

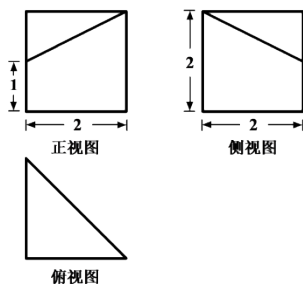
## 江西省九江市第一中学 2023-2024 学年招生全国统一考试数学试题模拟试卷（一）

**注意事项:**

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（ ）



- A.  $\frac{10}{3}$   
B. 3  
C.  $\frac{8}{3}$   
D.  $\frac{7}{3}$

2. 复数  $z = \frac{i}{1+2i}$  的共轭复数在复平面内所对应的点位于( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ , 要得到函数  $g(x) = \cos x$  的图象, 只需将  $y = f(x)$  的图象( )

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度
- B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度
- C. 向左平移  $\frac{5\pi}{12}$  个单位长度
- D. 向右平移  $\frac{5\pi}{12}$  个单位长度

4.  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数是 ( )

- A. 70**                      **B. -70**                      **C. 28**                      **D. -28**

5. 已知集合  $A = \left\{ x \mid y = \lg \sin x + \sqrt{9 - x^2} \right\}$ , 则  $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$ ,  $x \in A$  的值域为 ( )

- A.**  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$       **B.**  $\left(1, \frac{3}{2}\right]$       **C.**  $\left(-1, \frac{1}{2}\right]$       **D.**  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

6. 已知集合  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | e^x < 1\}$ , 则 ( )

- A.**  $A \cap B = \{x | x < 1\}$                       **B.**  $A \cup B = \{x | x < e\}$

C.  $A \cup B = \{x | x < 1\}$

D.  $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$

7. 已知抛物线  $x^2 = 4y$  上一点  $A$  的纵坐标为 4，则点  $A$  到抛物线焦点的距离为 ( )

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

8. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，满足  $|\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = 1, \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  且  $\lambda + 2\mu = 1$ ，若对每一个确定的向量  $\vec{a}$ ，记  $|\vec{c}|$  的最小值为  $m$ ，则当  $\vec{a}$  变化时， $m$  的最大值为 ( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D. 1

9. 已知函数  $f(x) = e^{x-1} + x - 2$  的零点为  $m$ ，若存在实数  $n$  使  $x^2 - ax - a + 3 = 0$  且  $|m - n| \leq 1$ ，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

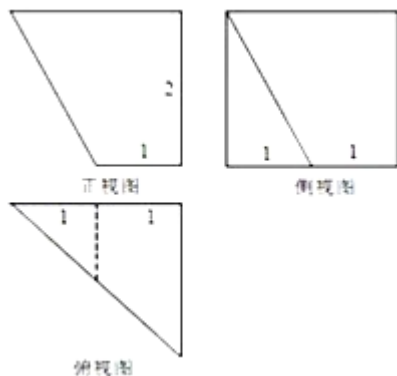
A.  $[2, 4]$

B.  $\left[2, \frac{7}{3}\right]$

C.  $\left[\frac{7}{3}, 3\right]$

D.  $[2, 3]$

10. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 ( )



A.  $\frac{8}{3}$

B. 3

C.  $\frac{11}{3}$

D. 4

11. 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 2x + y$  的最大值为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

12. 已知  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 3$ ，且  $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b})$ ，则  $2\vec{a} - \vec{b}$  在  $\vec{a}$  方向上的投影为 ( )

A.  $\frac{7}{3}$

B. 14

C.  $\frac{20}{3}$

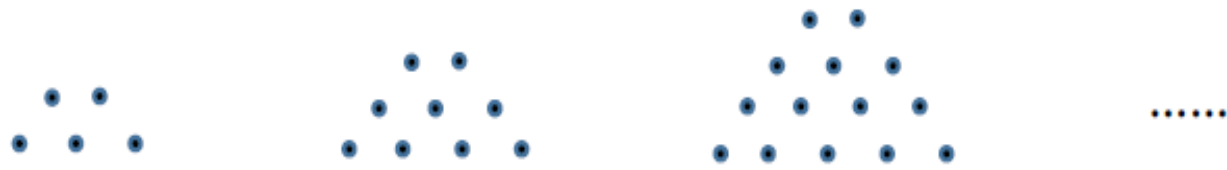
D. 7

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $f(x) = \log_a(x^2 + 4)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 有最小值，且最小值不小于 1，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14.  $(x^2 + 2)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中所有项的系数和为\_\_\_\_\_，常数项为\_\_\_\_\_.

15. 如图所示梯子结构的点数依次构成数列  $\{a_n\}$ ，则  $a_{100} =$ \_\_\_\_\_.



16. 已知向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，则向量  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  的夹角为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某企业现有  $A$ 、 $B$  两套设备生产某种产品，现从  $A$ 、 $B$  两套设备生产的大量产品中各抽取了 100 件产品作为样本，检测某一项质量指标值，若该项质量指标值落在  $[20, 40)$  内的产品视为合格品，否则为不合格品. 图 1 是从  $A$  设备抽取的样本频率分布直方图，表 1 是从  $B$  设备抽取的样本频数分布表.

