

一. 解答题 (共 22 小题)

1. 如图, 正方形 ADEF 与梯形 ABCD 所在的平面互相垂直, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $AB = AD$

$= \frac{1}{2}CD = 2$, 点 M 在线段 EC 上.

(1) 是否存在点 M, 使得 $FM \perp$ 平面 BDM, 如果存在求出点 M 位置, 如果不存在说明理由;

(2) 当平面 BDM 与平面 ABF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, 求三棱锥 M-BDE 的体积.

2. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 ABCD 是边长为 2 的正方形, E, F 分别为线段 DD_1 , BD 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 ABC_1D_1 ;

(2) 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 16π , 求异面直线 EF 与 BC 所成的角的大小.

3. 如图, $PA \perp$ 平面 ABCD, 四边形 ABCD 为矩形, $PA = AB = 1$, $AD = 2$, 点 F 是 PB 的中点, 点 E 在边 BC 上移动.

(1) 求三棱锥 E-PAD 的体积;

(2) 证明: 无论点 E 在边 BC 的何处, 都有 $AF \perp PE$.

4. 如图所示, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是 2, 侧棱长是 $\sqrt{3}$, D 是 AC 的中点.

(I) 求证: $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ;

(II) 在线段 AA_1 上是否存在一点 E, 使得平面 $B_1C_1E \perp$ 平面 A_1BD ? 若存在, 求出 AE 的长; 若不存在, 说明理由.

5. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, $AD = AA_1$, F 为棱 BB_1 的中点, M 为线段 AC_1 的中点.

(1) 求证: $FM \parallel$ 平面 ABCD;

(2) 求证: 平面 $AFC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

6. 如图, 在四棱锥 P-ABCD 中, 底面 ABCD 是边长为 2 的正方形, $PD \perp$ 面 ABCD, M 是 PPC 的中点, G 是线段 DM 上异于端点的一点, 平面 $GAP \cap$ 平面 BDM = GH, $PD = 2$.

(I) 证明: $GH \parallel$ 面 PAD;

(II) 若 PD 与面 GAP 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$, 求四棱锥 D-PAHG 的体积.

7. 如图, 在四棱锥 A-BCDE 中, 平面 ADC ⊥ 平面 BCDE, $\angle CDE = \angle BED = \angle ACD = 90^\circ$, $AB = CD = 2$, $DE = BE = 1$,

(I) 证明: 平面 ABD ⊥ 平面 ABC;

(II) 求直线 AD 与平面 ACE 所成的角的正弦值.

8. 如图, 在四棱锥 P-ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp$ 平面 PCD, $PC \perp CD$, $CD = 2AB = 2AD = PC$.

(I) 求证: 平面 BDP ⊥ 平面 BCP;

(II) 若平面 ABP 与平面 ADP 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 λ 的值.

9. 已知直线 $2x + y - 4 = 0$ 与圆 C: $x^2 + y^2 - 2mx - \frac{4}{m}y = 0$ ($m > 0$) 相交于点 M、N, 且 $|OM| = |ON|$ (O 为坐标原点).

(I) 求圆 C 的标准方程;

(II) 若 A(0, 2), 点 P、Q 分别是直线 $x + y + 2 = 0$ 和圆 C 上的动点, 求 $|PA| + |PQ|$ 的最小值及求得最小值时的点 P 坐标.

10. 已知圆 C 过点 P(2, 2), 且与圆 M: $(x+6)^2 + (y-6)^2 = r^2$ ($r > 0$) 关于直线 $x - y + 6 = 0$ 对称.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 过点 P 作两条相异直线分别与圆 C 相交于点 A 和点 B, 且直线 PA 和直线 PB 的倾斜角互补, O 为坐标原点, 试判断直线 OP 和 AB 是否平行? 请说明理由.

11. 已知圆 C 的圆心在直线 $y = x + 1$ 上, 半径为 $\sqrt{2}$, 且圆 C 经过点 P(3, 6) 和点 Q(5, 6).

① 求圆 C 的方程.

② 过点 (3, 0) 的直线 l 截圆所得弦长为 2, 求直线 l 的方程.

12. 已知圆 C 的圆心坐标 (1, 1), 直线 l: $x + y = 1$ 被圆 C 截得弦长为 $\sqrt{2}$.

