$ABCD$，E是对角线AC上一点．

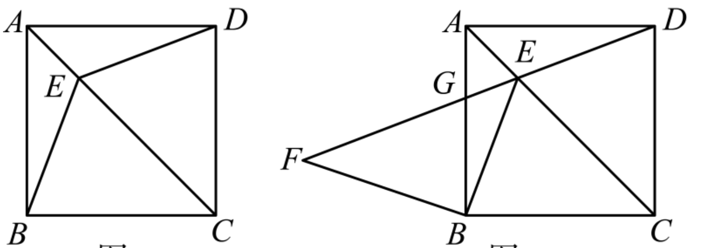


图1　　图2

(1)如图1，连接BE，DE．求证：$\triangle ABE\cong\triangle ADE$；

(2)如图2，F是DE延长线上一点，DF交AB于点G，$BF\perp BE$．判断$\triangle FBG$的形状并说明理由；

(3)在第（2）题的条件下，$BE=BF=2$．求$\frac{AE}{AB}$的值．

【答案】(1)见解析

(2)$\triangle FBG$是等腰三角形，理由见解析

(3)$\sqrt{2}-1$

【分析】（1）利用正方形的性质得出$AB=AD$，$\angle BAE=\angle DAE=45^\circ$，进而即可得到$\triangle ABE\cong\triangle ADE(\mathrm{SAS})$；

（2）先判断出$\angle AGD=\angle FGB$，进而判断出$\angle FGB=\angle FBG$，即可得到结论；

（3)先求出FG的长,可证明$\triangle FBE$是等腰直角三角形.从而得到EF的长,再利用$\angle BEF=\angle BAE=45^\circ$,$\angle ABE=\angle EBG$,可证得$\triangle ABE\sim\triangle EBG$，进而得到$\frac{AE}{AB}=\frac{EG}{BE}$，从而可得到答案.

【详解】（1）解：∵四边形$ABCD$是正方形，AC是对角线，

∴$AB=AD$，$\angle BAE=\angle DAE=45^\circ$，

在$\triangle ABE$和$\triangledown ADE$中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE \\ AE = AE \end{cases}$$

∴$\triangle ABE \cong \triangle ADE(\text{SAS})$.

（2）解：$\triangle FBG$是等腰三角形，理由如下：

∵$\triangle ABE \cong \triangle ADE$，

∴$\angle ABE = \angle ADE$，

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle DAG = 90°$，

∴$\angle ADE + \angle AGD = 90°$，

∵$\angle AGD = \angle FGB$，

∴$\angle ADE + \angle FGB = 90°$，

∵$FB \perp BE$，

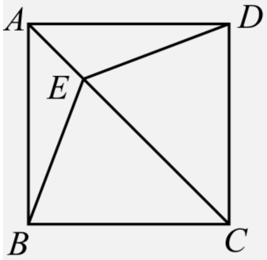
∴$\angle EBF = 90°$，

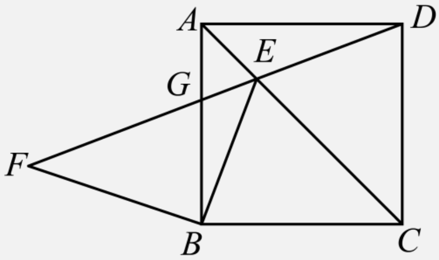
∴$\angle ABE + \angle FBG = 90°$，

∴$\angle FGB = \angle FBG$，

∴$BF = FG$，

∴$\triangle FBG$是等腰三角形.





（3）解：∵$BE = BF = 2$，$BF = FG$，

∴ $BE = BF = FG = 2$，

又∵ $FB \perp BE$，

∴ $\triangle FBE$ 是等腰直角三角形．

∴ $\angle BEF = \angle BAE = 45°$， $BF^2 + BE^2 = EF^2$，

∴ $EF^2 = 2^2 + 2^2 = 8$，

∴ $EF = 2\sqrt{2}$，

∴ $GE = 2\sqrt{2} - 2$，

∵ $\angle BEF = \angle BAE = 45°$， $\angle ABE = \angle EBG$，

∴ $\triangle ABE \sim \triangle EBG$，

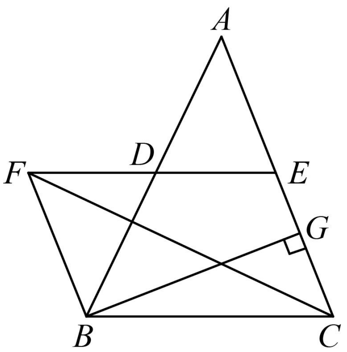
∴ $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EG}{BE}$，

