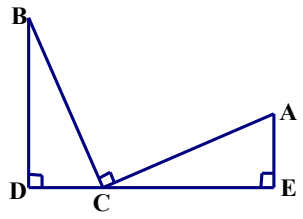
难关必刷 02 全等三角形综合（5 种解题模型专练）

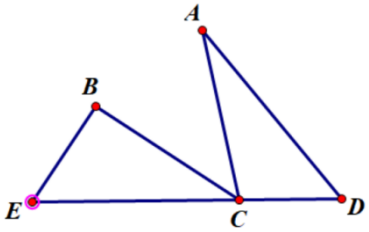
【模型梳理】

模型一：一线三等角



图一

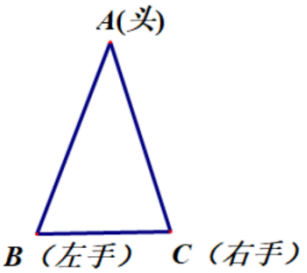
如图一，∠D=∠BCA=∠E=90°，BC=AC。　　结论：Rt△BDC≌Rt△CEA



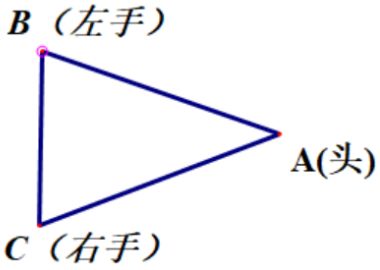
图二

如图二，∠D=∠BCA=∠E，BC=AC。　　结论：△BEC≌△CDA

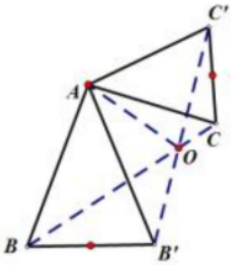
模型二：“手拉手”旋转模型



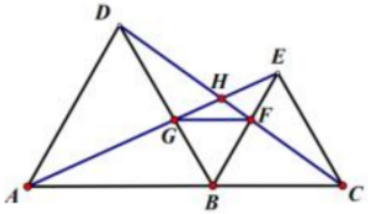
图一



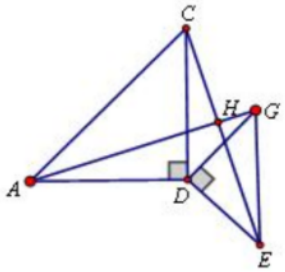
图二



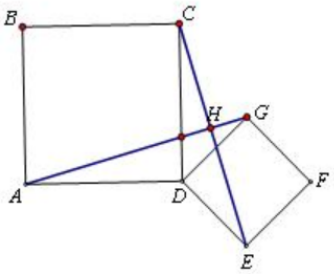
图三



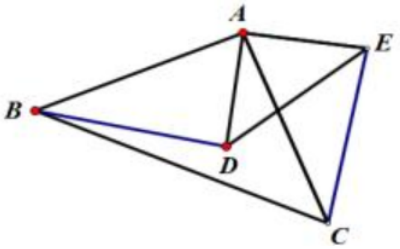
图四



图五



图六

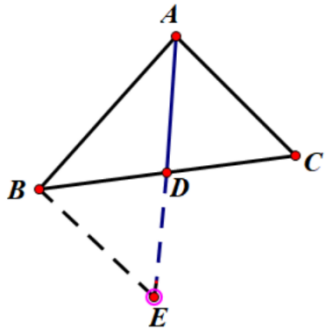


图七

模型三：截长补短

有一类几何题其命题主要证明三条线段长段的“和”或“差”及其比例关系，这一类题目一般可以采取“截长”或“补短”的方法来进行求解。所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段与已经线段相等，然后证明其中的另一段与已知的另一段的大小关系。所谓“补短”，就是将一个已知的较短的线段延长至与另一个已知的较短的长度相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段关系。有的是采取截长补短后，使之构成某种特定的三角形进行求解。

