

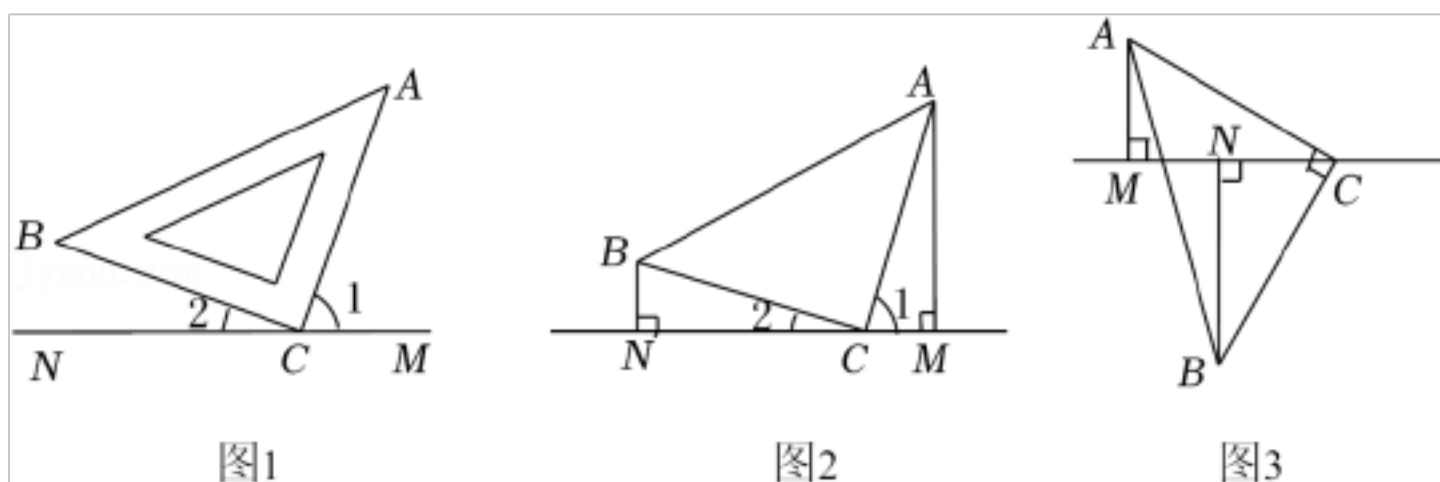
一线三等角模型证全等

1. 如图 把一块直角三角尺 ABC 的直角顶点 C 放置在水平直线 MN 上 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$ $AC=BC$ 试回答下列问题:

(1) 若把三角尺 ABC 绕着点 C 按顺时针方向旋转 当 $AB \parallel MN$ 时 $\angle 2 = \underline{\quad 45 \quad}$ 度;

(2) 在三角尺 ABC 绕着点 C 按顺时针方向旋转过程中 分别作 $AM \perp MN$ 于 M $BN \perp MN$ 于 N 若 $AM=6$ $BN=2$ 求 MN .

(3) 三角尺 ABC 绕着点 C 按顺时针方向继续旋转到图 3 的位置 其他条件不变 则 AM 、 BN 与 MN 之间有什么关系? 请说明理由.



【解答】解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$ $\angle ACB=90^\circ$

$$\therefore \angle B = \angle A = 45^\circ$$

$$\because AB \parallel MB$$

$$\therefore \angle 2 = \angle B = 45^\circ$$

故答案为 45;

(2) $\because AM \perp MN$ 于 M $BN \perp MN$ 于 N

$$\therefore \angle AMC = 90^\circ \quad \angle BNC = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle 1 + \angle CAM = 90^\circ$$

$$\text{又} \because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = \angle CAM$$

