# 2.1等式性质与不等式性质（第二课时）

# 知 识 回 顾

1.不等式与不等关系：

用不等式表示不等关系，注意文字语言与符号语言之间的转化．

2.比较两个实数大小关系的依据：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0$$

3.作差比较法：

作差 → 变形 → 判断符号 → 作出结论

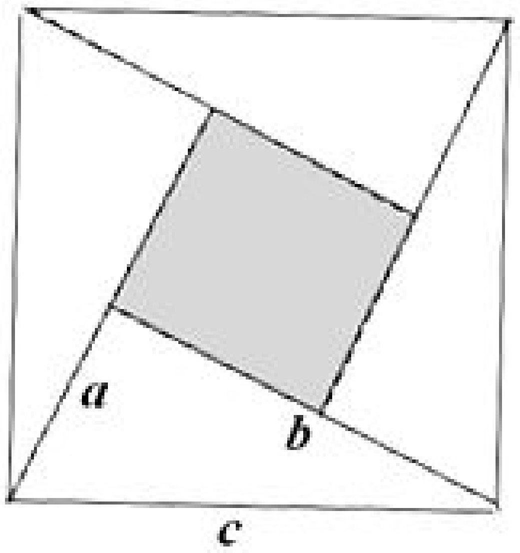
# 一个重要不等式

右图是在北京召开的第24届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客，你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗？

## 弦图

很显然赵爽弦图是我们在初中研究勾股定理时的模型，我们把它抽象成如图所示的图形.