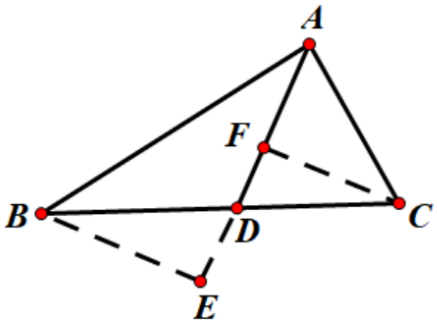
模型四：倍长中线



图一

方法一：直接倍长法：

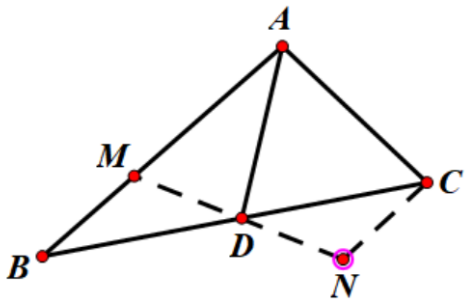
如图一，在ΔABC中，D为BC中点，连接AD并延长至E，使AD=ED，连接BE，则$\Delta ADC \cong \Delta EDB(\text{SAS})$



图二

方法二：间接倍长法（1）：

如图二，在ΔABC中，D为BC中点，过点B、C作BE、CF垂直于AD，垂足分别为E、F，则$\Delta BED \cong \Delta CFD(\text{AAS})$



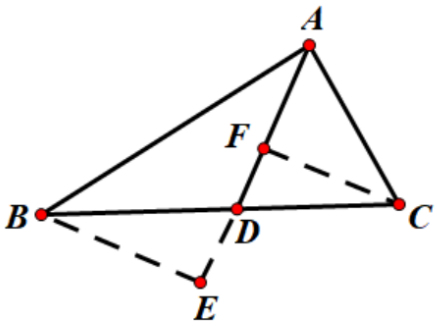
图三

方法二：间接倍长法（2）：

如图三，在ΔABC中，D为BC中点，M为AB上一点，连接MD并延长至点N，使DN=DM，连接CN，则$\Delta MDB \cong \Delta NDC(\text{SAS})$

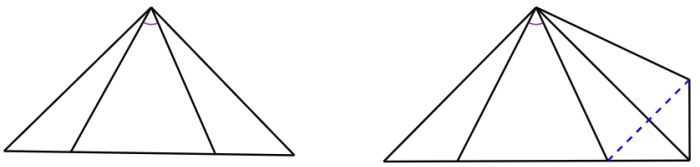
3、过端点向中线作垂线

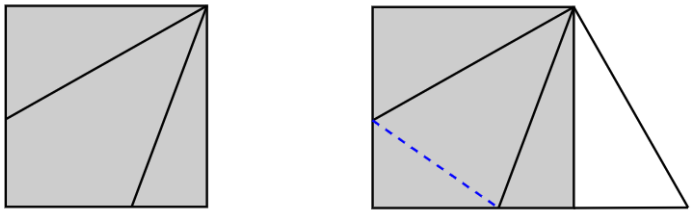
基本图形：如下图，在ΔABC中，D为BC中点，过点B、C作BE、CF垂直于AD，垂足分别为E、F，则$\Delta BED \cong \Delta CFD(\text{AAS})$



模型五：半角模型

过等腰三角形顶点 两条射线，使两条射线的夹角为等腰三角形顶角的一半这样的模型称为半角模型。





常见的图形为正方形，正三角形，等腰直角三角形等，解题思路一般是将半角两边的三角形通过旋转到一边合并成新的三角形，从而进行等量代换，然后证明与半角形成的三角形全等，再通过全等的性质得到线

段之间的数量关系。

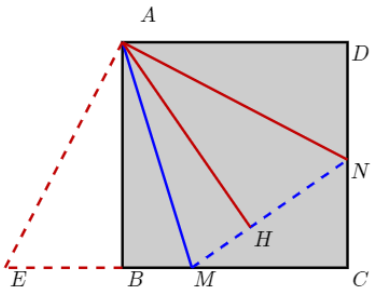


图1

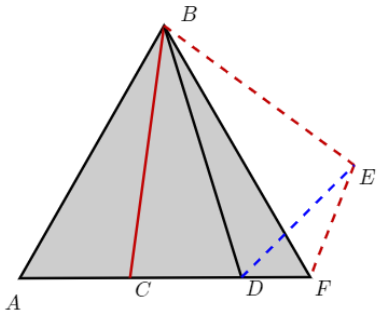


图2

解题技巧：

在图 1 中，△AEB 由△AND 旋转所得，可得△AEM≌△AMN，

∴BM+DN=MN，AMB=∠AMN，B=AH

△CMN 的周长等于正方形周长的一半

在图 2 中将△ABC 旋转至△BEF，易得△BED≌△BCD 同理得到边角之间的关系；

总之：半角模型（题中出现角度之间的半角关系）利用旋转——证全等——得到相关结论.