同理: $\angle 1 = \angle CBN$

在 $\triangle AMC$ 和 $\triangle CNB$ 中

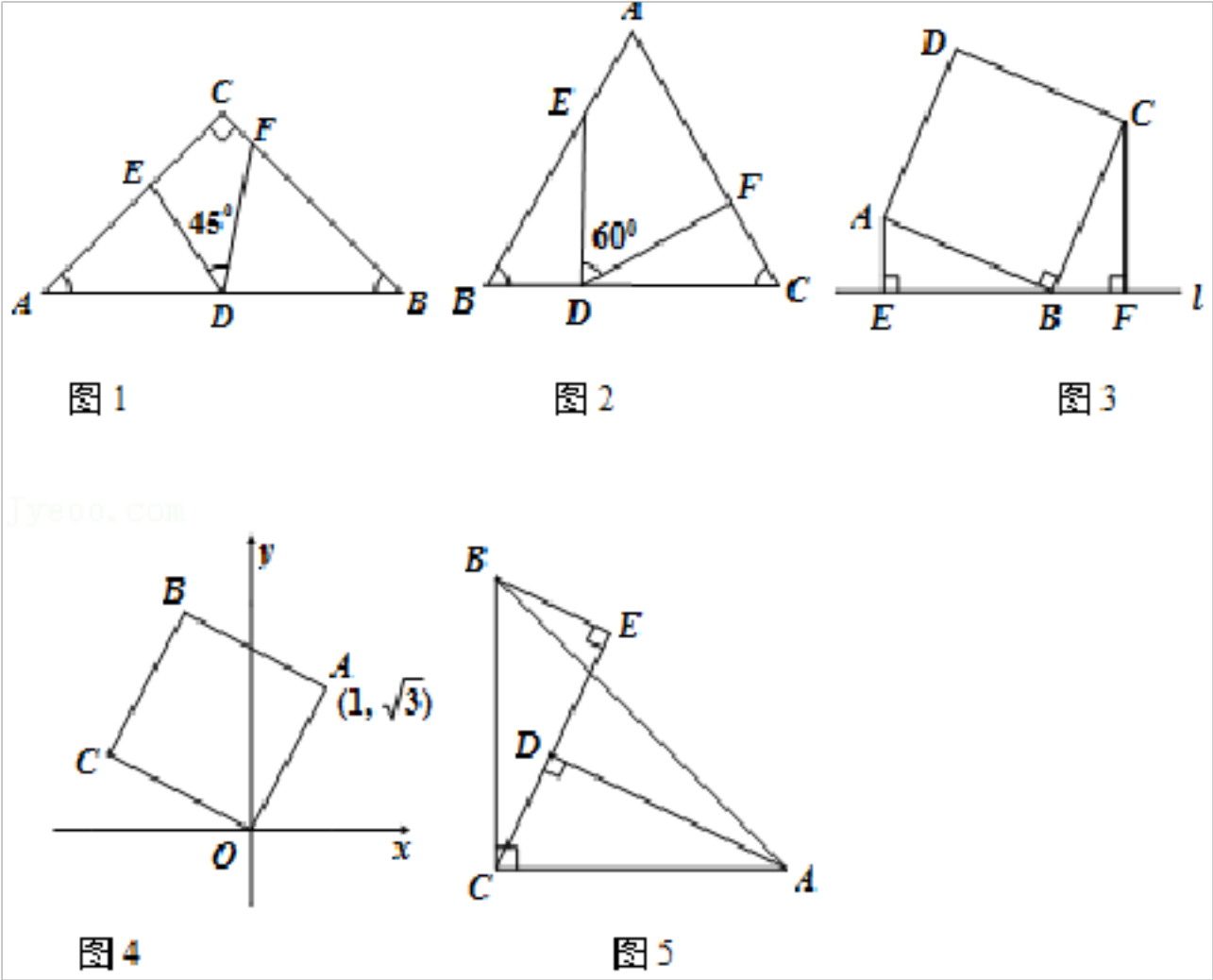
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle CBN \\ AC = BC \\ \angle CAM = \angle 2 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle CNB \text{ (ASA)}$$

$\therefore AM=CN \quad MC=BN$
 $\therefore MN=MC+CN=AM+BN=2+6=8;$

(3) $MN=BN-AM$ 理由：
 同(2)的方法得 $\triangle AMC\cong\triangle CNB$ (ASA)
 $\therefore AM=CN \quad MC=BN$
 $\therefore MN=MC-CN=BN-AM.$

2. 【感知模型】“一线三等角”模型是平面几何图形中的重要模型之一 请根据以下问题 把你的感知填写出来：



- ①如图 1 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形 $\angle C=90^\circ$ 点 D 为 AB 中点 则 $\triangle AED\sim \triangle BDF$ ；
 ②如图 2 $\triangle ABC$ 为正三角形 $BD=CF$ $\angle EDF=60^\circ$ 则 $\triangle BDE\cong \triangle CFD$ ；
 ③如图 3 正方形 $ABCD$ 的顶点 B 在直线 l 上 分别过点 A 、 C 作 $AE\perp l$ 于 E $CF\perp l$ 于 F . 若 $AE=1$ $CF=2$ 则 EF 的长为 3.