(I) 求圆 C 的方程;

(II) 从圆 C 外一点 P(2, 3) 向圆引切线, 求切线方程.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 M 的圆心在直线 $y = -2x$ 上, 且圆 M 与直线 $x + y - 1 = 0$ 相切于点 P(2, -1).

(1) 求圆 M 的方程;

(2) 过坐标原点 O 的直线 l 被圆 M 截得的弦长为 $\sqrt{6}$, 求直线 l 的方程.

14. 已知圆 C 的圆心 C 在直线 $y=x$ 上, 且与 x 轴正半轴相切, 点 C 与坐标原点 O 的距离为 $\sqrt{2}$.

(I) 求圆 C 的标准方程;

(II) 直线 l 过点 $M(1, \frac{1}{2})$ 且与圆 C 相交于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$ 的最小值及此时直线 l 的方程.

15. 如图, 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2, 0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1, 1)$ 在 AD 边所在直线上.

(1) AD 边所在直线的方程;

(2) 矩形 $ABCD$ 外接圆的方程.

16. 已知三条直线 $l_1: x+y-3=0$, $l_2: 3x-y-1=0$, $l_3: 2x+my-8=0$ 经过同一点 M .

(1) 求实数 m 的值;

(2) 求点 M 关于直线 $l: x-3y-5=0$ 的对称点 N 的坐标.

17. 已知圆 C_1 与 y 轴相切于点 $(0, 3)$, 圆心在经过点 $(2, 1)$ 与点 $(-2, -3)$ 的直线 l 上.

(I) 求圆 C_1 的方程;

(II) 若圆 C_1 与圆 $C_2: x^2+y^2-6x-3y+5=0$ 相交于 M, N 两点, 求两圆的公共弦 MN 的长.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以点 $C(a-1, a^2)$ ($a>0$) 为圆心的圆过原点 O , 不过圆心 C 的直线 $2x+y+m=0$ ($m \in \mathbb{R}$) 与圆 C 交于 M, N 两点, 且点 $F(\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ 为线段 MN 的中点.

(I) 求 m 的值和圆 C 的方程;

(II) 若 Q 是直线 $y=-2$ 上的动点, 直线 QA, QB 分别切圆 C 于 A, B 两点, 求证: 直线 AB 恒过定点;

(III) 若过点 $P(0, t)$ ($0 \leq t < 1$) 的直线 L 与圆 C 交于 D, E 两点, 对于每一个确定的 t , 当 $\triangle CDE$ 的面积最大时, 记直线 l 的斜率的平方为 u , 试用含 t 的代数式表示 u .

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $M: x^2+y^2+ay=0$ ($a>0$), 直线 $l: x-7y-2=0$, 且直线 l 与圆 M 相交于不同的两点 A, B .

(1) 若 $a=4$, 求弦 AB 的长;

(2) 设直线 OA , OB 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 若 $k_1+k_2=\frac{1}{6}$, 求圆 M 的方程.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2+y^2=1$,

(1) P 为直线 $l: x=\frac{4}{3}$ 上一点.

① 若点 P 在第一象限, 且 $OP=\frac{5}{3}$, 求过点 P 的圆 O 的切线方程;

② 若存在过点 P 的直线交圆 O 于点 A , B , 且 B 恰为线段 AP 的中点, 求点 P 纵坐标的取值范围;

(2) 已知 $C(2, 0)$, M 为圆 O 上任一点, 问: 是否存在定点 D (异于点 C), 使 $\frac{MC}{MD}$ 为定值, 若存在, 求出 D 坐标; 若不存在, 说明你的理由.

21. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长和底边长均为 2, D 是 BC 的中点.

(I) 求证: $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;

(II) 求证: $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ;

(III) 求三棱锥 C_1-ADB_1 的体积.

22. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , M 是 BC 的中点, 若底面 ABC 是边长为 2 的正三角形, 且 PB 与底面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$. 求:

(1) 三棱锥 $P-ABC$ 的体积;

(2) 异面直线 PM 与 AC 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示).

参考答案与试题解析

一. 解答题 (共 22 小题)

1. 如图, 正方形 $ADEF$ 与梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$, 点 M 在线段 EC 上.