【题型专练】

模型一：一线三等角

一．解答题（共 7 小题）

1．（2022 秋•孝昌县期中）已知，在平面直角坐标系中，A，B 两点的坐标分别为点 A（3，0），点 B（0，b），将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 α° 得到 AC，连接 BC．若 α＝90．

（1）如图 1，b＝1，求点 C 的坐标；

（2）如图 2，若 D 为 BC 中点，连接 OD．求证：OD 平分∠AOB．

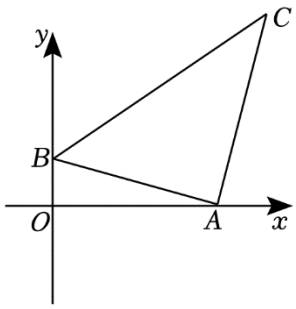


图1

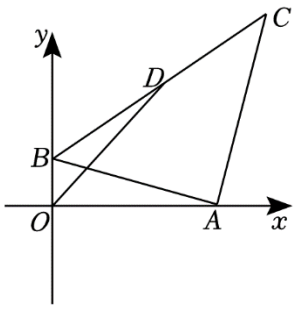


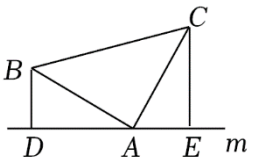
图2

2．（2022 秋•浠水县期中）已知，在△ABC 中，AB＝AC，D，A，E 三点都在直线 m 上，且 DE＝9cm，∠BDA＝∠AEC＝∠BAC

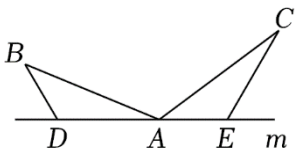
（1）如图①，若 $AB\perp AC$，则 BD 与 AE 的数量关系为 _____，CE 与 AD 的数量关系为 _____；

（2）如图②，判断并说明线段 BD，CE 与 DE 的数量关系；

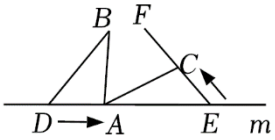
（3）如图③，若只保持$\angle BDA=\angle AEC$，$BD=EF=7cm$，点 A 在线段 DE 上以 $2cm/s$ 的速度由点 D 向点 E 运动，同时，点 C 在线段 EF 上以 xcm/s 的速度由点 E 向点 F 运动，它们运动的时间为 t（s）．是否存在 x，使得$\triangle ABD$ 与$\triangle EAC$ 全等？若存在，求出相应的 t 的值；若不存在，请说明理由．



图①



图②



图③

3．（2022 秋•和平区校级期中）在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线 MN 经过点 C，且 $AD\perp MN$ 于 D，$BE\perp MN$ 于 E．

（1）当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时，

求证：①$\triangle ADC\cong\triangle CEB$；

②$DE=AD+BE$；

（2）当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时，（1）中的结论还成立吗？若成立，请给出证明；若不成立，说明理由．

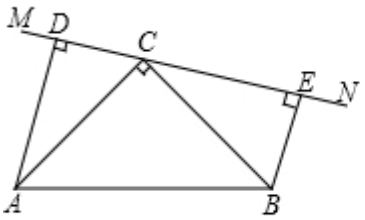


图1

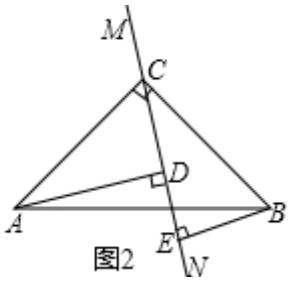


图2

4．（2022 秋•岳阳楼区校级期中）在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线 MN 经过点 C，且 $AD\perp MN$ 于 D，$BE\perp MN$ 于 E．

（1）当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时，求证：①$\triangle ADC\cong\triangle CEB$；②$DE=AD+BE$；

（2）当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时，直接写出 DE、AD、BE 的关系为：_____

（3）当直线 MN 绕点 C 旋转到图 3 的位置时，试问 DE、AD、BE 具有怎样的等量关系？请写出这个等量关系，并加以证明.