【模型应用】

(2) 如图 4 将正方形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中 点 O 为原点 点 A 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ 则点 C 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$.

【模型变式】

(3) 如图 5 所示 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB=90^\circ$ $AC=BC$ $BE\perp CE$ 于 D $DE=4\text{cm}$ $AD=6\text{cm}$ 求 BE 的长.

【解答】解：（1）①如图 1 $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$$

$\because$ 点 D 是 AB 的中点

$$\therefore AD = BD$$

$$\because \angle EDB = \angle A + \angle AED = \angle EDF + \angle FDB$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDB$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BDF$$

故答案为 $\triangle BDF$ ；

② $\because \triangle ABC$ 是等边三角形

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$$

$$\because \angle EDC = \angle B + \angle BED = \angle EDF + \angle FDC$$

$$\therefore \angle BED = \angle FDC$$

又 $\because BD = CF$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CFD \text{ (AAS)}$$

故答案为： $\triangle CFD$ ；

③ $\because$ 四边形 ABCD 是正方形

$$\therefore AB = BC \quad \angle ABC = 90^\circ$$

$$\because AE \perp EF \quad CF \perp EF$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CFB = 90^\circ = \angle ABC$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ = \angle ABE + \angle CBF$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CBF$$

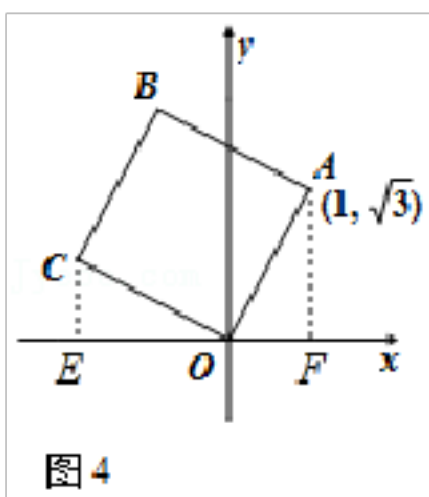
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AE = BF = 1 \quad BE = CF = 2$$

$$\therefore EF = 3$$

故答案为： 3；

（2）如图④ 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于 F 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于 E



∵点 A 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$

∴ $AF = \sqrt{3}$ $OF = 1$

∵四边形 ABCO 是正方形

∴ $AO = OC$ $\angle AOC = 90^\circ$

∵ $AF \perp EF$ $CE \perp EF$

∴ $\angle AFO = \angle CEO = 90^\circ = \angle AOC$

∴ $\angle AOF + \angle FAO = 90^\circ = \angle AOF + \angle COE$

∴ $\angle COE = \angle FAO$

∴ $\triangle AOF \cong \triangle OCE$ (SAS)

∴ $CE = OF = 1$ $OE = AF = \sqrt{3}$

∴点 C 坐标为： $(-\sqrt{3}, 1)$

故答案为： $(-\sqrt{3}, 1)$;

(3) 如图⑤ ∵ $AD \perp CE$ $BE \perp CE$

∴ $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$

∵ $\angle DCA + \angle BCE = 90^\circ$ $\angle DCA + \angle DAC = 90^\circ$

∴ $\angle DAC = \angle BCE$

又 ∵ $AC = BC$

∴ $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ (AAS)

∴ $CE = AD = 6\text{cm}$ $CD = BE$

∴ $BE = CD = CE - DE = 6 - 4 = 2\text{cm}$.