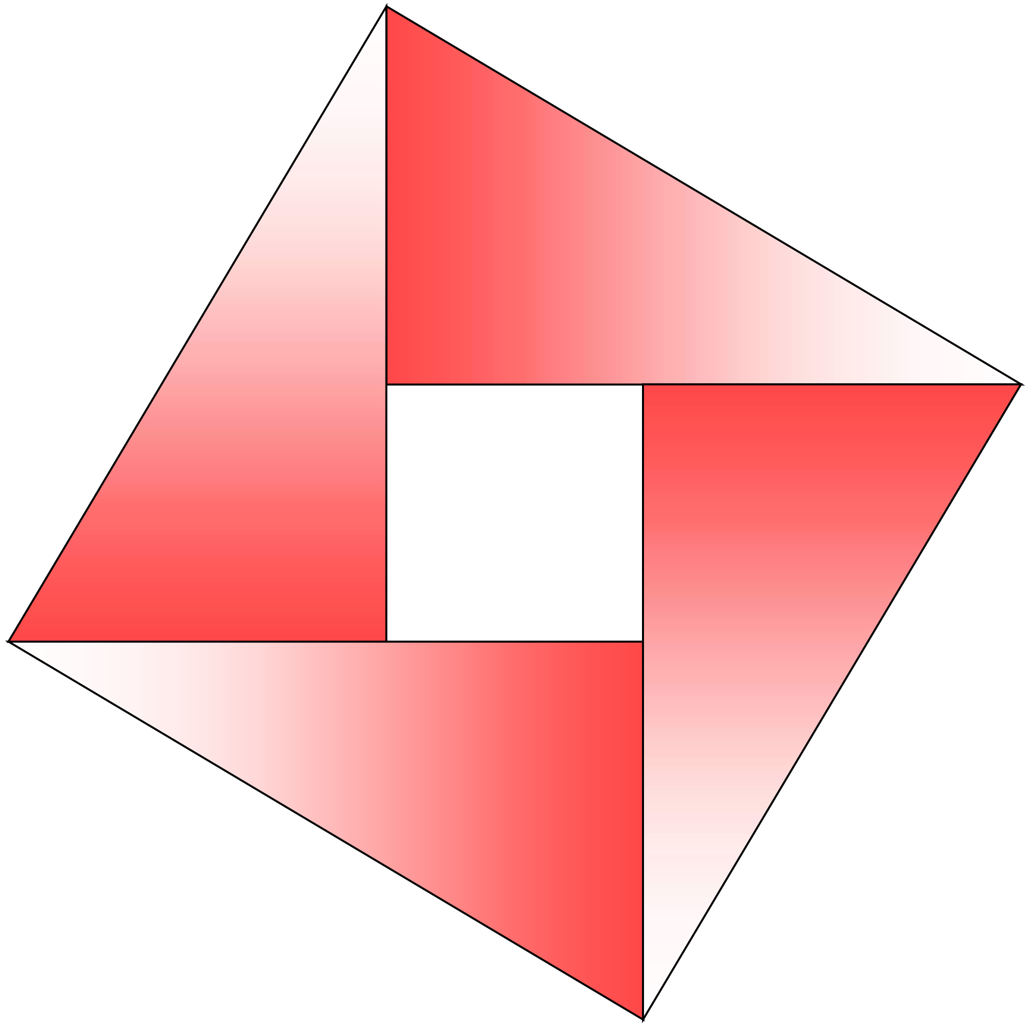
**设图中直角三角形的两个直角边长为a,b,斜边为c**




证明：$\because 4\cdot(\frac{1}{2}ab)+(b-a)^2=c^2$

$\therefore 2ab+(b^2-2ab+a^2)=c^2$

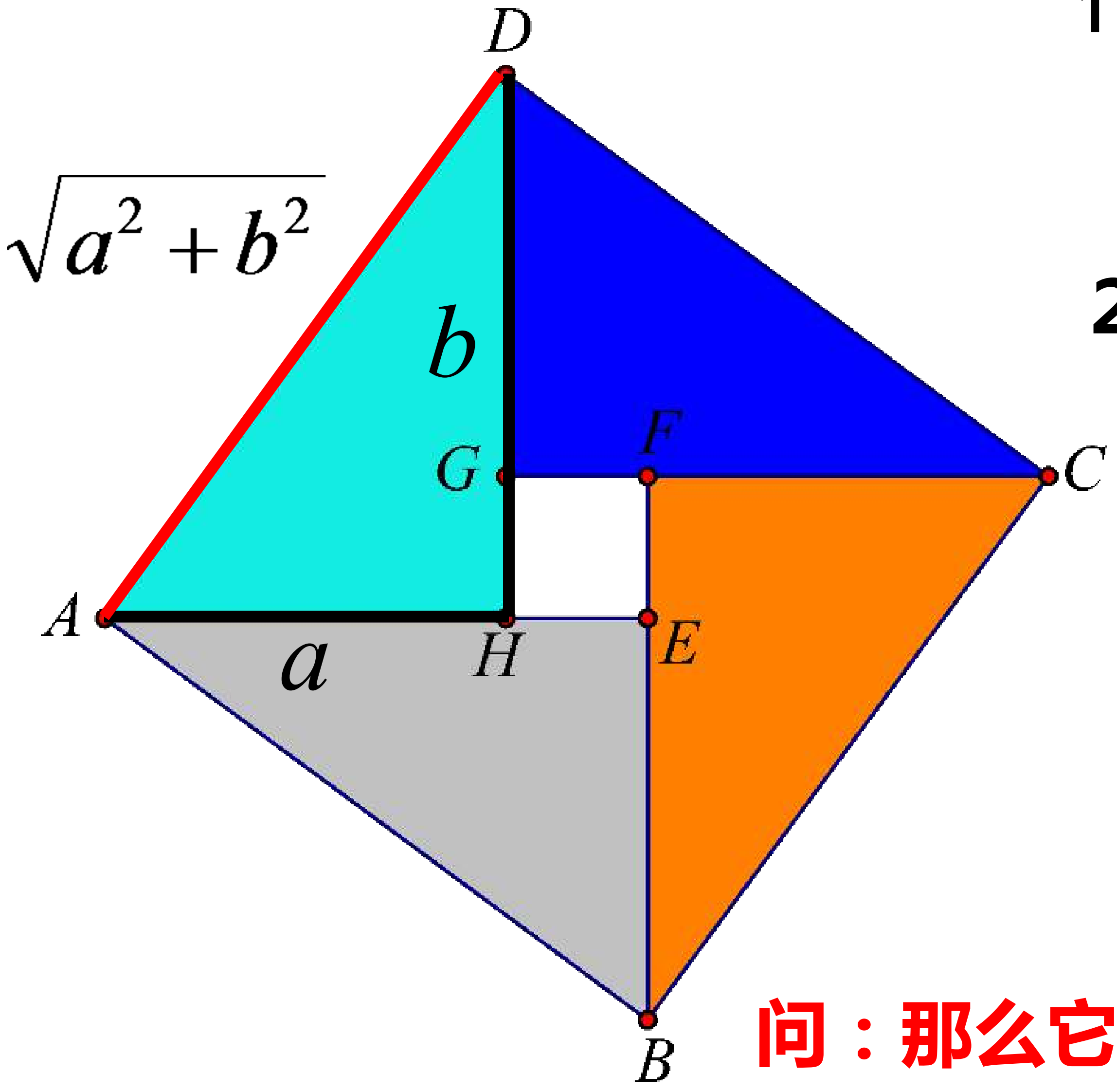
$\therefore a^2+b^2=c^2$



思考：这会标中含有怎样的几何图形？

直角三角形,正方形

思考：你能否在这个图案中找出一些相等关系或不等关系？




1、正方形ABCD的面积