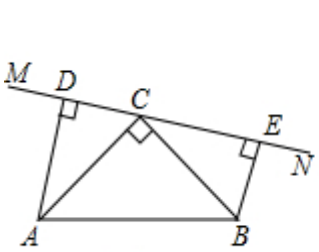


图1

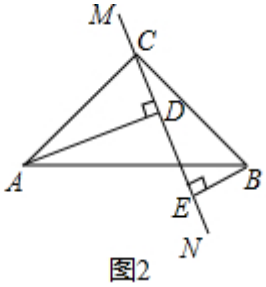


图2

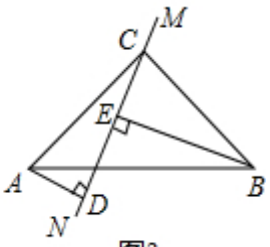


图3

5.（2022 秋•沙洋县期中）阅读理解，自主探究：

“一线三垂直”模型是“一线三等角”模型的特殊情况，即三个等角角度为 90°，于是有三组边相互垂直．所以称为“一线三垂直模型”．当模型中有一组对应边长相等时，则模型中必定存在全等三角形．

（1）问题解决：如图 1，在等腰直角△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，过点 C 作直线 DE，$AD\perp DE$ 于 D，$BE\perp DE$ 于 E，求证：△$ADC\cong$△CEB；

（2）问题探究：如图 2，在等腰直角△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，过点 C 作直线 CE，$AD\perp CE$ 于 D，$BE\perp CE$ 于 E，$AD=2.5cm$，$DE=1.7cm$，求 BE 的长；

（3）拓展延伸：如图 3，在平面直角坐标系中，A（﹣1，0），C（1，3），△ABC 为等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，求 B 点坐标.