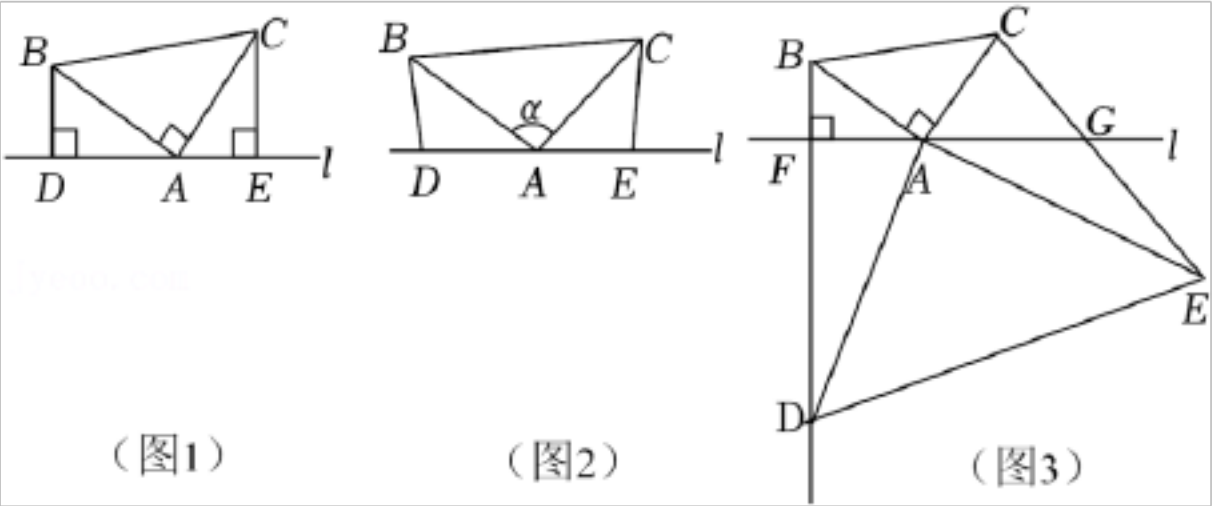
3. 直线 l 经过点 A $\triangle ABC$ 在直线 l 上方 $AB = AC$.

(1) 如图 1 $\angle BAC = 90^\circ$ 过点 B C 作直线 l 的垂线 垂足分别为 D、E. 求证： $\triangle ABD \cong \triangle CAE$;

(2) 如图 2 D A E 三点在直线 l 上 若 $\angle BAC = \angle BDA = \angle AEC = \alpha$ (α 为任意锐角或钝角)

猜想线段 DE、BD、CE 有何数量关系? 并给出证明;

(3) 如图 3 $\angle BAC=90^\circ$ 过点 B 作直线 l 上的垂线 垂足为 F 点 D 是 BF 延长线上的一个动点 连结 AD 作 $\angle DAE=90^\circ$ 使得 $AE=AD$ 连结 DE CE. 直线 l 与 CE 交于点 G. 求证: G 是 CE 的中点.



【解答】(1) 证明: $\because BD \perp l \quad CE \perp l$

$$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DAB = 90^\circ$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CAE + \angle DAB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CAE$ 中

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE \text{ (AAS);}$$

(2) 解: 猜想: $DE = BD + CE$

$$\because \angle BDA = \angle BAC = \alpha$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DAB = 180^\circ - \angle BDA = 180^\circ - \alpha \quad \angle CAE + \angle DAB = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CAE$ 中

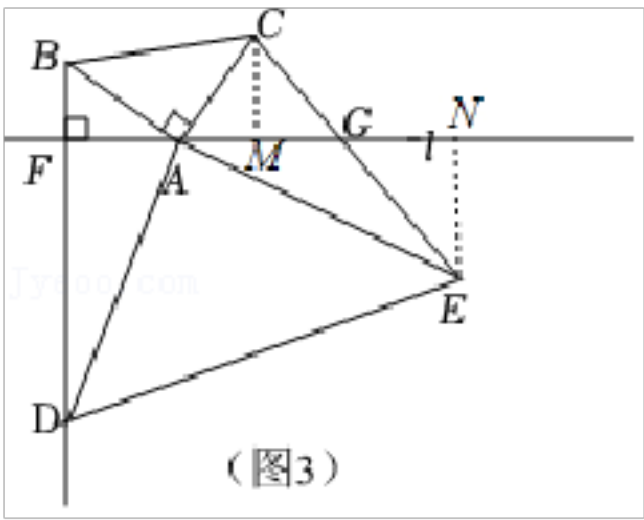
$$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BD = AE \quad DA = EC$$

$$\therefore DE = AE + DA = BD + CE;$$

(3) 证明: 分别过点 C、E 作 $CM \perp l \quad EN \perp l$



由（1）可知 $\triangle ABF \cong \triangle CAM$ $\triangle ADF \cong \triangle EAN$

$\therefore AF = CM$ $AF = EN$

$\therefore CM = EN$

$\because CM \perp l$ $EN \perp l$

$\therefore \angle CMG = \angle ENG = 90^\circ$

在 $\triangle CMG$ 与 $\triangle ENG$ 中

$$\begin{cases} \angle CMG = \angle ENG \\ \angle CGM = \angle EGN \\ CM = EN \end{cases}$$

$\therefore \triangle CMG \cong \triangle ENG$ (AAS)

$\therefore CG = EG$

$\therefore G$ 为 CE 的中点.