(1) 是否存在点 M , 使得 $FM \perp$ 平面 BDM , 如果存在求出点 M 位置, 如果不存在说明理由;

(2) 当平面 BDM 与平面 ABF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, 求三棱锥 $M-BDE$ 的体积.

【解答】解: (1) 不存在点 M , 使得 $FM \perp$ 平面 BDM .

证明如下:

$\because$ 正方形 $ADEF$ 与梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $AD \perp CD$,

∴DA, DC, DE 所在直线两两互相垂直,

以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DE 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.

则 D (0, 0, 0), F (2, 0, 2), B (2, 2, 0), 设 M (0, b, c),

则 $\overrightarrow{MF} = (2, -b, 2-c)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{DM} = (0, b, c)$.

设平面 DBM 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = by + cz = 0 \end{cases}$, 取 $y = -1$, 则 $\vec{n} = (1, -1, \frac{b}{c})$.

若 $\overrightarrow{MF}$ 与 $\vec{n}$ 共线, 则 $\begin{cases} b = 2 \\ 2 - c = \frac{b}{c} \end{cases}$, 即 $c^2 - 2c + 2 = 0$, 此方程无解.

∴不存在点 M, 使得 FM ⊥ 平面 BDM;

(2) 由 (1) 知, $\vec{n} = (1, -1, \frac{b}{c})$ 是平面 BDM 的一个法向量,

而 ABF 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$.

由 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2 + (\frac{b}{c})^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

得 $\frac{b}{c} = 2$, 即 $b = 2c$.

再由 $\overrightarrow{EM}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 共线, 可得 $b = 2c = 2$.

即点 M 为 EC 中点, 此时, $S_{\triangle DEM} = 2$, AD 为三棱锥 B-DEM 的高,

∴ $V_{M-BDE} = V_{B-DEM} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$.

2. 如图, 在直四棱柱 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中, 底面 ABCD 是边长为 2 的正方形, E, F 分别为线段 DD₁, BD 的中点.

(1) 求证: EF // 平面 ABC₁D₁;

(2) 四棱柱 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 的外接球的表面积为 16π , 求异面直线 EF 与 BC 所成的角的大小.

【解答】解: (1) 连接 BD₁, 在 △DD₁B 中, E、F 分别为线段 DD₁、BD 的中点,

∴EF 为中位线, ∴EF // D₁B,

∵D₁B ⊄ 面 ABC₁D₁, EF ⊂ 面 ABC₁D₁,

∴EF // 平面 ABC₁D₁;

(2) 由 (1) 知 $EF \parallel D_1B$, 故 $\angle D_1BC$ 即为异面直线 EF 与 BC 所成的角,

$\because$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 16π ,

$\therefore$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 $R=2$,

设 $AA_1=a$, 则 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4+4}=2$, 解得 $a=2\sqrt{2}$,

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$\because BC \perp$ 平面 CDD_1C_1 , $CD_1 \subset$ 平面 $CD-D_1C_1$,

$\therefore BC \perp CD_1$, 在 $RT\triangle CC_1D_1$ 中, $BC=2$, $CD_1=2\sqrt{3}$, $D_1C \perp BC$,

$\therefore \tan \angle D_1BC = \frac{D_1C}{BC} = \sqrt{3}$, 则 $\angle D_1BC = 60^\circ$,

$\therefore$ 异面直线 EF 与 BC 所成的角为 60° .

3. 如图, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $PA=AB=1$, $AD=2$, 点 F 是 PB 的中点, 点 E 在边 BC 上移动.

(1) 求三棱锥 $E-PAD$ 的体积;

(2) 证明: 无论点 E 在边 BC 的何处, 都有 $AF \perp PE$.

【解答】(1) 解: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为矩形.

$$\therefore S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = 1, \dots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore V_{E-PAD} = V_{P-EAD} = \frac{1}{3}S_{\triangle EAD} \cdot PA = \frac{1}{3} \dots (6 \text{ 分})$$

(2) 证明: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$,

又 $\because PA=AB=1$, 且点 F 是 PB 的中点,

$\therefore AF \perp PB \dots (8 \text{ 分})$

又 $PA \perp BC$, $BC \perp AB$, $PA \cap AB = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $AF \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp AF \dots (10 \text{ 分})$

$$\text{由 } \begin{cases} AF \perp PB \\ AF \perp BC \\ PB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AF \perp \text{平面 } PBC, \text{ 又 } \because PE \subset \text{平面 } PBC$$

$\therefore$ 无论点 E 在边 BC 的何处, 都有 $AF \perp PE$ 成立. $\dots (12 \text{ 分})$

4. 如图所示, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是 2, 侧棱长是 $\sqrt{3}$, D 是 AC 的中点.