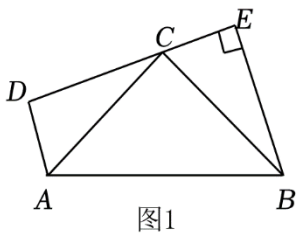


图1

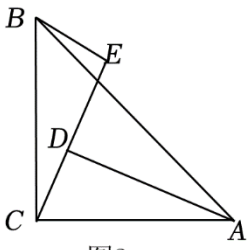


图2

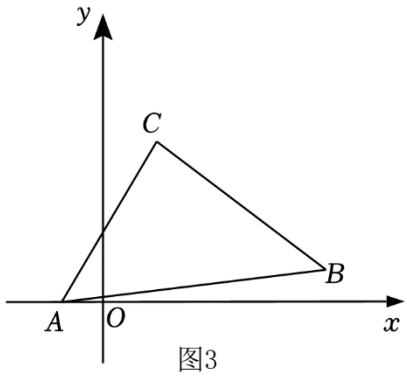


图3

6.（2022 秋•罗山县期中）【感知模型】“一线三等角”模型是平面几何图形中的重要模型之一，请根据以下问题，把你的感知填写出来：

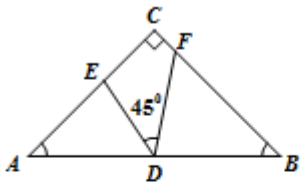


图 1

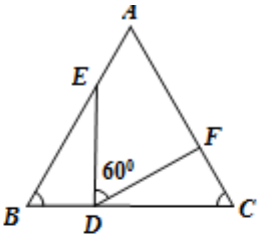


图 2

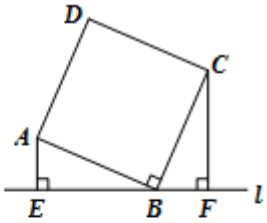


图 3

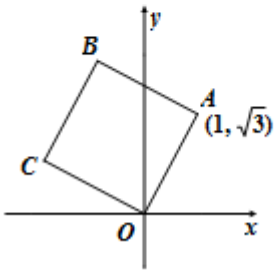


图 4

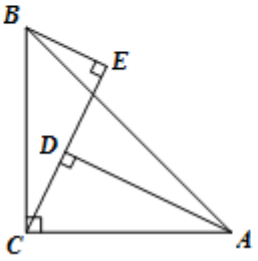


图 5

①如图 1，△*ABC* 是等腰直角三角形，∠*C*＝90^o，点 *D* 为 *AB* 中点，则△*AED*∽_____；

②如图 2，△*ABC* 为正三角形，*BD*＝*CF*，∠*EDF*＝60°，则△*BDE*≌_____；

③如图 3，正方形 *ABCD* 的顶点 *B* 在直线 *l* 上，分别过点 *A*、*C* 作 *AE*⊥*l* 于 *E*，*CF*⊥*l* 于 *F*．若 *AE*＝1，*CF*＝2，则 *EF* 的长为 _____.

【模型应用】

（2）如图 4，将正方形 *OABC* 放在平面直角坐标系中，点 *O* 为原点，点 *A* 的坐标为（1，$\sqrt{3}$），则点 *C* 的坐标为 _____.

【模型变式】

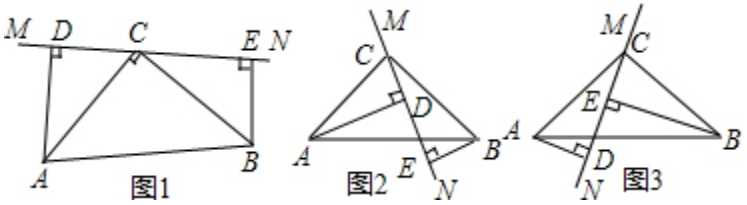
（3）如图 5 所示，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*，*BE*⊥*CE* 于 *E*，*AD*⊥*CD* 于 *D*，*DE*＝4*cm*，*AD*＝6*cm*，求 *BE* 的长.

7．（2022 秋•永年区期中）在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*，直线 *MN* 经过点 *C*，且 *AD*⊥*MN* 于 *D*，*BE*⊥*MN* 于 *E*，

（1）当直线 *MN* 绕点 *C* 旋转到图（1）的位置时，显然有：*DE*＝*AD*+*BE*；

（2）当直线 MN 绕点 C 旋转到图（2）的位置时，求证：$DE=AD-BE$；

（3）当直线 MN 绕点 C 旋转到图（3）的位置时，试问 DE、AD、BE 具有怎样的等量关系？请直接写出这个等量关系．



模型二：“手拉手”旋转模型

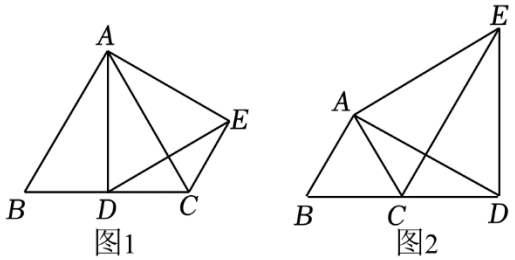
一．解答题（共 15 小题）

1．（2022 秋•谷城县期中）已知：如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$AB=6$，点 D 是直线 BC 上一点，连接 AD，以 AD 为边作等边$\triangle ADE$，连接 CE．

（1）如图 1，当点 D 在线段 BC 的中点时，$CE=$_____；

（2）如图 2，当点 D 在 BC 的延长线上时，求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$．

（3）在（2）的条件下探索 AC，CD，CE 三条线段的长度有何关系？并说明理由．



2．（2022 秋•德江县期中）如图 1，$\triangle ACB$ 和$\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A，D，E 在同一直线上，连接 BE．

（1）求证：$AD=BE$；

（2）求$\angle AEB$ 的度数；

（3）如图 2，△*ACB* 和△*DCE* 均为等腰三角形，且∠*ACB*＝∠*DCE*＝90°，点 *A*，*D*，*E* 在同一直线上，*CM* 为△*DCE* 中 *DE* 边上的高，连接 *BE*，请判断∠*AEB* 的度数及线段 *CM*，*AE*，*BE* 之间的数量关系，并说明理由．

