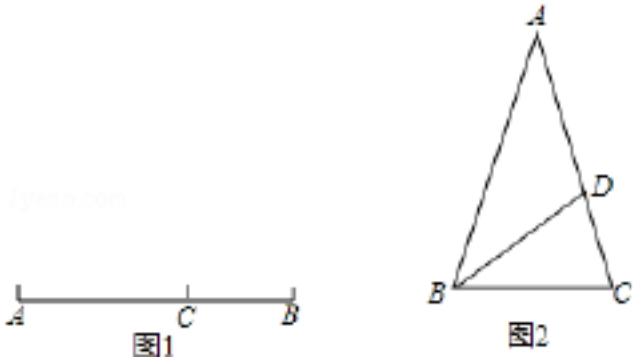


黄金分割专项练习 30 题（有答案）

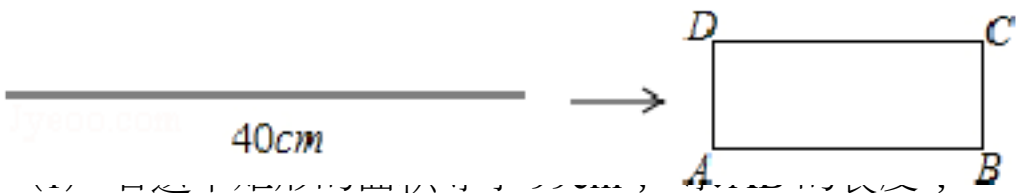
1. 定义：如图 1，点 C 在线段 AB 上，若满足 $AC^2=BC \cdot AB$ ，则称点 C 为线段 AB 的黄金分割点. 如图 2,

$\triangle ABC$ 中, $AB=AC=1$, $\angle A=36^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D.

- (1) 求证：点 D 是线段 AC 的黄金分割点；
- (2) 求出线段 AD 的长.



2. 如图，用长为 40cm 的细铁丝围成一个矩形 ABCD ($AB > AD$).

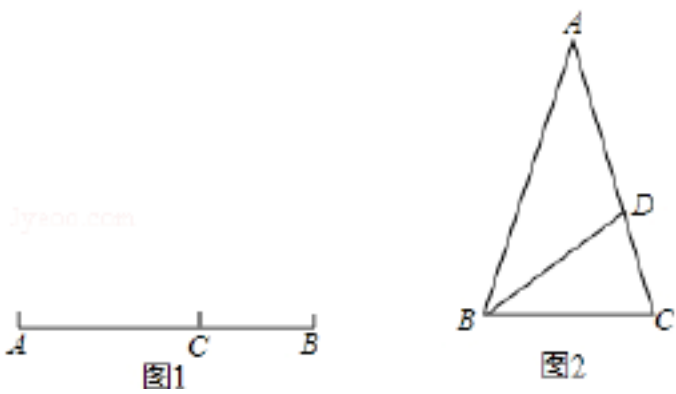


- (2) 这个矩形的面积可能等于 101cm^2 吗？若能，求出 AB 的长度，若不能，说明理由；
- (3) 若这个矩形为黄金矩形 (AD 与 AB 之比等于黄金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$), 求该矩形的面积. (结果保留根号)

3. 定义：如图 1，点 C 在线段 AB 上，若满足 $AC^2=BC \cdot AB$ ，则称点 C 为线段 AB 的黄金分割点

. 如图 2, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $\angle A=36^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D.

- (1) 求证：点 D 是线段 AC 的黄金分割点；
- (2) 求出线段 AD 的长.

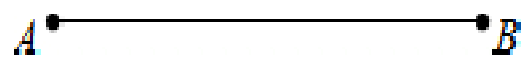


4. 作一个等腰三角形，使得腰与底之比为黄金比.

- (1) 尺规作图并保留作图痕迹；
- (2) 写出你的作法；
- (3) 证明：腰与底之比为黄金比.