(I) 求证: $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ;

(II) 在线段 AA_1 上是否存在一点 E , 使得平面 $B_1C_1E \perp$ 平面 A_1BD ? 若存在, 求出 AE 的长; 若不存在, 说明理由.

【解答】解：（I）连接 AB_1 交 A_1B 于点 M ，连接 MD 。

$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱， $\therefore$ 四边形 BAA_1B_1 是矩形，

$\therefore M$ 为 AB_1 的中点。

$\because D$ 是 AC 的中点， $\therefore MD \parallel B_1C$ 。

又 $MD \not\subset$ 平面 A_1BD ， $B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD ，

$\therefore B_1C \parallel$ 平面 A_1BD 。

（II）作 $CO \perp AB$ 于点 O ，则 $CO \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，

以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系，假设存在点 E ，设 $E(1, a, 0)$ 。

$\because AB=2$ ， $AA_1=\sqrt{3}$ ， D 是 AC 的中点， $\therefore A(1, 0, 0)$ ， $B(-1, 0, 0)$ ， $C(0, 0, \sqrt{3})$ ， $A_1(1, \sqrt{3}, 0)$ ， $B_1(-1, \sqrt{3}, 0)$ ， $C_1(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 。

$\therefore D(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $\overrightarrow{BD}=(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $\overrightarrow{BA_1}=(2, \sqrt{3}, 0)$ 。

设是平面 A_1BD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x, y, z)$ ， $\therefore \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{BA_1}$ ，

$\therefore \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{3}z}{2} = 0 \\ 2x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ ，令 $x = -\sqrt{3}$ ，得 $\overrightarrow{n_1} = (-\sqrt{3}, 2, 3)$ 。

$\because E(1, a, 0)$ ，则 $\overrightarrow{C_1E}=(1, a-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{C_1B_1}=(-1, 0, -\sqrt{3})$ 。

设平面 B_1C_1E 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x, y, z)$ ， $\therefore \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{C_1E}$ ， $\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{C_1B_1}$ 。

$\therefore \begin{cases} x + (a-\sqrt{3})y - \sqrt{3}z = 0 \\ -x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ ，令 $z = -\sqrt{3}$ ，得 $\overrightarrow{n_2} = (3, \frac{6}{\sqrt{3}-a}, -\sqrt{3})$ 。

$\because$ 平面 $B_1C_1E \perp$ 平面 A_1BD ， $\therefore \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ ，

即 $-3\sqrt{3} + \frac{12}{\sqrt{3}-a} - 3\sqrt{3} = 0$ ，解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

$\therefore$ 存在点 E ，使得平面 $B_1C_1E \perp$ 平面 A_1BD ，且 $AE = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

5. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AD = AA_1$ ， F 为棱 BB_1 的中点， M 为线段 AC_1 的中点。

（1）求证： $FM \parallel$ 平面 $ABCD$ ；

（2）求证：平面 $AFC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 。

【解答】证明：（1）延长 C_1F 交 CB 的延长线于点 N ，连接 AN 。

$\because F$ 是 BB_1 的中点，

∴F 为 C_1N 的中点，B 为 CN 的中点.

又 M 是线段 AC_1 的中点，

故 $MF \parallel AN$.

又 MF 不在平面 ABCD 内， $AN \not\subset$ 平面 ABCD，

∴ $MF \parallel$ 平面 ABCD.

(2) 连 BD，由直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，可知 $A_1A \perp$ 平面 ABCD，

又 $\because BD \subset$ 平面 ABCD， $\therefore A_1A \perp BD$.

$\because$ 四边形 ABCD 为菱形， $\therefore AC \perp BD$.