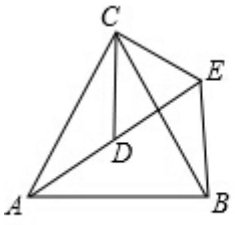


图1

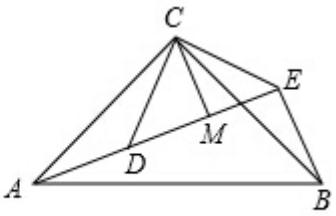


图2

3．（2022 秋•罗山县期中）小明同学发现这样一个规律：两个顶角相等的等腰三角形，如果具有公共的顶角的顶点，并把它们的底角顶点连接起来则形成一组全等的三角形，小明把具有这个规律的图形称为“手拉手”图形．

（1）问题发现：如图 1，若△*ABC* 和△*ADE* 均是顶角为 40°的等腰三角形，*BC*、*DE* 分别是底边，求

证：$BD=CE$；

（2）拓展探究：如图 2，若△ACB 和△DCE 均为等边三角形，点 A、D、E 在同一条直线上，连接 BE，则∠AEB 的度数为 _____；线段 BE 与 AD 之间的数量关系是 _____；

（3）解决问题：如图 3，若△ACB 和△DCE 均为等腰直角三角形，∠ACB＝∠DCE＝90°，点 A、D、E 在同一条直线上，CM 为△DCE 中 DE 边上的高，连接 BE，请判断∠AEB 的度数及线段 CM、AE、BE 之间的数量关系并说明理由．

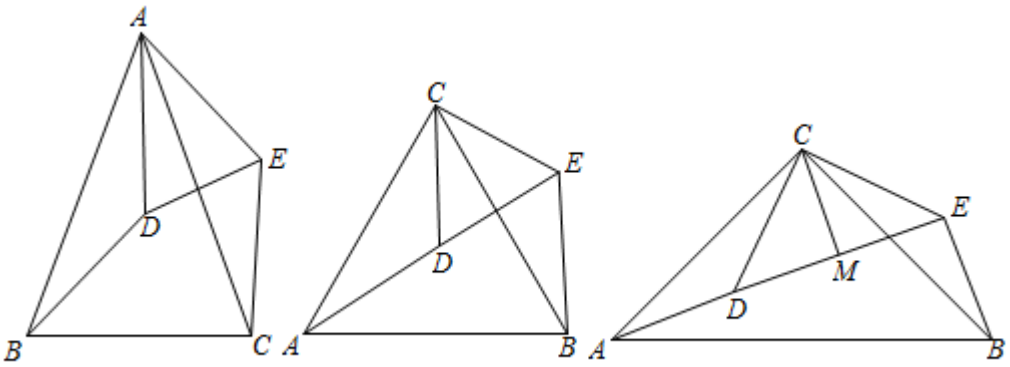


图1　　图2　　图3

4．（2022 秋•张湾区期中）如图，在平面直角坐标系中，点 C（3，0），点 A 在 y 轴正半轴上，点 B 在 x 轴负半轴上，$AB=AC$，点 D 是 x 轴上的一动点（点 D 不与 B、C 重合），∠CAB＝∠EAD＝90°，$AD=AE$，连接 CE．

（1）如图 1，直接写出点 A，B 的坐标；

（2）如图 2，当点 D 在边 BC 上时，求证：①$BC=CE+CD$，②$BC\perp CE$；

（3）当 $CD=5$ 时，求点 E 的坐标.

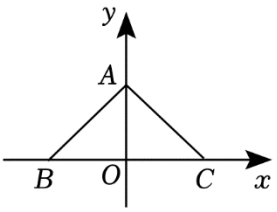


图1

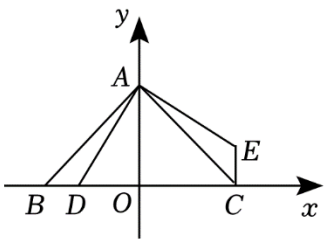
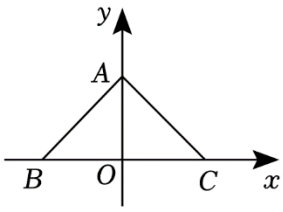


图2



备用图

5.（2022 秋•唐河县期中）感知：如图①，$\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，点 B 在线段 AD 上，点 C 在线段 AE 上，我们很容易得到 $BD=CE$，不需证明.