∴ $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF - FG}{BE} = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$．

【点睛】本题考查四边形综合题，主要考查了正方形的性质，全等三角形，等腰三角形以及相似三角形，熟练掌握等腰三角形以及全等三角形的判定与性质是解题的关键．

【变式演练】

1．（22-23 浙江·模拟预测）在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB， AC 的中点，延长 ED 至点 F，使得 $DF = DE$，连接 BF．



(1)求证：四边形 $BCEF$ 是平行四边形．

(2) $BG \perp CE$ 于点 G，连接 CF，若 G 是 CE 的中点， $CF = 6$， $\tan\angle BCG = 3$，

①求 CG 的长．

②求平行四边形 $BCEF$ 的周长．

【答案】(1)见解析；(2)① $\sqrt{2}$；② $4\sqrt{5}+4\sqrt{2}$．

【分析】（1）根据三角形中位线定理证明 $EF\parallel BC$， $EF=BC$，进而可以解决问题；

（2）①设 BG 与 FC 交于点 H，设 $EG=CG=x$，则 $FB=EC=2x$，证明 $\triangle FBH\backsim\triangle CGH$，得 $\frac{FB}{CG}=\frac{FH}{HC}=\frac{BH}{GH}=\frac{2}{1}$，所以 $FH=4$， $HC=2$，由 $\tan\angle BCG=\frac{BG}{CG}=3$，得 $BG=3CG=3x$；证明 $\triangle GHC$ 是等腰直角三角形，再利用勾股定理求出 x 的值，进而可以解决问题；

②利用①中的结论，求出 BF、 BG，再利用勾股定理求出 BC，最后利用平行四边形的性质即可得出答案．

【详解】（1）证明：∵D，E 分别是 AB， AC 的中点，

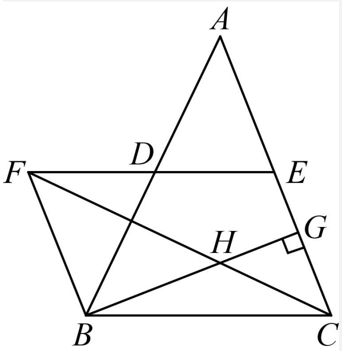
∴ $DE\parallel BC$， $DE=\frac{1}{2}BC$，

∵ $DF=DE=\frac{1}{2}EF$，

∴ $EF\parallel BC$， $EF=BC$，

∴四边形 $BCEF$ 是平行四边形；

（2）解：①设 BG 与 FC 交于点 H，



∵G 是 CE 的中点，

∴ $EC=2EG=2CG$，

∵四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

$\therefore FB=EC$， $EF=BC$， $FB /\!/ EC$，

设 $EG=CG=x$， 则 $FB=EC=2x$，

$\because FB /\!/ EC$，

$\therefore \angle FBH=\angle CGH$， $\angle BFH=\angle GCH$

$\therefore \triangle FBH \backsim \triangle CGH$，

$\therefore \dfrac{FB}{CG}=\dfrac{FH}{HC}=\dfrac{BH}{GH}=\dfrac{2}{1}$，

$\because FH+HC=CF=6$，

$\therefore FH=4$， $HC=2$，

$\because \tan\angle BCG=\dfrac{BG}{CG}=3$，

$\therefore BG=3CG=3x$，

$\because BH=2GH$， $BG=BH+GH$，

$\therefore BH=2x$， $GH=x$，

$\therefore GH=CG=x$，

$\because BG\perp CE$，

$\therefore \triangle GHC$ 是等腰直角三角形，

$\because HC=2$，

$\therefore GH=CG=x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}HC=\sqrt{2}$，