4. 已知：在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$ 直线 l 过点 A .

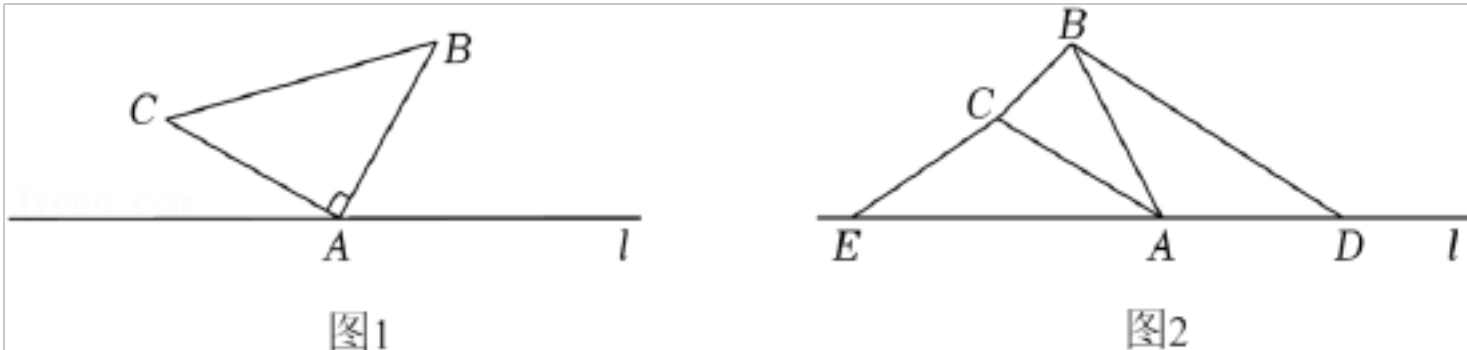
（1）如图 1 $\angle BAC = 90^\circ$ 分别过点 B C 作直线 l 的垂线段 BD CE 垂足分别为 D E .

①依题意补全图 1；

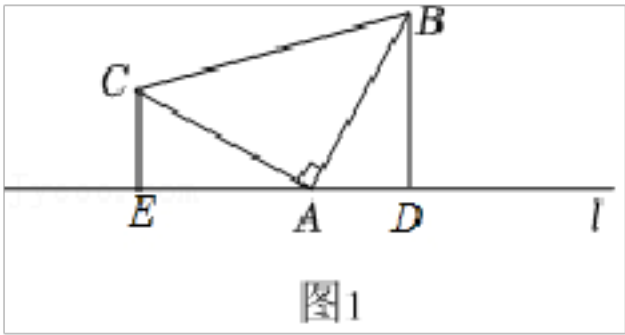
②用等式表示线段 DE BD CE 之间的数量关系 并证明.

（2）如图 2 当 $\angle BAC \neq 90^\circ$ 时 设 $\angle BAC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 作 $\angle CEA = \angle BDA = \alpha$ 点

D E 在直线 l 上 直接用等式表示线段 DE BD CE 之间的数量关系为 $DE = BD + CE$.



【解答】解：（1）①依题意补全图形如图 1 所示.



②用等式表示 DE BD CE 之间的数量关系为 $DE=BD+CE$.

证明：∵ $CE \perp l$ $BD \perp l$

∴ $\angle CEA = \angle ADB = 90^\circ$.

∴ $\angle ECA + \angle CAE = 90^\circ$.

∵ $\angle BAC = 90^\circ$ 直线 l 过点 A

∴ $\angle CAE + \angle BAD = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ$.

∴ $\angle ECA = \angle BAD$.

又 ∵ $AC = AB$

∴ $\triangle CEA \cong \triangle ADB$ (AAS)

∴ $CE = AD$ $AE = BD$.

∴ $DE = AE + AD = BD + CE$.