又 $\because AC \cap A_1A = A$ ，AC， $A_1A \subset$ 平面 ACC_1A_1 ， $\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

在四边形 DANB 中， $DA \parallel BN$ 且 $DA = BN$ ， $\therefore$ 四边形 DANB 为平行四边形，

故 $NA \parallel BD$ ， $\therefore NA \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

又 $\because NA \subset$ 平面 AFC_1 ，

∴平面 $AFC_1 \perp ACC_1A_1$.

6. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 ABCD 是边长为 2 的正方形， $PD \perp$ 面 ABCD，M 是 PPC 的中点，G 是线段 DM 上异于端点的一点，平面 $GAP \cap$ 平面 $BDM = GH$ ， $PD = 2$.

(I) 证明： $GH \parallel$ 面 PAD；

(II) 若 PD 与面 GAP 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ，求四棱锥 D-PAHG 的体积.

【解答】 (I) 证明：连接 AC，交 BD 于 O，则 O 为 AC 的中点，连接 OM，

$\because$ M 为 PC 的中点，则 $OM \parallel PA$ ，

$\because OM \subset$ 平面 BMD， $PA \not\subset$ 平面 BMD， $\therefore PA \parallel$ 平面 BMD，

$\because PA \not\subset$ 平面 GPA，平面 $GPA \cap$ 平面 $MDB = GH$ ， $\therefore PA \parallel GH$ ，

而 $PA \not\subset$ 平面 PAD， $GH \subset$ 平面 PAD， $\therefore GH \parallel$ 面 PAD；

(II) 解：以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0, 0, 0)$ ， $A(2, 0, 0)$ ， $P(0, 0, 2)$ ， $M(0, 1, 1)$ ，

设 $\overrightarrow{DG} = \lambda \overrightarrow{DM} = (0, \lambda, \lambda)$ ，则 $\overrightarrow{AP} = (-2, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DG} = (0, \lambda, \lambda - 2)$ ，

设平面 PAG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$.

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = -2x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PG} = \lambda y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$ ，取 $z = 1$ ，得 $\vec{n} = (1, \frac{2-\lambda}{\lambda}, 1)$.

$$\overrightarrow{PD} = (0, 0, -2),$$

由 PD 与面 GAP 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ，得 $|\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PD} \rangle| =$

$$\frac{|-2|}{\sqrt{2 + (\frac{2-\lambda}{\lambda})^2 \times 2}} = \frac{\sqrt{11}}{11},$$

解得： $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = -1$ (舍)。

$\therefore$ G 为 DM 的中点，则 H 为 OD 的中点，

$$\text{此时， } PA = 2\sqrt{2}, GH = \frac{1}{2}OM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \vec{n} = (1, 3, 1).$$

$$D \text{ 到平面 PCAH 的距离 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PD}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{PA} = (2, 0, -2), \overrightarrow{PG} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}),$$

$$\text{得 } \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PG} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PG}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PG}|} = \frac{3}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore \sin \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PG} \rangle = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

$$\text{则 GH 与 PA 间的距离为 } h = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{55}}{10} = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

$$\therefore \text{四棱锥 D-PAHG 的体积 } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{22}}{4} \times \frac{2\sqrt{11}}{11} = \frac{5}{12}.$$

7. 如图，在四棱锥 A-BCDE 中，平面 ADC $\perp$ 平面 BCDE， $\angle CDE = \angle BED = \angle ACD = 90^\circ$ ，
AB=CD=2，DE=BE=1，

(I) 证明：平面 ABD $\perp$ 平面 ABC；

(II) 求直线 AD 与平面 ACE 所成的角的正弦值。

【解答】 (I) 证明：取 CD 的中点 M，连接 BM，可得四边形 BMDE 是正方形。

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 = 2.$$

$$\therefore BD^2 + BC^2 = DE^2 + BE^2 + BC^2 = DC^2,$$

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ, \therefore BD \perp BC.$$

又 AC $\perp$ 平面 CDE，BD $\subset$ 平面 BCDE， $\therefore BD \perp AC$ ，

故 BD $\perp$ 平面 ABC.

$\therefore$ BD $\subset$ 平面 ABD，

$\therefore$ 平面 ABD $\perp$ 平面 ABC.