5. (1) 已知线段 AB 的长为 2, P 是 AB 的黄金分割点, 求 AP 的长；

(2) 求作线段 AB 的黄金分割点 P , 要求尺规作图, 且使 $AP > PB$.



6. 如图, 线段 AB 的长度为 1.

(1) 线段 AB 上的点 C 满足式 $AC^2 = BC \cdot AB$, 求线段 AC 的长度；

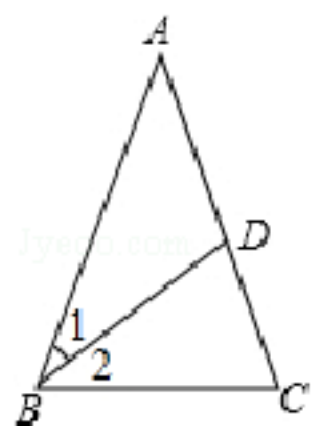
(选做) (2) 线段 AC 上的点 D 满足关系式 $AD^2 = CD \cdot AC$, 求线段 AD 的长度；

(选做) (3) 线段 AD 上的点 E 满足关系式 $AE^2 = DE \cdot AD$, 求线段 AE 的长度；

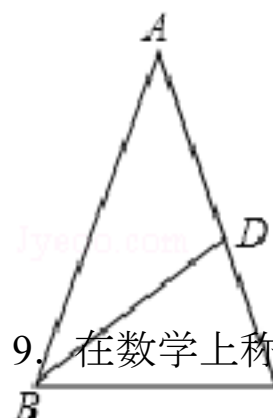
上面各题的结果反映了什么规律？（提示：在每一小题中设 x 和 1）



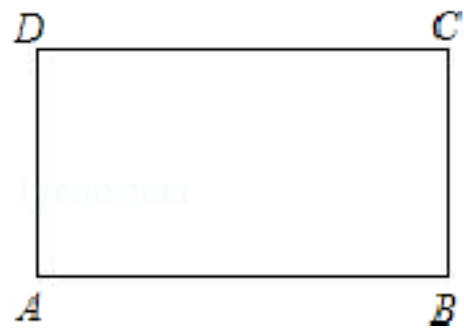
7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$, 请问点 D 是不是线段 AC 的黄金分割点. 请说明理由.



8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $BC=\sqrt{5}-1$, $\angle A=36^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 交于 AC 于 D . 试说明点 D 是线段 AC 的黄金分割点.

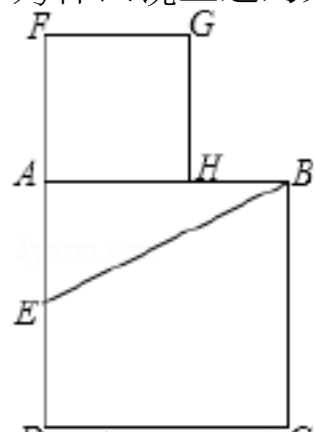


9. 在数学上称长与宽之比为黄金分割比的矩形为黄金矩形, 如在矩形 $ABCD$ 中, 当 $AB=\frac{1+\sqrt{5}}{2}BC$ 时, 称矩形为黄金矩形 $ABCD$. 请你证明黄金矩形是由一个正方形和一个更小的黄金矩形构成.



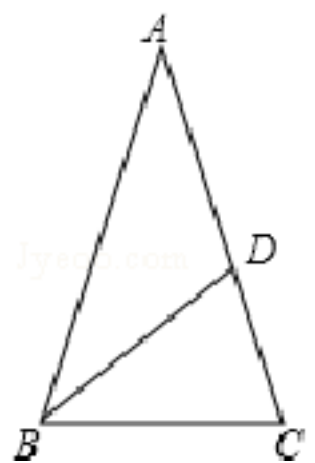
10. 如图, 设 AB 是已知线段, 在 AB 上作正方形 $ABCD$; 取 AD 的中点 E , 连接 EB ; 延长 DA 至 F , 使 $EF=EB$; 以线段 AF 为边作正方形 $AFGH$. 则点 H 是 AB 的黄金分割点.

