

## 新疆哈密石油高中 2024 年高三下学期第二次阶段性过关考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点，过点  $F_1$  作圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的切线，与双曲线的左、右两支分别交于点  $P, Q$ ，若  $|QF_2| = |PQ|$ ，则双曲线渐近线的斜率为（ ）

- A.  $\pm 1$                       B.  $\pm(\sqrt{3}-1)$                       C.  $\pm(\sqrt{3}+1)$                       D.  $\pm\sqrt{5}$

2. 点  $M$  在曲线  $G: y = 3 \ln x$  上，过  $M$  作  $x$  轴垂线  $l$ ，设  $l$  与曲线  $y = \frac{1}{x}$  交于点  $N$ ， $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3}$ ，且  $P$  点的纵坐标始终为 0，则称  $M$  点为曲线  $G$  上的“水平黄金点”，则曲线  $G$  上的“水平黄金点”的个数为（ ）

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

3. 将函数  $f(x) = \cos 2x$  图象上所有点向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象，如果  $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上单调递减，那么实数  $a$  的最大值为（ ）

- A.  $\frac{\pi}{8}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{2}$                       D.  $\frac{3}{4}\pi$

4. 已知函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ ，将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，得到函数  $g(x)$  的图象，若函数  $g(x)$  的图象的一条对称轴是  $x = \frac{\pi}{6}$ ，则  $\omega$  的最小值为

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{5}{3}$                       D.  $\frac{5}{6}$

5. 下列选项中，说法正确的是（ ）

A. “ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 > 0$ ”

B. 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为钝角

C. 若  $am^2 \leq bm^2$ ，则  $a \leq b$

D. “ $x \in (A \cup B)$ ”是“ $x \in (A \cap B)$ ”的必要条件

6. 将函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$  向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，得到  $g(x)$  的图象，则  $g(x)$  满足（ ）

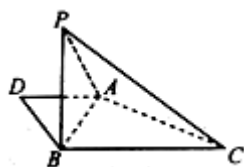
A. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称，在区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上为增函数

B. 函数最大值为 2，图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称

C. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 1

D. 最小正周期为 $\pi$ ， $g(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 有两个根

7. 如图，平面四边形 $ACBD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\triangle ABD$ 为等边三角形，现将 $\triangle ABD$ 沿 $AB$ 翻折，使点 $D$ 移动至点 $P$ ，且 $PB \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）



A.  $8\pi$                       B.  $6\pi$                       C.  $4\pi$                       D.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

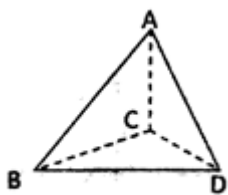
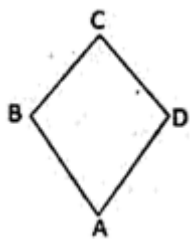
8. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一个焦点为 $F(c, 0)$  ( $c > 0$ )，且离心率等于 $\sqrt{5}$ ，若该双曲线的一条渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，则该双曲线的标准方程为（ ）

A.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$                       B.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$   
C.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$                       D.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{25} = 1$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A.  $\frac{4}{3}$                       B.  $\frac{5}{3}$                       C.  $\frac{5}{4}$                       D.  $\frac{3}{2}$

10. 等腰直角三角形 $BCD$ 与等边三角形 $ABD$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BD = 6$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 $BD$ 折起，则当直线 $AD$ 与平面 $BCD$ 所成角为 $45^\circ$ 时，直线 $AC$ 与平面 $ABD$ 所成角的正弦值为（ ）



- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知函数  $f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ , 若  $f(2a-1) > f(0)$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$       B.  $(0, 1)$       C.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$       D.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

12. 若复数  $z$  满足  $z(1-2i) = 10$ , 则复数  $z$  在复平面内对应的点在 ( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两个焦点为  $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ , 点  $P$  是第一象限内双曲线上的点, 且  $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \angle PF_2F_1 = -2$ , 则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \cos x - \log_2(2^x + 1) + ax$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 为偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知公差大于零的等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2, a_6, a_{12}$  依次成等比数列, 则  $\frac{a_{12}}{a_2}$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 记  $\{S_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{a_{n+1} - a_n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $a_1 = 1$ , 则  $S_6 =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

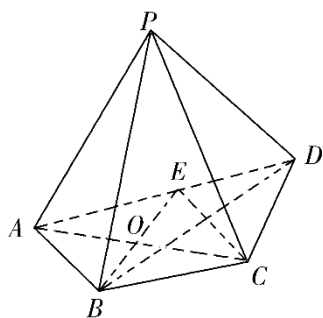
17. (12 分) 已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $t$  为参数), 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \frac{4 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ .

(1) 将曲线  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程, 并说明曲线  $C$  的形状;

(2) 若直线  $l$  经过点  $(1, 0)$ , 求直线  $l$  被曲线  $C$  截得的线段的长.

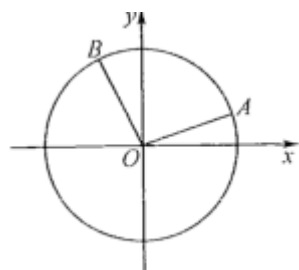
18. (12 分) 如图所示, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $PCD$ , 底面  $ABCD$  满足  $AD \parallel BC$ ,

$AP = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 2$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $E$  为  $AD$  的中点,  $AC$  与  $BE$  的交点为  $O$ .



- (1) 设  $H$  是线段  $BE$  上的动点, 证明: 三棱锥  $H-PCD$  的体积是定值;
- (2) 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积;
- (3) 求直线  $BC$  与平面  $PBD$  所成角的余弦值.

19. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以  $x$  轴正半轴为始边的锐角  $\alpha$  的终边与单位圆  $O$  交于点  $A$ , 且点  $A$  的纵坐标是  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .



- (1) 求  $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$  的值;

- (2) 若以  $x$  轴正半轴为始边的钝角  $\beta$  的终边与单位圆  $O$  交于点  $B$ , 且点  $B$  的横坐标为  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 求  $\alpha + \beta$  的值.

20. (12 分) 已知非零实数  $a, b$  满足  $a < b$ .

- (1) 求证:  $a^3 - b^3 < 2a^2b - 2ab^2$ ;

- (2) 是否存在实数  $\lambda$ , 使得  $\frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} \geq \lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$  恒成立? 若存在, 求出实数  $\lambda$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由

21. (12 分) 已知  $a, b, c$  均为正实数, 函数  $f(x) = \left|x + \frac{1}{a^2}\right| + \left|x - \frac{1}{b^2}\right| + \frac{1}{4c^2}$  的最小值为 1. 证明:

- (1)  $a^2 + b^2 + 4c^2 \geq 9$ ;

- (2)  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ac} \leq 1$ .

22. (10 分) 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点,  $P, Q$  为抛物线  $C$  上的两个动点,  $O$  为坐标原点.

(I) 若点  $F$  在线段  $PQ$  上, 求  $|PQ|$  的最小值;

(II) 当  $OP \perp PQ$  时, 求点  $Q$  纵坐标的取值范围.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

如图所示: 切点为  $M$ , 连接  $OM$ , 作  $PN \perp x$  轴于  $N$ , 计算  $|PF_1| = 2a$ ,  $|PF_2| = 4a$ ,  $|PN| = \frac{2a^2}{c}$ ,  $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$ ,

根据勾股定理计算得到答案.

【详解】

如图所示: 切点为  $M$ , 连接  $OM$ , 作  $PN \perp x$  轴于  $N$ ,

$$|QF_1| - |QF_2| = |QP| + |PF_1| - |QF_2| = |PF_1| = 2a, \text{ 故 } |PF_2| = 4a,$$

在  $Rt\triangle MOF_1$  中,  $\sin \angle MF_1O = \frac{a}{c}$ , 故  $\cos \angle MF_1O = \frac{b}{c}$ , 故  $|PN| = \frac{2a^2}{c}$ ,  $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$ ,

根据勾股定理:  $16a^2 = \frac{4a^4}{c^2} + \left(2c - \frac{2ab}{c}\right)^2$ , 解得  $\frac{b}{a} = \sqrt{3} + 1$ .

故选: C.



【解析】

根据条件先求出  $g(x)$  的解析式，结合三角函数的单调性进行求解即可.

【详解】

将函数  $f(x) = \cos 2x$  图象上所有点向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象，

$$\text{则 } g(x) = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{设 } \theta = 2x + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{则当 } 0 < x \leq a \text{ 时, } 0 < 2x \leq 2a, \quad \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{2} \leq 2a + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{2} < \theta \leq 2a + \frac{\pi}{2},$$

要使  $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上单调递减，

$$\text{则 } 2a + \frac{\pi}{2} \leq \pi \text{ 得 } 2a \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } a \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\text{即实数 } a \text{ 的最大值为 } \frac{\pi}{4},$$

故选：B.