②由①知， $EG=CG=x=\sqrt{2}$，

$\therefore BG=3x=3\sqrt{2}$， $FB=EC=2x=2\sqrt{2}$

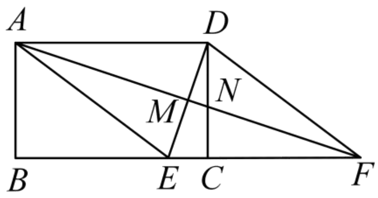
在 $\mathrm{Rt}\triangle BCG$ 中，根据勾股定理得：

$BC=\sqrt{BG^2+CG^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{5}$，

∴平行四边形 $BCEF$ 的周长 $=2\left(BC+FB\right)=2\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{5}+4\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定与性质，解直角三角形，勾股定理，等腰直角三角形的判定与性质，解决本题的关键是得到 $\triangle FBH\backsim\triangle CGH$.

2．（2024·陕西西安·模拟预测）如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，且 $\angle AED=\angle DEC$ ，延长 BC 至点 F，使 $CF=BE$，连接 AF，交 DE 、 DC 分别于 M、N.



(1)求证：四边形 $AEFD$ 为菱形；

(2)若 $BE:EC=4:1$ 且 $MN=2$，求 DN 的长度.

【答案】(1)见解析(2) $2\sqrt{10}$

【分析】（1）先证明四边形 $AEFD$ 是平行四边形，再证明 $AE=AD$，即可由菱形的判定得出结论；

（2）设 $EC=k$，则 $BE=4k$， $AD=BC=5k$，再由菱形的性质得 $AE=AD=5k$，然后根据勾股定理求得 $CD=AB=3k$，由勾股定理，得 $DE=\sqrt{10}k$，最后证明 $\triangle DMN\backsim\triangle DCE$，得 $\dfrac{DN}{DE}=\dfrac{MN}{CE}$，即 $\dfrac{DN}{\sqrt{10}k}=\dfrac{2}{k}$，即可求解.

【详解】（1）证明：∵矩形 $ABCD$，

∴ $AD=BC$， $AB=CD$， $AD\parallel BC$，

∴ $AD\parallel EF$，

∵ $BE=CF$， $BC=BE+EC$， $EF=EC+CF$，

∴ $BC=EF$，

∴ $AD=EF$，

∴四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∵ $AD\parallel EF$，

∴ $\angle ADE=\angle DEC$，

∵ $\angle AED=\angle DEC$ ，

∴ $\angle ADE=\angle AED$ ，

∴ $AE=AD$ ，

∴四边形 $AEFD$ 是菱形.

（2）解：∵ $BE:EC=4:1$ ，

∴设 $EC=k$ ，则 $BE=4k$ ，$AD=BC=5k$ ，

∵四边形 $AEFD$ 是菱形，

∴ $AE=AD=5k$ ，

∵矩形 $ABCD$ ，

∴ $\angle BCD=\angle B=90^\circ$ ，

由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=3k$ ，

∴ $CD=AB=3k$ ，

由勾股定理，得 $DE=\sqrt{EC^2+CD^2}=\sqrt{10}k$ ，

∵四边形 $AEFD$ 是菱形，

∴ $AF\perp DE$ ，

∴ $\angle DMN=90^\circ$ ，

∴ $\angle DMN=\angle ECD$ ，

∵ $\angle MDN=\angle CDE$ ，

∴ $\triangle DMN\backsim\triangle DCE$ ，

∴ $\dfrac{DN}{DE}=\dfrac{MN}{CE}$ ，

∴ $\dfrac{DN}{\sqrt{10}k}=\dfrac{2}{k}$ ，

∴ $DN=2\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查矩形的性质，菱形的判定与性质，等腰三角形的判定，勾股定理，相似三角形的判定与性质．（1）证明四边形 $AEFD$ 是平行四边形，（2）证明 $\triangle DMN \backsim \triangle DCE$ 是解题的关键．

3．（2022·湖北武汉·模拟预测）【基础巩固】（1）如图 1，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC = \angle ACD$，$\angle B = \angle D$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

【灵活运用】（2）如图 2，▱ $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 AB，BC 上，$\angle EDF = \angle BAC$，$EF \parallel AC$，EF 的延长线交 DC 的延长线于点 G，若 $EF = 3$，$DE = 4$，求 AC 的长．