为什么说上述的方法作出的点 H 是这条线段的黄金分割点, 你能说出其中的道理吗? 请试一试, 说一说.



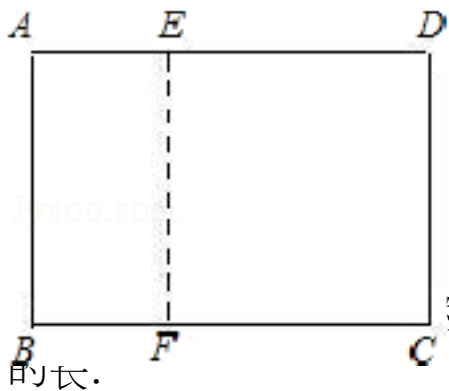
11. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 边上一点, $\angle A=36^\circ$, $\angle C=72^\circ$, $\angle ADB=108^\circ$. 求证:

- (1) $AD=BD=BC$;
- (2) 点 D 是线段 AC 的黄金分割点.

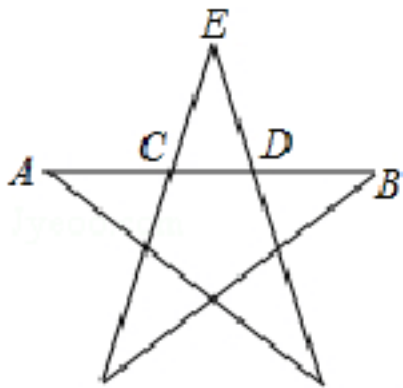


12. 已知 $AB=2$, 点 C 是 AB 的黄金分割线, 点 D 在 AB 上, 且 $AD^2=BD \cdot AB$, 求 $\frac{CD}{AC}$ 的值.

13. 如果一个矩形 ABCD ($AB < BC$) 中, $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 那么这个矩形称为黄金矩形, 黄金矩形给人以美感. 在黄金矩形 ABCD 内作正方形 CDEF, 得到一个小矩形 ABFE (如图), 请问矩形 ABFE 是否是黄金矩形? 请说明你的结论的正确性.



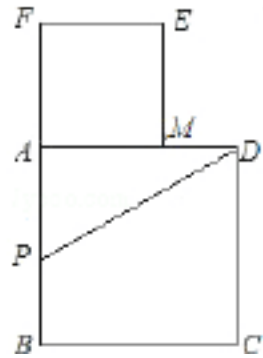
的图形, 如图所示, 其中, 点C, D 分别是线段AB 的黄金分割点, $AB=20\text{cm}$, 求 $EC+CD$ 的长.



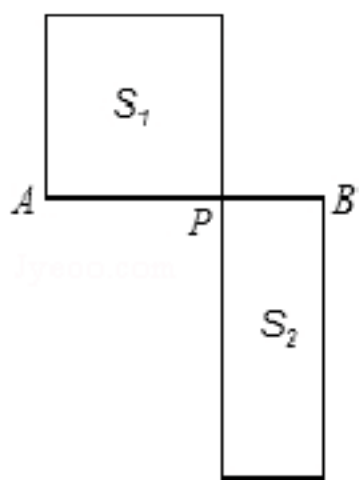
高的黄金分割点, 一般来讲, 当肚脐到脚底的长度与身高的比为0.618 时, 是比较好看的黄金身段. 身高1.70m 的人, 他的肚脐到脚底的长度为多少时才是黄金身段 (保留两位小数) ?

16. 如图所示, 以长为2 的定线段AB 为边作正方形ABCD, 取AB 的中点P, 连接PD, 在BA 的延长线上取点F, 使 $PF=PD$, 以AF 为边作正方形AMEF, 点M 在AD 上.

- (1) 求 AM, DM 的长;
- (2) 点 M 是AD 的黄金分割点吗? 为什么?