【点睛】

本小题主要考查三角函数图象变换，考查根据三角函数的单调性求参数，属于中档题.

4、C

【解析】

将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，得到函数  $g(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3})$  的图象，因为函数  $g(x)$  的图象的一条对称轴是  $x = \frac{\pi}{6}$ ，所以  $\sin(\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$ ，即  $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，所以  $\omega = \frac{5}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$ ，又  $\omega > 0$ ，所以  $\omega$  的最小值为  $\frac{5}{3}$ 。故选 C.

5、D

【解析】

对于 A 根据命题的否定可得：“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”，即可判断出；对于 B 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为钝角或平角；对于  $C$  当  $m=0$  时，满足  $am^2 \leq bm^2$ ，但是  $a \leq b$  不一定成立；对于  $D$  根据元素与集合的关系即可做出判断。

**【详解】**

选项  $A$  根据命题的否定可得：“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R, x^2 - x > 0$ ”，因此  $A$  不正确；

选项  $B$  若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为钝角或平角，因此不正确。

选项  $C$  当  $m=0$  时，满足  $am^2 \leq bm^2$ ，但是  $a \leq b$  不一定成立，因此不正确；

选项  $D$  若“ $x \in (A \cap B)$ ”，则  $x \in A$  且  $x \in B$ ，所以一定可以推出“ $x \in (A \cup B)$ ”，因此“ $x \in (A \cup B)$ ”是

“ $x \in (A \cap B)$ ”的必要条件，故正确。

故选： $D$ 。

**【点睛】**

本题考查命题的真假判断与应用，涉及知识点有含有量词的命题的否定、不等式性质、向量夹角与性质、集合性质等，属于简单题。

6、 $C$

**【解析】**

由辅助角公式化简三角函数式，结合三角函数图象平移变换即可求得  $g(x)$  的解析式，结合正弦函数的图象与性质即可判断各选项。

**【详解】**

函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ ，

则  $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

将  $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，

可得  $g(x) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

由正弦函数的性质可知， $g(x)$  的对称中心满足  $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in Z$ ，解得  $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ ，所以  $A$ 、 $B$  选项中的对称中心错误；

对于  $C$ ， $g(x)$  的对称轴满足  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ ，解得  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$ ，所以图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称；当

$x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$  时,  $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ , 由正弦函数性质可知  $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [1, 2]$ , 所以在  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$  上的最小值为

1, 所以 C 正确;

对于 D, 最小正周期为  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ , 由正弦函数的图象与性质可知,

$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$  时仅有一个解为  $x = 0$ , 所以 D 错误;

综上所述, 正确的为 C,

故选: C.

【点睛】

本题考查了三角函数式的化简, 三角函数图象平移变换, 正弦函数图象与性质的综合应用, 属于中档题.

7、A

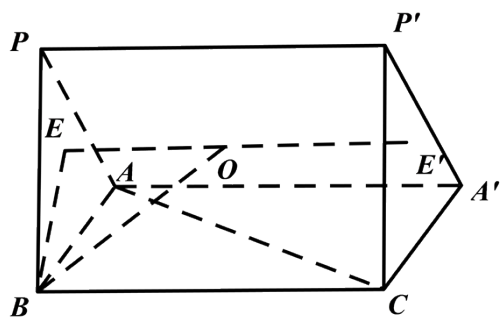
【解析】

将三棱锥  $P-ABC$  补形为如图所示的三棱柱, 则它们的外接球相同, 由此易知外接球球心  $O$  应在棱柱上下底面三角形的外心连线上, 在  $Rt\triangle OBE$  中, 计算半径  $OB$  即可.

【详解】

由  $AB \perp BC$ ,  $PB \perp BC$ , 可知  $BC \perp$  平面  $PAB$ .

将三棱锥  $P-ABC$  补形为如图所示的三棱柱, 则它们的外接球相同.



由此易知外接球球心  $O$  应在棱柱上下底面三角形的外心连线上,

记  $\triangle ABP$  的外心为  $E$ , 由  $\triangle ABD$  为等边三角形,

可得  $BE = 1$ . 又  $OE = \frac{BC}{2} = 1$ , 故在  $Rt\triangle OBE$  中,  $OB = \sqrt{2}$ ,

此即为外接球半径, 从而外接球表面积为  $8\pi$ .

故选: A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积, 考查了学生空间想象, 逻辑推理, 综合分析, 数学运算的能力, 属于较难题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/987006150161010003>