作 $DH \perp CE$. $\because AC \perp DH$, $\therefore DH \perp$ 平面 ACE .

$\therefore \angle DAH$ 即为 AD 与平面 ACE 所成的角.

$$AB=DC=.$$

在 $Rt\triangle DCE$ 中, $DE=1$, $CD=2$, $\therefore CE=\sqrt{5}$,

$$\therefore DH = \frac{DE \cdot DC}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\because AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2}, \therefore AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{在 } Rt\triangle AHD \text{ 中, } \sin \angle DAH = \frac{DH}{AD} = \frac{\sqrt{30}}{15}.$$

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp$ 平面 PCD , $PC \perp CD$, $CD=2AB=2AD=PC$.

(I) 求证: 平面 $BDP \perp$ 平面 BCP ;

(II) 若平面 ABP 与平面 ADP 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 λ 的值.

【解答】(I) 证明: $\because AD \perp$ 平面 PCD , $\therefore AD \perp PC$,

又 $\because CD \perp PC$, $AD \cap CD = D$,

$\therefore PC \perp$ 平面 $ABCD$,

$\because BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PC \perp BD$,

设 $AB=AD=1$, 则 $CD=2$,

由题意知在梯形 $ABCD$ 中, 有 $BD=BC=\sqrt{2}$,

$\therefore BD^2 + BC^2 = CD^2$, $\therefore BD \perp BC$,

又 $PC \cap BC = C$, $\therefore BD \perp$ 平面 BCP .

$\because BD \subset$ 平面 BDP , $\therefore$ 平面 $BPD \perp$ 平面 BCP .

(2) 解: 以点 D 为原点, DA 、 DC 、 DQ 为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系. 设 $AB=1$, $PC=a$,

则 $D(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $P(0, 2, a)$, $\overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$,

$\overrightarrow{DP} = (0, 2, a)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 ADP 的一个法向量,

则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DP} \cdot \vec{n} = 0$, 可得 $\begin{cases} x=0 \\ 2y+az=0 \end{cases}$,

令 $z = -2$, 则 $y = a$, $\therefore \vec{n} = (0, a, -2)$.

的一个法向量 $\vec{n} = (a, \quad, 1)$. $\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} =$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2 + 4\sqrt{a^2 + 1}}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

解得: $a = \sqrt{2}$,

$\therefore = \sqrt{2}$.

9. 已知直线 $2x + y - 4 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2mx - \frac{4}{m}y = 0$ ($m > 0$) 相交于点 M 、 N , 且 $|OM| = |ON|$ (O 为坐标原点).

(I) 求圆 C 的标准方程;

(II) 若 $A(0, 2)$, 点 P 、 Q 分别是直线 $x + y + 2 = 0$ 和圆 C 上的动点, 求 $|PA| + |PQ|$ 的最小值及求得最小值时的点 P 坐标.

【解答】解: (I) 化圆 $C: x^2 + y^2 - 2mx - \frac{4}{m}y = 0$ ($m > 0$) 为 $(x - m)^2 + (y - \frac{2}{m})^2 = m^2 + \frac{4}{m^2}$.

则圆心坐标为 $C(m, \frac{2}{m})$,

$\because |OM| = |ON|$, 则原点 O 在 MN 的中垂线上,

设 MN 的中点为 H , 则 $CH \perp MN$, $\therefore C$ 、 H 、 O 三点共线,

则直线 OC 的斜率 $k = \frac{\frac{2}{m}}{m} = \frac{2}{m^2} = \frac{1}{2}$,

$\therefore m = 2$ 或 $m = -2$.

$\therefore$ 圆心为 $C(2, 1)$ 或 $C(-2, -1)$,

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 或 $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$,

由于当圆方程为 $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ 时, 直线 $2x + y - 4 = 0$ 到圆心的距离 $d > r$,

此时不满足直线与圆相交, 故舍去,

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$;

(II) 点 $A(0, 2)$ 关于直线 $x + y + 2 = 0$ 的对称点为 $A'(-4, -2)$,

则 $|PA| + |PQ| = |PA'| + |PQ| \geq |A'Q|$,

又 A' 到圆上点 Q 的最短距离为

$|A'C| - r = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

$\therefore |PA| + |PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$, 直线 $A'C$ 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/987062066004006156>