(2) 用等式表示 DE BD CE 之间的数量关系为 $DE=BD+CE$

理由如下：∵ $\angle BAE$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角

∴ $\angle BAE = \angle ADB + \angle ABD$

∵ $\angle BDA = \angle BAC$

∴ $\angle ABD = \angle CAE$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle ADB = \angle CEA \\ BA = AC \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS)

∴ $AD = CE$ $BD = AE$

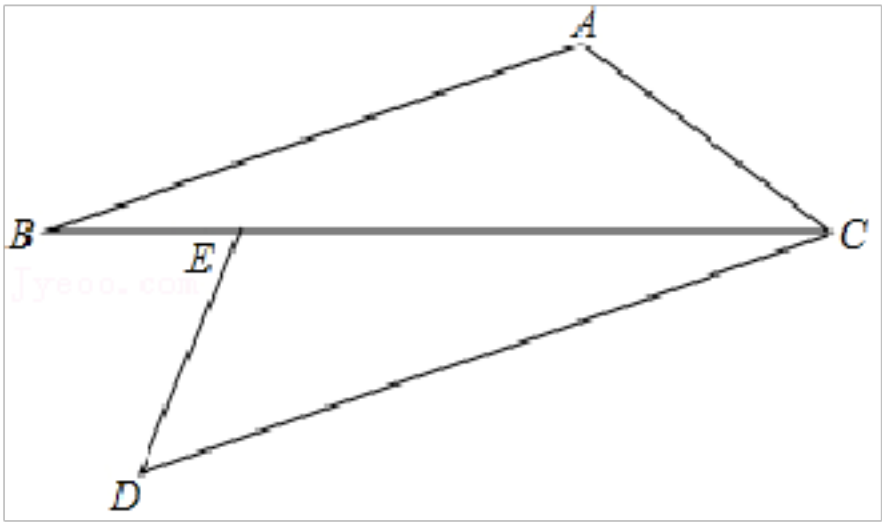
∴ $DE = AD + AE = BD + CE$.

故答案为： $DE=BD+CE$.

5. 如图 $CD \parallel AB$ $CD = CB$ 点 E 在 BC 上 $\angle D = \angle ACB$.

(1) 求证： $CE = AB$.

(2) 若 $\angle A = 125^\circ$ 则 $\angle BED$ 的度数是 55°.



【解答】证明：(1) $\because CD \parallel AB$

$$\therefore \angle B = \angle DCE$$

在 $\triangle DEC$ 与 $\triangle CAB$ 中

$$\begin{cases} \angle D = \angle ACB \\ CB = CD \\ \angle B = \angle DCE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEC \cong \triangle CAB \text{ (ASA)}$$

$$\therefore CE = AB;$$

解：(2) $\because \triangle DEC \cong \triangle CAB$

$$\therefore \angle CED = \angle A = 125^\circ$$

$$\therefore \angle BED = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

故答案为： 55° .

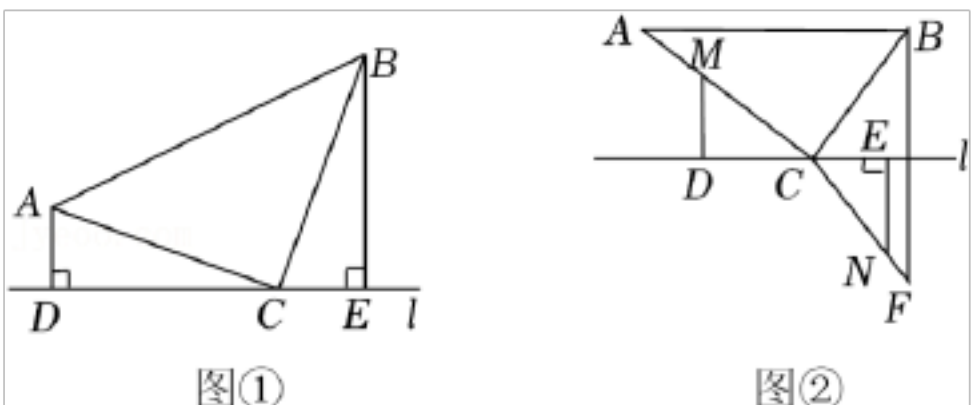
6. 直角三角形 ABC 中 $\angle ACB = 90^\circ$ 直线 l 过点 C.