S=$\underline{a^2+b^2}$

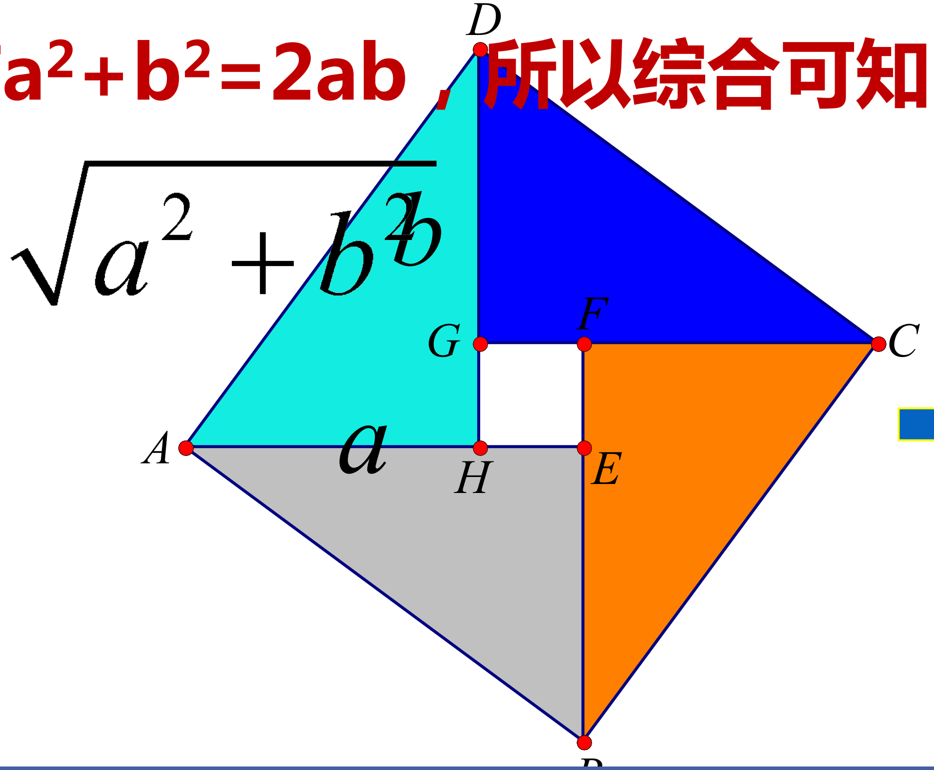
2、四个直角三角形的面积和S/ = $\underline{2ab}$.

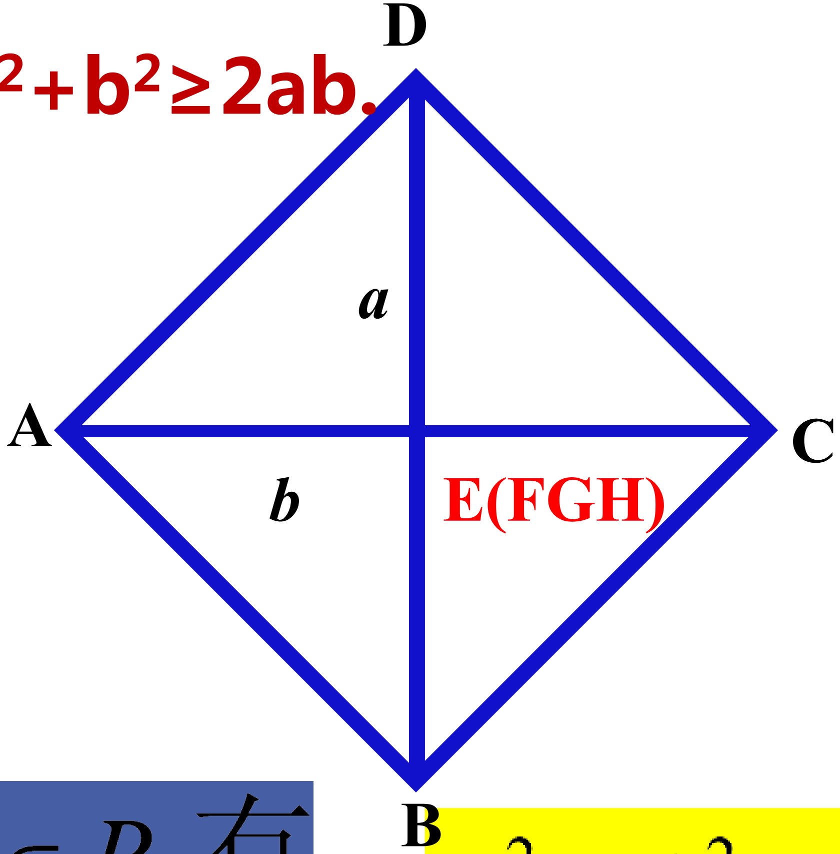
3、S与S/有什么样的关系？ $S > S'$

$$\boxed{a^2+b^2>2ab}$$

问：那么它们有相等的情况吗？

当直角三角形变为等腰直角三角形时，内部的小正方形变成了一个点，此时a=b，有$a^2+b^2=2ab$，所以综合可知，$a^2+b^2\geq 2ab$.




