

专题 15 利用导数解决单调问题

【考点预测】

知识点一：单调性基础问题

1、函数的单调性

函数单调性的判定方法：设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x) > 0$ ，则 $y = f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x) < 0$ ，则为减函数。

2、已知函数的单调性问题

①若 $f(x)$ 在某个区间上单调递增，则在该区间上有 $f'(x) \geq 0$ 恒成立（但不恒等于 0）；反之，要满足 $f'(x) > 0$ ，才能得出 $f(x)$ 在某个区间上单调递增；

②若 $f(x)$ 在某个区间上单调递减，则在该区间上有 $f'(x) \leq 0$ 恒成立（但不恒等于 0）；反之，要满足 $f'(x) < 0$ ，才能得出 $f(x)$ 在某个区间上单调递减。

知识点二：讨论单调区间问题

类型一：不含参数单调性讨论

(1) 求导化简定义域(化简应先通分，尽可能因式分解；定义域需要注意是否是连续的区间)；

(2) 变号保留定号去(变号部分：导函数中未知正负，需要单独讨论的部分。定号部分：已知恒正或恒负，无需单独讨论的部分)；

(3) 求根做图得结论(如能直接求出导函数等于 0 的根，并能做出导函数与 x 轴位置关系图，则导函数正负区间段已知，可直接得出结论)；

(4) 未得结论断正负(若不能通过第三步直接得出结论，则先观察导函数整体的正负)；

(5) 正负未知看零点(若导函数正负难判断，则观察导函数零点)；

(6) 一阶复杂求二阶(找到零点后仍难确定正负区间段，或一阶导函数无法观察出零点，则求二阶导)；

求二阶导往往需要构造新函数，令一阶导函数或一阶导函数中变号部分为新函数，对新函数再求导。

(7) 借助二阶定区间(通过二阶导正负判断一阶导函数的单调性，进而判断一阶导函数正负区间段)；

类型二：含参数单调性讨论

(1) 求导化简定义域(化简应先通分，然后能因式分解要进行因式分解，定义域需要注意是否是一个连续的区间)；

(2) 变号保留定号去(变号部分：导函数中未知正负，需要单独讨论的部分。定号部分：已知恒正或恒负，无需单独讨论的部分)；

(3) 恒正恒负先讨论(变号部分因为参数的取值恒正恒负)；然后再求有效根；

(4) 根的分布来定参(此处需要从两方面考虑：根是否在定义域内和多根之间的大小关系)；

(5) 导数图像定区间；

【方法技巧与总结】

1、求可导函数单调区间的一般步骤

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f'(x)$ ，令 $f'(x)=0$ ，解此方程，求出它在定义域内的一切实数；

(3) 把函数 $f(x)$ 的间断点（即 $f(x)$ 的无定义点）的横坐标和 $f'(x)=0$ 的各实根按由小到大的顺序排列起来，然后用这些点把函数 $f(x)$ 的定义域分成若干个子区间；

(4) 确定 $f'(x)$ 在各小区间内的符号，根据 $f'(x)$ 的符号判断函数 $f(x)$ 在每个相应小区间内的增减性.

注①使 $f'(x)=0$ 的离散点不影响函数的单调性，即当 $f'(x)$ 在某个区间内离散点处为零，在其余点处均为正（或负）时， $f(x)$ 在这个区间上仍旧是单调递增（或递减）的.例如，在 $(-\infty, +\infty)$ 上， $f(x)=x^3$ ，当 $x=0$ 时， $f'(x)=0$ ；当 $x \neq 0$ 时， $f'(x)>0$ ，而显然 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递增函数.

②若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增，则 $f'(x) \geq 0$ （ $f'(x)$ 不恒为 0），反之不成立.因为 $f'(x) \geq 0$ ，即 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)=0$ ，当 $f'(x)>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增.当 $f'(x)=0$ 时， $f(x)$ 在这个区间为常值函数；同理，若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减，则 $f'(x) \leq 0$ （ $f'(x)$ 不恒为 0），反之不成立.这说明在一个区间上函数的导数大于零，是这个函数在该区间上单调递增的充分不必要条件.于是有如下结论：

$$f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递增}; f(x) \text{ 单调递增} \Rightarrow f'(x) \geq 0;$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递减}; f(x) \text{ 单调递减} \Rightarrow f'(x) \leq 0.$$