【拓展提高】（3）如图 3，矩形 $ABCD$ 中，$AB = 2$，$BC = 4$，点 E，F 分别在边 AB，BC 上，$\tan\angle EDF = 2$，$EF \parallel AC$，求 AE 的长度．

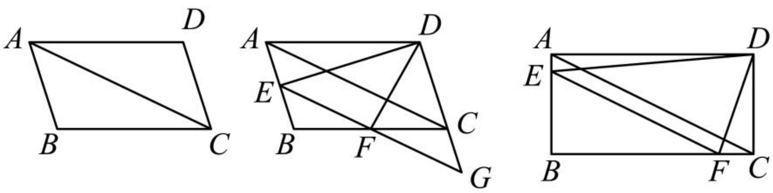


图1　　图2　　图3

【答案】（1）见解析；（2）$AC = \dfrac{16}{3}$；（3）AE 的长度为 $\sqrt{29} - 5$

【分析】（1）易得 $AB \parallel CD$，再证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA(\mathrm{AAS})$，得 $AB = CD$，即可作答；

（2）易得四边形 $AEGC$ 是平行四边形，再证明 $\triangle EDF \backsim \triangle EGD$，得 $EG = \dfrac{DE^2}{EF} = \dfrac{16}{3}$，即可作答；

（3）如图，延长 EF，DC 相交于点 P，易得四边形 $AEPC$ 是平行四边形，然后在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB = 2$，$BC = 4$，得 $\tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AB} = 2$，结合 $\tan\angle EDF = 2$，所以 $\angle EDF = \angle BAC = \angle P$，证明 $\triangle EDF \backsim \triangle EPD$，则 $DE^2 = EF \cdot EP$，根据勾股定理，即可作答．

【详解】（1）证明：∵ $\angle BAC = \angle ACD$，

∴ $AB \parallel CD$．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，$\angle BAC = \angle ACD$，$\angle B = \angle D$，$AC = CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA(\mathrm{AAS})$

∴ $AB = CD$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AE// CG$.

∵ $EF// AC$ ，

∴四边形 $AEGC$ 是平行四边形，

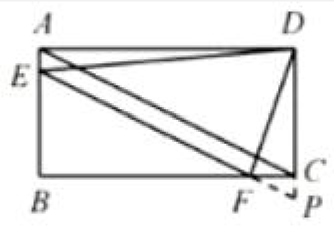
∴ $\angle BAC=\angle G$ ， $EG=AC$.

∵ $\angle EDF=\angle BAC$ ， ∴ $\angle EDF=\angle G$.

∵ $\angle DEF=\angle GED$ ， ∴ $\triangle EDF\backsim\triangle EGD$ ， ∴ $\dfrac{DE}{EG}=\dfrac{EF}{DE}$ ，

∴ $EG=\dfrac{DE^2}{EF}=\dfrac{16}{3}$ ， ∴ $AC=\dfrac{16}{3}$.

（3）如图，延长 EF ， DC 相交于点 P，



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB // CD$ ， $\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=90°$.

∵ $EF// AC$ ， ∴四边形 $AEPC$ 是平行四边形， ∴ $\angle BAC=\angle P$ ， $EP=AC$ ， $AE=CP$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=2$ ， $BC=4$ ， ∴ $\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=2$.

∵ $\tan\angle EDF=2$ ， ∴ $\angle EDF=\angle BAC=\angle P$.

∵ $\angle DEF=\angle PED$ ， ∴ $\triangle EDF\backsim\triangle EPD$ ， ∴ $\dfrac{DE}{EP}=\dfrac{EF}{DE}$ ， ∴ $DE^2=EF\cdot EP$.

∵ $\tan\angle P=\dfrac{FC}{CP}=2$ ， ∴设 $CP=x$， 则 $FC=2x$ ， $FP=\sqrt{5}x$.

∵ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{5}$ ， ∴ $DE^2=EF\cdot EP=2\sqrt{5}\times\left(2\sqrt{5}-\sqrt{5}x\right)=20-10x$.