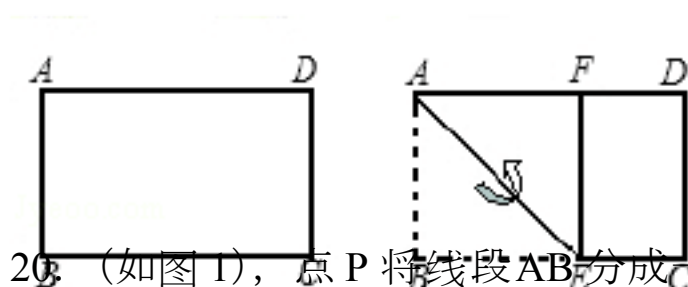


是线段AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 设以AP 为边长的正方形面积为 S_1 , 以PB 为宽和以AB 为长的矩形面积为 S_2 , 试比较 S_1 与 S_2 的大小.

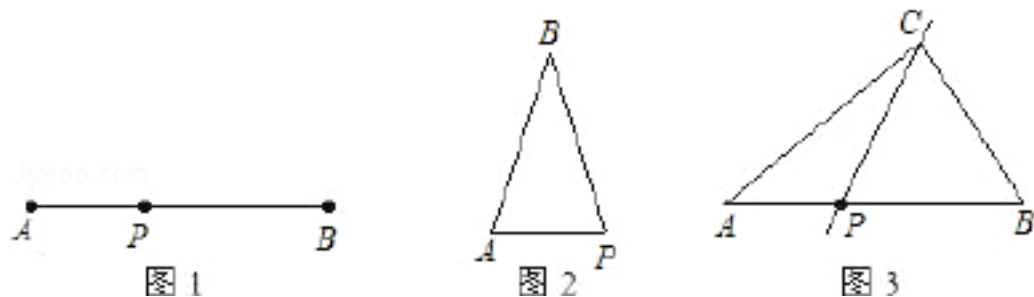


18. 如图，在平行四边形ABCD 中，E 为边AD 延长线上的一点，且D 为AE 的黄金分割点，即 $AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AE$ ，BE 交 DC 于点F，已知 $AB = \sqrt{5} + 1$ ，求 CF 的长.

19. 图 1 是一张宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ 的矩形纸片，我们称这样的矩形为黄金矩形. 同学们都知道按图2 所示的展开，可以得到一个正方形ABEF 和一个矩形EFDC，那么EFDC 这个矩形还是黄金矩形吗？若是，请根据图 2 证明你的结论；若不是，请说明理由.



20. (如图 1)，点 P 将线段 AB 分成一条较小线段 AP 和一条较大线段 BP，如 $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB}$ ，那么称点 P 为线段 AB 的黄金分割点，设 $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB} = k$ ，则 k 就是黄金比，并且 $k \approx 0.618$.



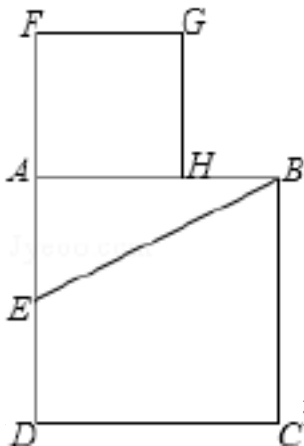
(1) 以图 1 中的 AP 为底，BP 为腰得到等腰 $\triangle APB$ (如图 2)，等腰 $\triangle APB$ 即为黄金三角形，黄金三角形的定义为：满足 $\frac{\text{底}}{\text{腰}} = \frac{\text{腰}}{\text{底} + \text{腰}} \approx 0.618$ 的等腰三角形是黄金三角形；类似地，请你给出黄金矩形的定义：_____；

(2) 如图 3，设 $AB = 1$ ，请你说明为什么 k 约为 0.618；

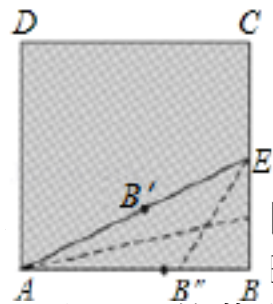
- (3) 由线段的黄金分割点联想到图形的“黄金分割线”，类似地给出“黄金分割线”的定义：直线l将一个面积为S的图形分成面积为 S_1 和面积为 S_2 的两部分（设 $S_1 < S_2$ ），如 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S}$ ，那么称直线l为该图形的黄金分割线.（如图3），点P是线段AB的黄金分割点，那么直线CP是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线吗？请说明理由；
- (4) 图3中的 $\triangle ABC$ 的黄金分割线有几条？