【典例例题】

例 1. (2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\ln(x-2)+\ln(4-x)$ ，则 $f(x)$ 的单调递增区间为 ()

A. $(2,3)$

B. $(3,4)$

C. $(-\infty,3)$

D. $(3,+\infty)$

【答案】A

【解析】由 $\begin{cases} x-2>0 \\ 4-x>0 \end{cases}$ 得： $2<x<4$ ，即 $f(x)$ 的定义域为 $(2,4)$ ；

$$Q f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4-x} = \frac{2(3-x)}{(x-2)(4-x)},$$

$\therefore$ 当 $x \in (2,3)$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $x \in (3,4)$ 时， $f'(x)<0$ ；

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,3)$ 。

故选：A。

例 2. (2024·云南昆明·一模) 已知函数 $f(x)=e^x+e^{2-x}$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 为增函数

B. $f(x)$ 有两个零点

C. $f(x)$ 的最大值为 $2e$

D. $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

【答案】D

【解析】A: $f'(x) = e^x - e^{2-x}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$,

当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 错误;

B: 由选项 A 知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

且 $f(1) = 2e > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有零点, 故 B 错误;

C: 由选项 A 知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 2e$, 即函数 $f(x)$ 的最小值为 $2e$, 故 C 错误;

D: $f(2-x) = e^{2-x} + e^x = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x = 1$ 对称, 故 D 正确.

故选: D

例 3. (2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + m \ln x$ 在定义域内单调递增, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $(0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

【答案】B

【解析】Q $f(x) = x^2 - 2x + m \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在定义域内单调递增,

$\therefore f'(x) = 2x - 2 + \frac{m}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $m \geq -2x^2 + 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x) = -2x^2 + 2x = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} (x > 0)$,

$\therefore g(x)_{\max} = \frac{1}{2}$,

$\therefore m \geq \frac{1}{2}$,

即实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

故选: B

例 4. (2024·高三·北京·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{x-a} (a > 0)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 1$ 或 $a \geq 2$ B. $a \geq 2$ C. $a \geq 2$ 或 $a = 1$ D. $a \geq 1$

【答案】C

【解析】 $f'(x) = \frac{2x(x-a) - x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2} = \frac{x(x-2a)}{(x-a)^2}$,

$Q a > 0$, $\therefore$ 令 $f'(x) < 0$ 得: $0 < x < 2a$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2a)$, Q 函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

$\therefore 2 \leq 2a$, $\therefore a \geq 1$,

又 Q 函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上连续, $\therefore a \leq 1$ 或 $a \geq 2$,

$\therefore a \geq 2$ 或 $a = 1$.

故选: C.

例 5. (2024·江西上饶·一模) 已知函数 $f(x) = xe^x$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 的导函数为 $f'(x) = (x-1)e^x$ B. $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$ D. $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=2x$

【答案】C

【解析】A: $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, 因此本选项不正确;

B: 由上可知: $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$,

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 因此本选项不正确;

C: 由上可知: $f'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$, 因此本选项正确;

D: 由上可知 $f'(x) = (x+1)e^x$, 因为 $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$,

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x$, 因此本选项不正确,

故选: C

例 6. (2024·高三·河北·期末) 设函数 $f(x) = a^x - a \ln x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[e, +\infty)$ B. $[e^2, +\infty)$ C. $[2e, +\infty)$ D. $[e^e, +\infty)$

【答案】A

【解析】依题意, $f'(x) = a^x \ln a - \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

记 $g(x) = f'(x) = a^x \ln a - \frac{a}{x}$, 则 $g'(x) = a^x (\ln a)^2 + \frac{a}{x^2} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

$f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需 $a \ln a - a = a(\ln a - 1) \geq 0$, 解得 $a \geq e$,

故选: A.

例 7. (2024·高二·广西河池·期末) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 2$ 在区间 $(1, 2)$ 上不单调, 则实数 a

的取值范围为 ()

A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

【答案】B

【解析】由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$.

①当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 不合题意;

②当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极值点为 $x = \frac{1}{a}$,

若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 不单调, 必有 $1 < \frac{1}{a} < 2$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 1$;

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

故选: B.