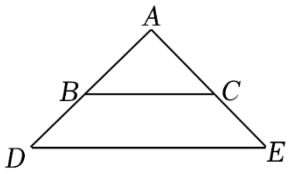
探究：如图②，将 $\triangle AED$ 绕点 A 逆时针旋转 α（$0<\alpha<90°$），连结 BD 和 CE，此时 $BD=CE$ 是否依然成立？若成立，写出证明过程；若不成立，说明理由.

应用：如图③，当 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转，使得点 D 落在 BC 的延长线上，连结 CE.

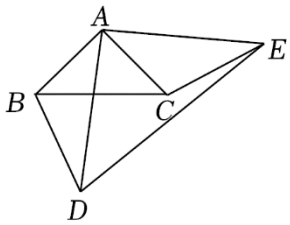
①$\angle ACE$ 的度数为 _____度；

②线段 BC、CD、CE 之间的数量关系是 _____；

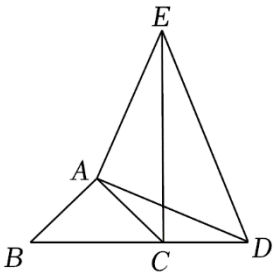
③若 $AB=AC=\sqrt{2}$，$CD=1$，则线段 DE 的长为 _____.



图①



图②



图③

6.（2022 秋•东海县期中）【问题呈现】在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB$，点 D 是斜边 AB 上的一点，连接 CD，试说明 AD、BD、CD 之间的数量关系，并说明理由.

【解决策略】小敏同学思考后是这样做的：将△CAD 绕点 C 逆时针旋转 90°，得到对应的△CBE，连接 DE，如图 1 经过推理使问题得到解决．请回答：

（1）△DBE 的形状是 _____，△DCE 的形状是 _____；

（2）直接写出 AD、BD、CD 之间的数量关系是 _____；

【方法感悟】在解决问题时，条件中若出现“等边三角形”、“等腰直角三角形”字样，可以考虑旋转某

个三角形，把分散的条件或结论集中到一起，从而使问题得到解决．

（3）如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=45°$，连接对角线 AC、BD，$\angle ADB=90°$，$AD=BD$，若 $CB=2$，$CD=4$，求 CA 的长；

（4）如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，$AB=AD$，若 $BC=5$，$CD=2$，求 A、C 两点之间的最大距离．

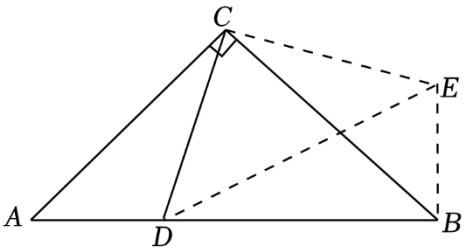


图1

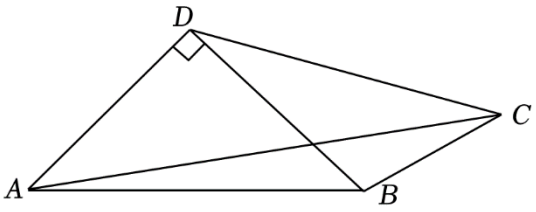


图2

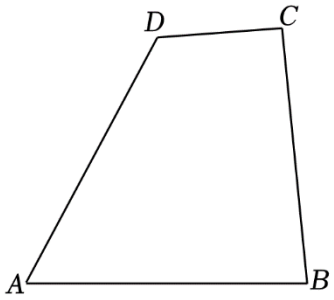


图3

7．（2022 秋•徐州期中）在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$．将一个含 45°角的直角三角尺 DEF 按图 1 所示放置，使直角三角尺的直角顶点 D 恰好落在 BC 边的中点处，将直角三角尺 DEF 绕点 D 旋转，设 AB 交 DF 于点 N，AC 交 DE 于点 M，示意图如图 2 所示．