21. 在人体躯干（脚底到肚脐的长度）与身高的比例上，肚脐是理想的黄金分割点，即比例越接近0.618，越给人以美感. 张女士原来脚底到肚脐的长度与身高的比为0.60，她的身高为 1.60m，她应该选择多高的高跟鞋穿上看起来更美？（精确到十分位）

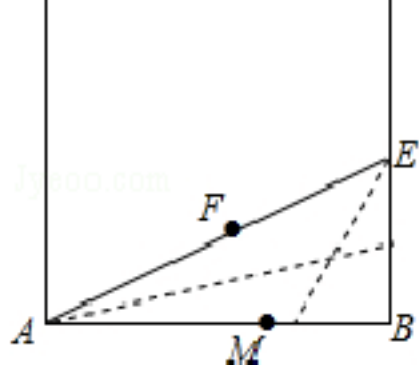
22. 已知线段AB，按照如下的方法作图：以AB为边作正方形ABCD，取AD的中点E，连接EB，延长DA到F，使EF=EB，以线段AF为边，作正方形AFGH，那么点H是线段AB的黄金分割点吗？请说明理由.



折出黄金分割点：裁一张正方形的纸片ABCD，先折出BC的中点E，再折出线段AE，然后通过折叠使EB落到线段EA上，折出点B的新位置B'，因而EB'=EB. 类似地，在AB上折出点B''使AB''=AB'. 这时B''就是AB的黄金分割点. 请你证明这个结论.



折出黄金分割点：裁一张边长为2的正方形纸片ABCD，先折出BC的中点E，再折出线段AE，然EB落在线段EA上，折出点B的新位置F，因而EF=EB. 类似的，在AB上折出点M使AM=AF. 则M是AB的黄金分割点吗？若是请你证明，若不是请说明理由.



25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D 在边AB 上，且 $DB=DC=AC$ ，已知 $\angle ACE=108^\circ$ ， $BC=2$.

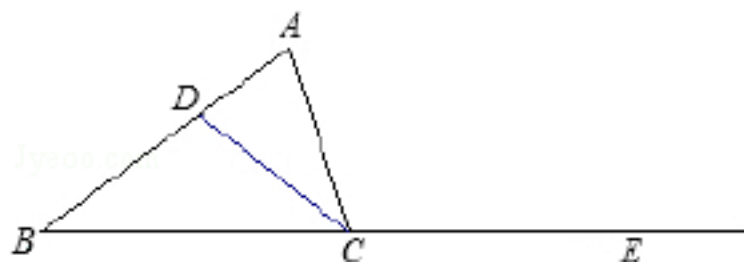
(1) 求 $\angle B$ 的度数；

(2) 我们把有一个内角等于 36° 的等腰三角形称为黄金三角形. 它的腰长与底边长的比（或者底边长与腰长的比）等于黄金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

①写出图中所有的黄金三角形，选一个说明理由；

②求AD 的长；

③在直线AB 或 BC 上是否存在点P（点 A、B 除外），使 $\triangle PDC$ 是黄金三角形？若存在，在备用图中画出点P，简要说明画出点P 的方法（不要求证明）；若不存在，说明理由.