例 8. (2024·高三·甘肃兰州·期中) 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9\ln x$ 在区间 $[a-1, a+1]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $1 < a \leq 2$

B. $a \geq 4$

C. $a \leq 2$

D. $0 < a \leq 3$

【答案】A

【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9\ln x$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

又函数 $f(x)$ 在区间 $[a-1, a+1]$ 上单调递减,

由 $f'(x) = x - \frac{9}{x} < 0$, 得 $0 < x < 3$,

所以 $\begin{cases} a-1 > 0 \\ a+1 \leq 3 \end{cases}$, 解得 $1 < a \leq 2$,

所以实数 a 的取值范围是 $1 < a \leq 2$.

故选: A.

例 9. (2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a\ln x - (a+1)x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解析】函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a\ln x - (a+1)x$, 定义域是 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = x + \frac{a}{x} - (a+1) = \frac{(x-1)(x-a)}{x},$$

$a \leq 0$ 时, $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 的减区间是 $(0, 1)$, 增区间是 $(1, +\infty)$;

$0 < a < 1$ 时, $0 < x < a$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $a < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 的增区间是 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 减区间是 $(a, 1)$;

$a > 1$ 时, $0 < x < 1$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, $1 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$, 减区间是 $(1, a)$.

综上所述: $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的减区间是 $(0, 1)$, 增区间是 $(1, +\infty)$;

$0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的增区间是 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 减区间是 $(a, 1)$;

$a = 1$ 时, $f(x)$ 的增区间是 $(0, +\infty)$, 无减区间;

$a > 1$ 时, $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$, 减区间是 $(1, a)$.

例 10. (2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = (x^2 - 2ax)\ln x + \frac{1}{2}x^2$, 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【解析】当 $a = 1$ 时, $f(x) = (x^2 - 2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2$, 该函数的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = (2x - 2)\ln x + (x - 2) + x = 2(x - 1)(\ln x + 1),$$

由 $f'(x) < 0$ 可得 $\frac{1}{e} < x < 1$,

由 $f'(x) > 0$ 可得 $0 < x < \frac{1}{e}$ 或 $x > 1$,

故当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0, \frac{1}{e})$ 和 $(1, +\infty)$, 减区间为 $(\frac{1}{e}, 1)$.

例 11. (2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a+1}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【解析】依题意, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{由 } f(x) = \ln x - \frac{a+1}{x} (a \in \mathbf{R}), \text{ 得 } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{x+a+1}{x^2},$$

①当 $a \geq -1$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

②当 $a < -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -a-1$,

当 $x \in (0, -a-1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 单调递减;

当 $x \in (-a-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-a-1, +\infty)$ 单调递增;

综上, 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 单调递减, 在 $(-a-1, +\infty)$ 单调递增.

【过关测试】

一、单选题

1. (2024·高三·山西晋城·开学考试) 若 $f(x) = a\ln x + x^2$ 在 $x = 1$ 处有极值, 则函数 $f(x)$

的单调递增区间是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 3)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

【答案】A

【解析】由 $f(x) = a \ln x + x^2$ 得 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2x$, $f'(1) = a + 2 = 0$, 解得 $a = -2$,

故 $f'(x) = \frac{-2}{x} + 2x = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x} (x > 0)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$.

故选: A

2. (2024·浙江·模拟预测) 函数 $f(x) = \ln(2x-1) - x^2 + x$ 的单调递增区间是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
C. $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = \ln(2x-1) - x^2 + x$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

且 $f'(x) = \frac{2}{2x-1} - 2x + 1 = \frac{2 - (2x-1)^2}{2x-1} = \frac{[\sqrt{2} - (2x-1)][\sqrt{2} + (2x-1)]}{2x-1}$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

故选: D

3. (2024·高三·全国·专题练习) 函数 $f(x) = 2x + x \ln 2 - 2$ 的零点个数是 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

【答案】B

【解析】解析: $f'(x) = 2x \ln 2 + 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, 故函数的零点个数为 1. 故选 B.

4. (2024·高二·河南·阶段练习) 函数 $f(x) = x - 2 \ln(2x)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(0, 1)$

C. $(0, 2)$

D. $(2, +\infty)$

【答案】C

【解析】 $f(x) = x - 2\ln(2x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x},$$

由 $f'(x) < 0$, 可得 $x \in (0, 2)$,

故 $f(x) = x - 2\ln(2x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$.

故选: C.