（1）[证明推断]求证：$DN=DM$；小明给出的思路：若要证明 $DN=DM$，只需证明△BDN≌△ADM 即可，请你根据小明的思路完成证明过程；

（2）[延伸发现]连接 AE，BF，如图 3 所示，求证：$AE=BF$；

（3）[迁移应用]延长 EA 交 DF 于点 P，交 BF 于点 Q．在图 3 中完成如上作图过程，猜想并证明 AE 和 BF 的位置关系．

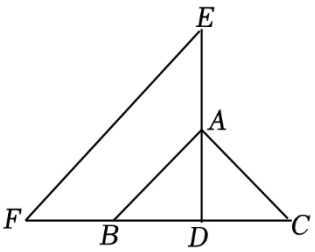


图1

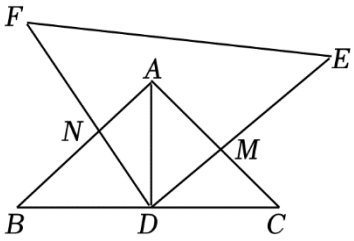


图2

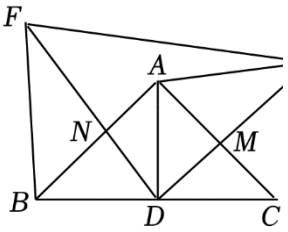


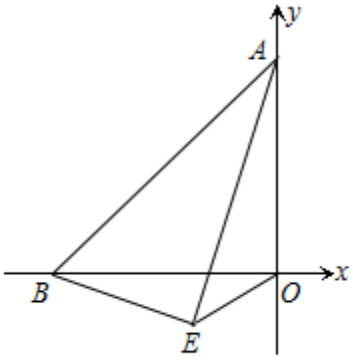
图3

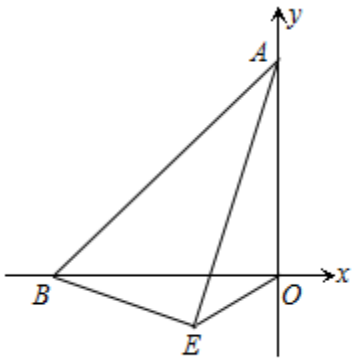
8．（2022 秋•来凤县校级期中）如图，在平面直角坐标系中，已知 A（0，a）、B（﹣b，0）且 a、b 满足 $\sqrt{a+b-4}+|a-2b+2|=0$.

（1）求 a，b 的值；

（2）求证：$\angle OAB=\angle OBA$；

（3）若 $BE\perp AE$，求 $\angle AEO$ 的度数．





备用图

9．（2022 秋•乾安县期中）（1）问题发现：如图 1，如果△*ACB* 和△*CDE* 均为等边三角形，点 *A*、*D*、*E* 在同一直线上，连接 *BE*．则 *AD* 与 *BE* 的数量关系为 _____；∠*AEB* 的度数为 _____度．

（2）拓展探究：如图 2，如果△*ACB* 和△*CDE* 均为等腰三角形，∠*ACB*＝∠*DCE*＝90°，点 *A*、*D*、*E* 在同一直线上，连接 *BE*，判断线段 *AE* 与 *BE* 的位置关系，并说明理由．

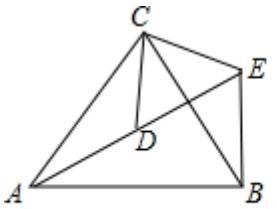


图1

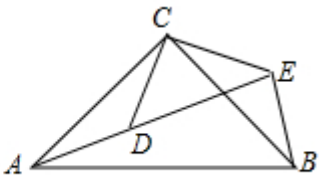


图2

10.（2022 秋•灵山县期中）综合实践

在学习全等三角形的知识时，数学兴趣小组发现这样一个模型：它是由两个共顶点且顶角相等的等腰三角形构成的，在相对位置变化的同时，始终存在一对全等三角形．兴趣小组成员经过研讨给出定义：如果两个等腰三角形的顶角相等，且顶角的顶点互相重合，则称此图形为“手拉手全等模型”．因为顶点相连的四条边，可以形象地看作两双手，所以通常称为“手拉手模型”，如图 1，△*ABC* 与△*ADE* 都是等腰

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/986242131200010202