26. 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫黄金矩形. 心理测试表明：黄金矩形令人赏心悦目，它给我们以协调，匀称的美感. 现将小波同学在数学活动课中，折叠黄金矩形的方法归纳如下（如图所示）：

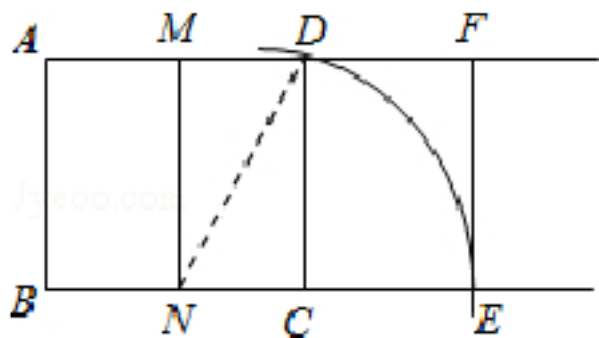
第一步：作一个正方形ABCD；

第二步：分别取AD，BC 的中点M，N，连接MN；

第三步：以N 为圆心，ND 长为半径画弧，交BC 的延长线于E；

第四步：过E 作 $EF \perp AD$ ，交AD 的延长线于F.

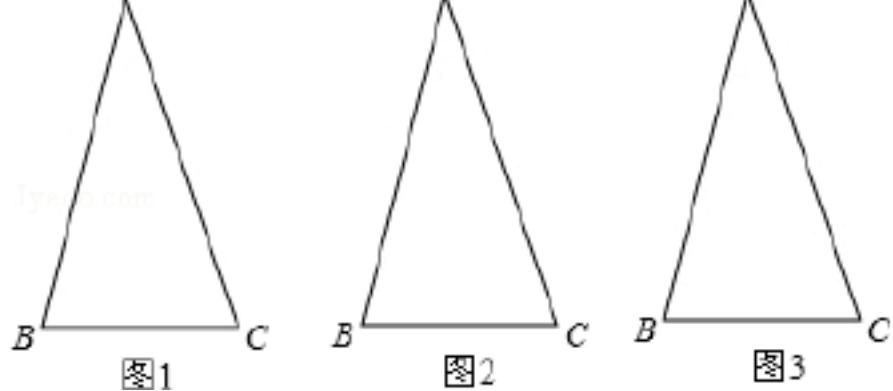
请你根据以上作法，证明矩形DCEF 为黄金矩形.



27. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ ，把像这样的三角形叫做黄金三角形.

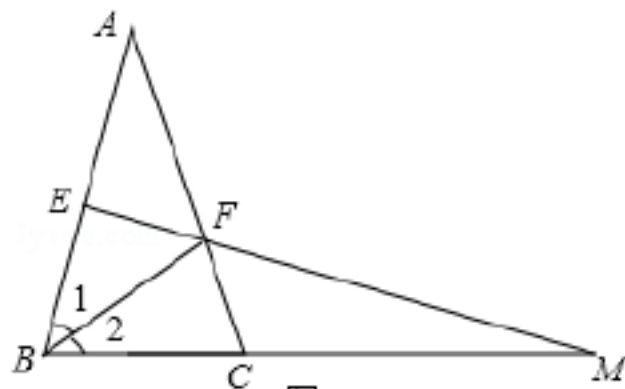
(1) 请你设计三种不同的分法，将黄金三角形ABC 分割成三个等腰三角形，使得分割成的三角形中含有两个黄金三角形（画图工具不限，要求画出分割线段；标出能够说明不同分法所得三角形的内角度数，不要求写画法，不要求证明. 分别画在图 1，图 2，图 3 中）

注：两种分法只要有一条分割线段位置不同，就认为是两种不同的分法.



(2) 如图 4 中，BF 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 F，取 AB 的中点 E，连接 EF 并延长交 BC 的延长线于 M。试判断 CM 与 AB 之间的数量关系？只需说明结果，不用证明。