5. (2024·陕西榆林·一模) 已知函数 $f(x) = ax + \cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-1, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

D. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

【答案】B

【解析】 $f'(x) = a - \sin x \geq 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上恒成立, 即 $a \geq \sin x$, 所以 $a \geq 1$, 则 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

故选: B.

6. (2024·高三·新疆乌鲁木齐·阶段练习) 若函数 $f(x) = e^x(\sin x + a)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-\sqrt{2}, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(-\infty, -\sqrt{2}]$

D. $(-\infty, 1]$

【答案】C

【解析】由题意, 知 $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x + a) \leq 0$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恒成立,

即 $a \leq -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恒成立.

因为 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, 所以 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$,

所以 $-\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, 1]$, 所以 $a \leq -\sqrt{2}$.

故选: C.

7. (2024·全国·模拟预测) 若函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + 1$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2\ln 2]$

B. $(0, 2\ln 2]$

C. $(-\infty, 2]$

D. $(0, 2]$

【答案】C

【解析】因为函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + 1$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，所以 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

即 $a \leq \ln x + \frac{1}{x} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

则当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$, 所以 $a \leq 2$.

故选: C.

8. (2024·安徽池州·模拟预测) 关于函数 $f(x) = x - \sin x$, 下列说法错误的是 ()

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 是周期函数

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的唯一零点

D. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

【答案】B

【解析】对于 A 中, 函数 $f(x) = x - \sin x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

且 $f(-x) = -x - \sin(-x) = -(x - \sin x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 A 正确;

对于 B 中, 由函数 $f(x) = x - \sin x$, 可得 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

则 $f(x)$ 为单调递增函数, 所以不存在实数 T , 使得 $f(x+T) = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 一定不是周期函数, 所以 B 错误;

对于 C 中, 由 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 得到 $f(x)$ 为单调递增函数,

又由 $f(0) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 有唯一的零点 $x=0$, 所以 C 正确;

对于 D 中, 由 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 得到 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上单调递增函数, 所以 D 正确.

故选: B.

9. (2024·高三·全国·专题练习) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x - \ln x$, 则函数 $y = f(x)$ ()

A. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$, $(1, e)$ 内均有一个零点

B. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$, $(1, e)$ 内均无零点

C. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内有一个零点, 在区间 $(1, e)$ 内无零点

D. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内无零点, 在区间 $(1, e)$ 内有一个零点

【答案】D

【解析】当 $x \in (\frac{1}{e}, e)$ 时, 函数图象连续不断, 且 $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{3x} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e)$ 上单调递减.

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{3e} + 1 > 0, f(1) = \frac{1}{3} > 0, f(e) = \frac{1}{3}e - 1 < 0$$

所以函数 $f(x)$ 有唯一的零点在区间 $(1, e)$ 内.

故选: D

10. (2024·高三·辽宁·阶段练习) 已知函数 $f(x) = 2x^2 + ax$, 则“ $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增”的一个充分不必要条件为 ()

A. $a \leq -4$

B. $a < 0$

C. $a > -5$

D. $a > 4$

【答案】D

【解析】 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增等价于 $f'(x) = 4x + a$ 在区间 $[1, 2]$ 上大于等于 0 恒成立,

即 $a \geq -4x$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 即 $a \geq (-4x)_{\max} = -4$,

故 $a > 4$ 是 $a \geq -4$ 的充分不必要条件, 故 D 正确.

故选: D.

11. (2024·高三·北京通州·期中) 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

A. $f(x) = (x-1)^3$

B. $f(x) = 2^{|-x|}$

C. $f(x) = -\log_2 |x|$

D. $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$

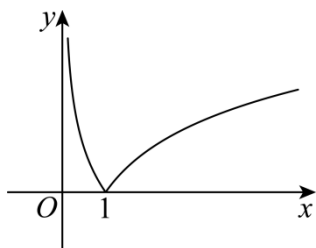
【答案】C

【解析】对于 A, $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, 所以 $f(x) = (x-1)^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 错误,

对于 B, 由于 $x > 0, f(x) = 2^{|-x|} = 2^x$, 所以 $f(x) = 2^{|-x|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, B 错误,

对于 C, $x > 0, f(x) = -\log_2 |x| = -\log_2 x$, 故 $f(x) = -\log_2 |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, C 正确,

对于 D, $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 的图象如下所示: 故 $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 故 D 错误,



故选: C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/98700020116010033>