∵在Rt△AED中，$DE^2=AD^2+AE^2=16+x^2$，∴$16+x^2=20-10x$，

∴$x_1=\sqrt{29}-5$，$x_2=-\sqrt{29}-5<0$（舍去），∴$x=\sqrt{29}-5$，

∴ AE的长度为$\sqrt{29}-5$．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质与判定、矩形性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形以及勾股定理等知识内容，难度适中，综合性较强，正确掌握相关性质内容是解题的关键．

4．(2022·安徽·模拟预测)如图1，E是正方形$ABCD$的边BC上一个动点，连接DE,$\angle DEC$的平分线EM交DC于点M，直线$MN\perp DE$于点N，交AB于点G，交BC的延长线于点F，连接EG,CN．

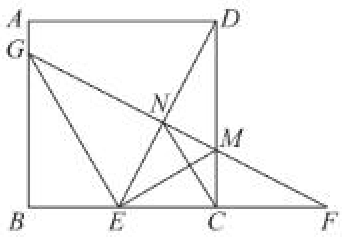


图1

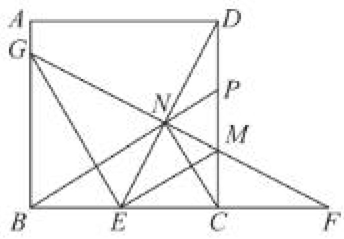


图2

(1)求证：$FN=AB$．

(2)如图2，若$NC\parallel GE$，连接BN并延长，交CD于点P．

①求证：$BE=CE$；

②求$\dfrac{CP}{CD}$的值．

【答案】(1)见解析(2)①见解析；②$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【分析】本题考查相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，正方形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质和全等三角形的判定与性质是解题的关键，（1）根据正方形的性质和角平分线的性质可得$\triangle EMN\cong\triangle EMC$和$\triangle DEC\cong\triangle FEN$即可求证$FN=AB$；（2）①利用（1）的结论和$NC\parallel GE$，可证明$\triangle GEN\cong\triangle GEB$进而得证；②延长$CN$交$AD$于点$Q$．利用①的结论和$\angle PBC+\angle BPC=90°$可得$\angle PBC=\angle PCN=\angle BNE$进而证明$\triangle BCP\cong\triangle CDQ$，$\triangle ECN\backsim\triangle DQN$和$\triangle DNP\backsim\triangle DCN$，从而得出$DN^2=CD\cdot DP$，设$CD=1,CP=x$，根据等量关系建立方程即可求解．

【详解】（1）（1）如图1，∵四边形$ABCD$是正方形．

$\because MN\perp DE,\therefore\angle ENF=\angle DCE=90°.$

$\because EM$ 平分 $\angle DEC$， $\therefore \angle DEM = \angle CEM$，

$\because EM = EM, \therefore \triangle EMN \cong \triangle EMC, \therefore EN = CE$，

又 $\because \angle DEC = \angle FEN,$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle FEN$， $\therefore CD = FN, \therefore FN = AB$.

（2）解：由（1）知 $EN = CE, \therefore \angle ENC = \angle ECN$.

$\because NC // GE, \therefore \angle GEN = \angle ENC, \angle GEB = \angle ECN$， $\therefore \angle GEN = \angle GEB$.

$\because \angle ABE = \angle GNE = 90°, GE = GE, \therefore \triangle GEN \cong \triangle GEB,$

$\therefore BE = EN, \therefore BE = CE$.

②延长 CN 交 AD 于点 Q，

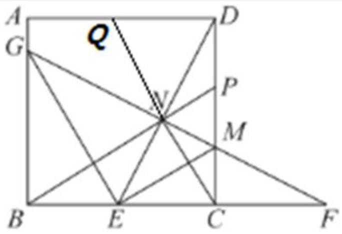


图2

由①知 $BE = EN = CE$，

$\therefore \angle EBN = \angle BNE, \angle ENC = \angle ECN$，

$\therefore \angle BNC = \angle BNE + \angle ENC = 90°$，

$\therefore \angle PCN + \angle BPC = 90°$.

$\because \angle PBC + \angle BPC = 90°$，

$\therefore \angle PBC = \angle PCN = \angle BNE$.

又 $\because \angle BCD = \angle CDA = 90°, BC = CD$，

$\therefore \triangle BCP \cong \triangle CDQ, \therefore CP = DQ$.

$\because AD // BC,$