(1) 当 $AC = BC$ 时 如图① 分别过点 A B 作 $AD \perp l$ 于点 D $BE \perp l$ 于点 E. 试说明 $AD = CE$;

(2) 当 $AC = 8$ $BC = 6$ 时 如图② 点 B 与点 F 关于直线 l 对称 连接 BF CF 动点 M 从点 A 出发 以每秒 1 个单位长度的速度沿 AC 边向终点 C 运动 同时动点 N 从点 F 出发 以每秒 3 个单位的速度沿 $F \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ 向终点 F 运动 点 M N 到达相应的终点时停止运动 过点 M 作 $MD \perp l$ 于点 D 过点 N 作 $NE \perp l$ 于点 E 设运动时间为 t 秒.

① $CM = \underline{8 - t}$ 当 N 在 $F \rightarrow C$ 路径上时 $CN = \underline{6 - 3t}$; (用含 t 的代数式表示)

② 当 $\triangle MDC$ 与 $\triangle CEN$ 全等时 求 t 的值.



【解答】解：（1） $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 全等．

理由如下： $\because AD \perp$ 直线 l

$$\therefore \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCE + \angle ACD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ECB$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle DAC = \angle ECB \\ CA = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE \text{ (AAS)}$$

$$\therefore AD = CE;$$

（2）①由题意得 $AM = t$ $FN = 3t$

$$\text{则 } CM = 8 - t$$

由折叠的性质可知 $CF = CB = 6$

$$\therefore CN = 6 - 3t.$$

故答案为： $8 - t$ ； $6 - 3t$ ；

②由折叠的性质可知 $\angle BCE = \angle FCE$

$$\because \angle MCD + \angle CMD = 90^\circ \quad \angle MCD + \angle BCE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle NCE = \angle CMD$$

$\therefore$ 当 $CM = CN$ 时 $\triangle MDC$ 与 $\triangle CEN$ 全等

$$\text{当点 } N \text{ 沿 } F \rightarrow C \text{ 路径运动时 } 8 - t = 6 - 3t$$

解得 $t = -1$ （不合题意）

$$\text{当点 } N \text{ 沿 } C \rightarrow B \text{ 路径运动时 } 8 - t = 3t - 6$$

解得 $t = 3.5$

$$\text{当点 } N \text{ 沿 } B \rightarrow C \text{ 路径运动时 由题意得 } 8 - t = 18 - 3t$$

解得 $t = 5$

$$\text{当点 } N \text{ 沿 } C \rightarrow F \text{ 路径运动时 由题意得 } 8 - t = 3t - 18$$

解得 $t = 6.5$

综上所述 当 $t = 3.5$ 秒或 5 秒或 6.5 秒时 $\triangle MDC$ 与 $\triangle CEN$ 全等．

7. 点 A 的坐标为 $(4, 0)$ 点 B 为 y 轴负半轴上的一个动点 分别以 OB 、 AB 为直角边在第三象

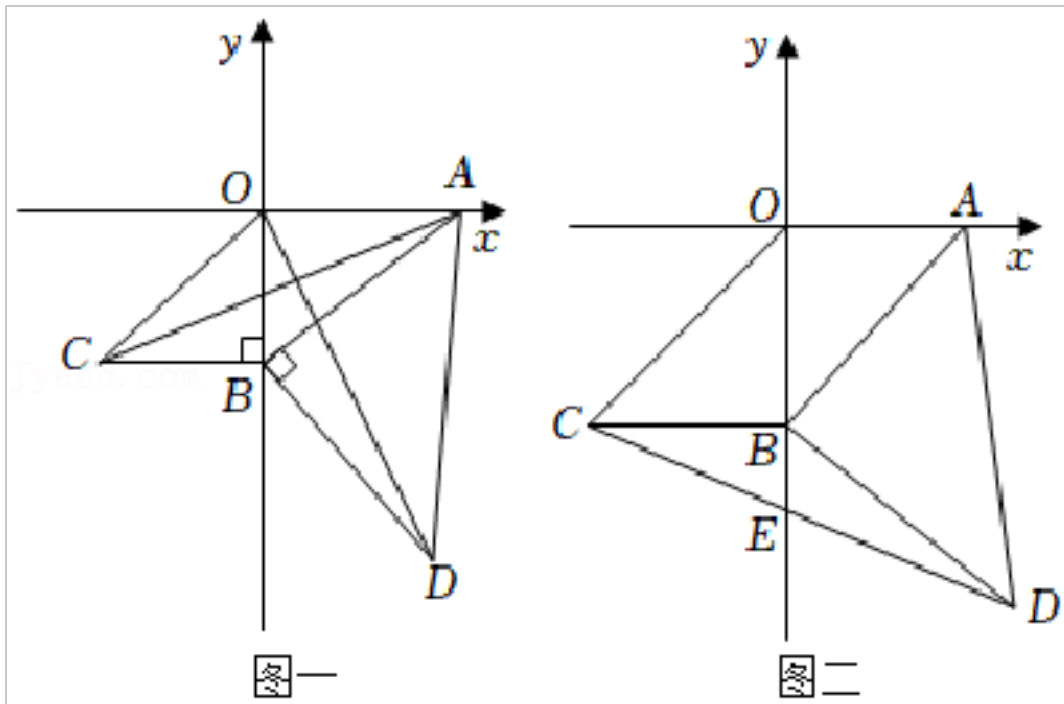
$\triangle$ 和等腰 $\text{Rt}\triangle ABD$.