重要不等式：一般地，$\forall a,b\in R$，有

$$a^2+b^2\geq 2ab$$

当且仅当$a=b$时，等号成立。

适用范围：$a,b\in R$

**思考：你能给出不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$ 的证明吗？**

**证明：（作差法）** $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

当 $a\neq b$ 时， $(a-b)^2>0$

当 $a=b$ 时， $(a-b)^2=0$

所以 $(a-b)^2\geq 0$

所以 $a^2+b^2\geq 2ab.$

*即 $a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立*

**思考:请你先梳理等式的基本性质,再观察它们的共性.你能归纳一下发现等式基本性质的方法吗?**

等式有下面的基本性质

**性质1**　如果$a=b$，那么$b=a$；（对称性）

**性质2**　如果$a=b$，$b=c$，那么$a=c$；（传递性）

**性质3**　如果$a=b$，那么$a\pm c=b\pm c$；（加法）

**性质4**　如果$a=b$，那么$ac=bc$；（乘法）

**性质5**　如果$a=b$，$c\neq 0$，那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.（乘法）

可以发现,性质1,2反映了相等关系自身的特性,性质3,4,5是从运算的角度提出的,反映了等式在运算中保持的不变性.(运算的不变性即为性质)

探究 类比等式的基本性质，你能猜想不等式的基本性质吗，并加以证明吗？

| | 等式 | 不等式 |
| --- | --- | --- |
| 对称性 | $a=b \Leftrightarrow b=a$ | $a>b \Leftrightarrow b<a$ |
| 传递性 | $a=b，\ b=c \Rightarrow a=c$ | $a>b, b>c \Rightarrow a>c$ |

**性质1表明**，把不等式的左边和右边交换位置，所得不等式与原不等式异向，我们把这种性质称为不等式的**对称性**．

性质2也可以表示为$c<b$，$b<a$，则$c<a$.这个性质是不等式的**传递性**．

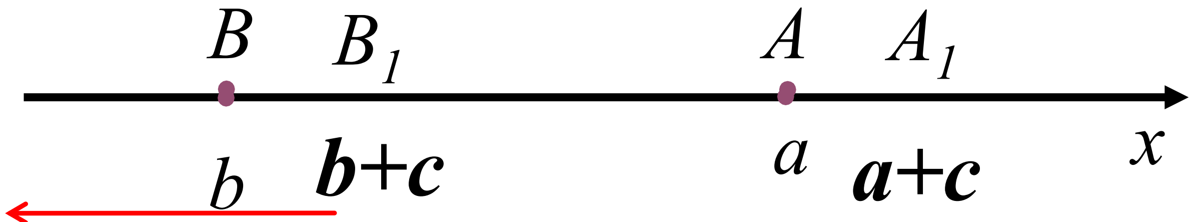
**证明：**

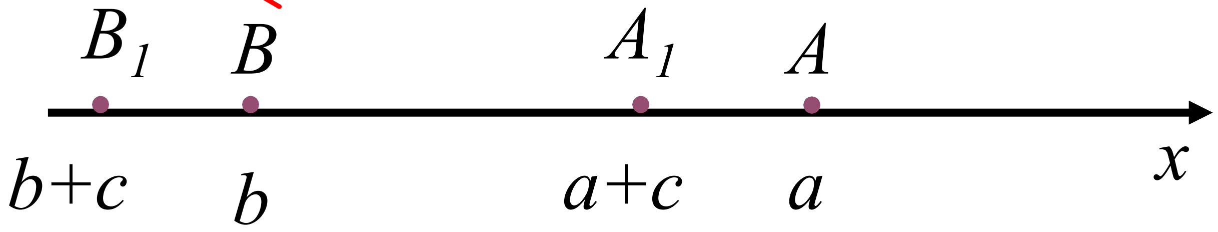
$$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b>0 \\ b>c \Rightarrow b-c>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)+(b-c)>0 \Rightarrow a-c>0$$

| | 等式 | 不等式 |
|---|---|---|
| 加法 | $a=b$<br>$\Rightarrow a\pm c=b\pm c$ | $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$<br>$a+b>c\Rightarrow$<br>$a>c-b$ |

**文字语言**：不等式的两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向．

几何解释：




移项法则：$a+b>c\Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)\Rightarrow a>c-b$

不等式中任何一项可以改变符号后移到不等号的另一边.

| | 等式 | 不等式 |
| --- | --- | --- |
| 乘法 | $a=b$<br>c<br>$ac=bc$<br>其中$c\neq 0$ | $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$<br>$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$ |

**注：**

**不等式两边同乘一个正数，不等式方向不变；**

**不等式两边同乘一个负数，不等式方向相反．**