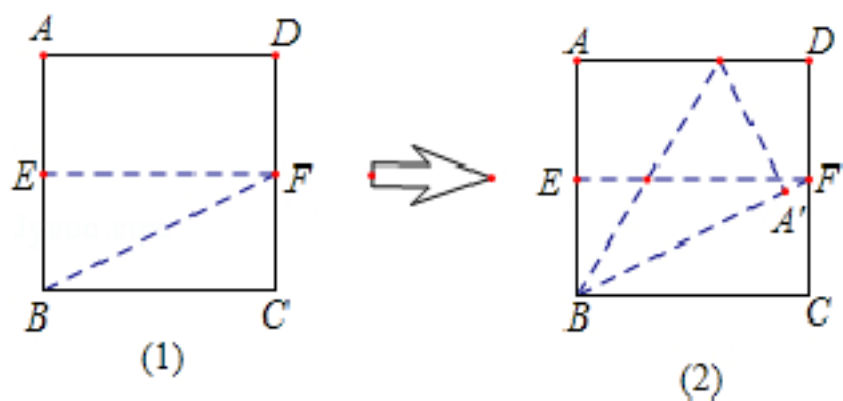
答：CM 与 AB 之间的数量关系是_____。



28. 折纸与证明——用纸折出黄金分割点：

第一步：如图（1），先将一张正方形纸片 ABCD 对折，得到折痕 EF；再折出矩形 BCFE 的对角线 BF。

第二步：如图（2），将 AB 边折到 BF 上，得到折痕 BG，试说明点 G 为线段 AD 的黄金分割点（ $AG > GD$ ）



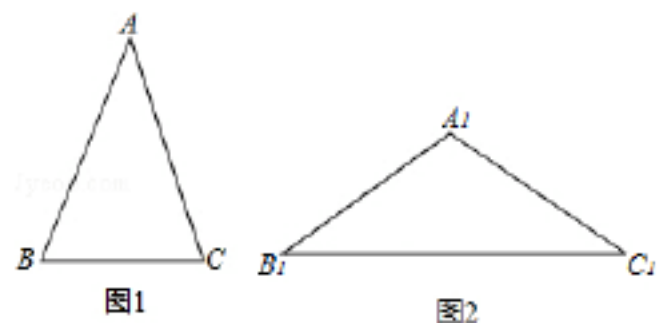
29. 三角形中，顶角等于 36° 的等腰三角形称为黄金三角形，如图1，在 $\triangle ABC$ 中，已知： $AB=AC$ ，且 $\angle A=36^\circ$ 。

(1) 在图 1 中，用尺规作 AB 的垂直平分线交 AC 于 D，并连接 BD（保留作图痕迹，不写作法）；

(2) $\triangle BCD$ 是不是黄金三角形？如果是，请给出证明；如果不是，请说明理由；

(3) 设 $\frac{BC}{AC}=k$ ，试求 k 的值；

(4) 如图 2，在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，已知 $A_1B_1=A_1C_1$ ， $\angle A_1=108^\circ$ ，且 $A_1B_1=AB$ ，请直接写出 $\frac{BC}{B_1C_1}$ 的值。



30. 如图 1，点C 将线段AB 分成两部分，如果 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$ ，那么称点C 为线段AB 的黄金分割点. 某研究小组在进行课题学习时，由黄金分割点联想到“黄金分割线”，类似地给出“黄金分割线”的定义：直线l 将一个面积为S 的

图形分成两部分，这两部分的面积分别为 S_1, S_2 ，如果 $\frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S_1}$ ，那么称直线l 为该图形的黄金分割线.

Ø 研究小组猜想：在 $\triangle ABC$ 中，若点D 为 AB 边上的黄金分割点（如图 2），则直线CD 是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线. 你认为对吗？为什么？

Ø 请你说明：三角形的中线是否也是该三角形的黄金分割线？

Ø 研究小组在进一步探究中发现：过点 C 任作一条直线交AB 于点E，再过点 D 作直线 $DF \parallel CE$ ，交 AC 于点F，连接EF（如图 3），则直线 EF 也是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线. 请你说明理由.

Ø 如图 4，点E 是平行四边形ABCD 的边AB 的黄金分割点，过点E 作 $EF \parallel AD$ ，交 DC 于点F，显然直线EF 是平行四边形ABCD 的黄金分割线. 请你画一条平行四边形ABCD 的黄金分割线，使它不经过平行四边形ABCD 各边黄金分割点.