(1) 如图一 若点 B 坐标为 $(0, -3)$ 连接 AC、OD.

求证: $AC=OD$;

②求 D 点坐标.

(2) 如图二 连接 CD 与 y 轴交于点 E 试求 BE 长度.



【解答】(1) ①证明: $\because \triangle OBC$ 和 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形

$$\therefore OB=CB \quad BD=AB \quad \angle ABD=\angle OBC=90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD+\angle ABO=\angle OBC+\angle ABO$$

$$\therefore \angle OBD=\angle CBA$$

$$\therefore \triangle OBD \cong \triangle CBA \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AC=OD;$$

②如图一、

$$\because A(4, 0) \quad B(0, -3)$$

$$\therefore OA=4 \quad OB=3$$

过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于 F

$$\therefore \angle BOA=\angle DFB=90^\circ$$

$$\therefore \angle ABO+\angle OAB=90^\circ$$

$$\because \angle ABD=90^\circ$$

$$\therefore \angle ABO+\angle FBD=90^\circ$$

$$\therefore \angle OAB=\angle FBD$$

$$\because AB=BD$$

$$\cong \triangle BFD \text{ (AAS)}$$

$$\therefore DF = OB = 3 \quad BF = OA = 4$$

$$\therefore OF = OB + BF = 7$$

$$\therefore D(3, -7);$$

(2) 如图二、过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于 F

$$\text{则 } \angle DFB = 90^\circ = \angle CBF$$

同 (1) 的方法得 $\triangle AOB \cong \triangle BFD \text{ (AAS)}$

$$\therefore DF = OB \quad BF = OA = 4$$

$$\because OB = BC$$

$$\therefore BC = DF$$

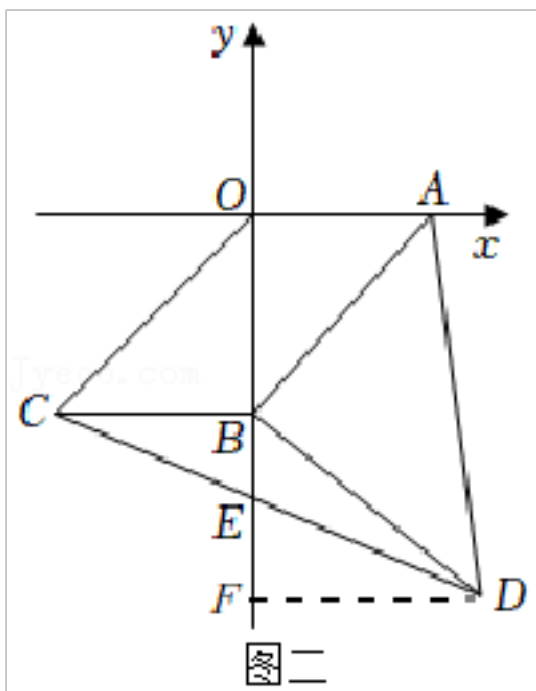
$$\because \angle DEF = \angle CEB$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEB \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BE = EF$$

$$\therefore BF = BE + EF = 2BE = 4$$

$$\therefore BE = 2.$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/988023053033006076>