图 1：  $A$  设备生产的样本频率分布直方图

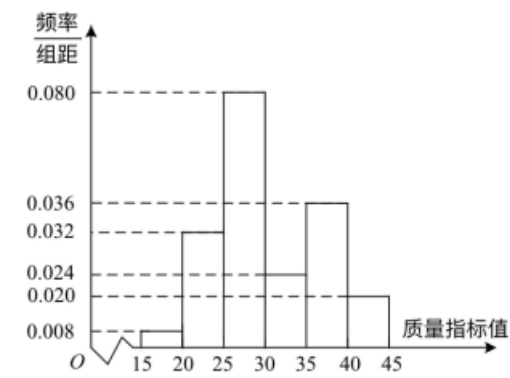


表 1：  $B$  设备生产的样本频数分布表

| 质量指标值 | $[15, 20)$ | $[20, 25)$ | $[25, 30)$ | $[30, 35)$ | $[35, 40)$ | $[40, 45)$ |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 频数    | 2          | 18         | 48         | 14         | 16         | 2          |

- 请估计  $A$ 、 $B$  设备生产的产品质量指标的平均值；
- 企业将不合格品全部销毁后，并对合格品进行等级细分，质量指标值落在  $[25, 30)$  内的定为一等品，每件利润 240 元；质量指标值落在  $[20, 25)$  或  $[30, 35)$  内的定为二等品，每件利润 180 元；其它的合格品定为三等品，每件利润 120 元. 根据图 1、表 1 的数据，用该组样本中一等品、二等品、三等品各自在合格品中的频率代替从所有产品中抽到一件相应等级产品的概率. 企业由于投入资金的限制，需要根据  $A$ 、 $B$  两套设备生产的同一种产品每件获得利润的期望值调整生产规模，请根据以上数据，从经济效益的角度考虑企业应该对哪一套设备加大生产规模？

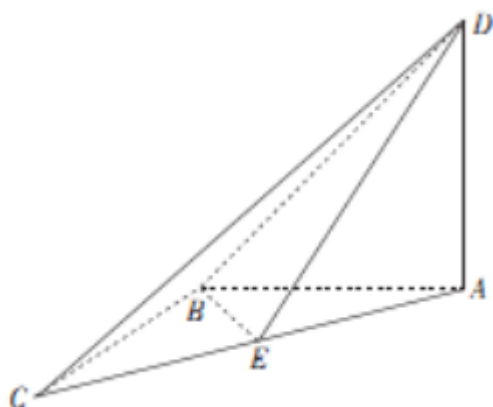
18. (12 分) 已知椭圆  $C$ ：  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )，与  $x$  轴负半轴交于  $A(-2, 0)$ ，离心率  $e = \frac{1}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C$  交于  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  两点, 连接  $AM$ ,  $AN$  并延长交直线  $x = 4$  于

$E(x_3, y_3)$ ,  $F(x_4, y_4)$  两点, 已知  $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$ , 求证: 直线  $MN$  恒过定点, 并求出定点坐标.

19. (12 分) 如图所示, 在四面体  $ABCD$  中,  $AD \perp AB$ , 平面  $ABD \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$ , 且  $AD + BC = 4$ .



(1) 证明:  $BC \perp$  平面  $ABD$ ;

(2) 设  $E$  为棱  $AC$  的中点, 当四面体  $ABCD$  的体积取得最大值时, 求二面角  $C - BD - E$  的余弦值.

20. (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 直线  $l$  交曲线  $C$  于  $A, B$  两点,  $P$  为  $AB$  中点.

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程和点  $P$  的轨迹  $C_2$  的极坐标方程;

(2) 若  $|AB| \cdot |OP| = \sqrt{3}$ , 求  $\alpha$  的值.

21. (12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  垂直于  $x$  轴, 垂足为  $T$ , 与抛物线  $y^2 = 4x$  交于

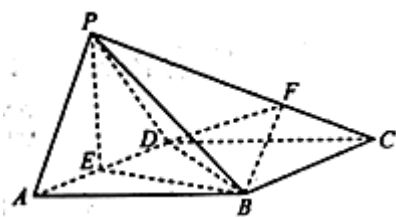
不同的两点  $P, Q$ , 且  $\vec{F_1P} \cdot \vec{F_2Q} = -5$ , 过  $F_2$  的直线  $m$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 设  $\vec{F_2A} = \lambda \vec{F_2B}$ , 且  $\lambda \in [-2, -1]$ .

(1) 求点  $T$  的坐标;

(2) 求  $|\vec{TA} + \vec{TB}|$  的取值范围.

22. (10 分) 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $\triangle PAD$  是边长为 2 的正三角形,

$PC = \sqrt{10}$ ， $E$  为线段  $AD$  的中点.



(1) 求证：平面  $PBC \perp$  平面  $PBE$ ；

(2) 若  $F$  为线段  $PC$  上一点，当二面角  $P-DB-F$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  时，求三棱锥  $B-PDF$  的体积.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

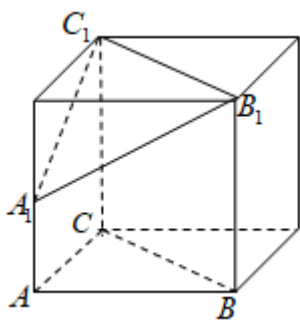
1、A

【解析】

根据题意，可得几何体，利用体积计算即可.

【详解】

由题意，该几何体如图所示：



该几何体的体积  $V = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{10}{3}$ .

故选：A.

【点睛】

本题考查了常见几何体的三视图和体积计算，属于基础题.

2、D

**【解析】**

由复数除法运算求出  $z$ ，再写出其共轭复数，得共轭复数对应点的坐标。得结论。

**【详解】**

$$z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \quad \bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \text{ 对应点为 } \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right), \text{ 在第四象限.}$$

故选：D.

**【点睛】**

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义。掌握复数的运算法则是解题关键。

3、A

**【解析】**

根据函数图像平移原则，即可容易求得结果。

**【详解】**

$$\text{因为 } f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

故要得到  $g(x)$ ，只需将  $f(x)$  向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度。

故选：A.

**【点睛】**

本题考查函数图像平移前后解析式的变化，属基础题。

4、A

**【解析】**

试题分析：由题意得，二项展开式的通项为  $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_8^r x^{8-\frac{3}{2}r}$ ，令  $8 - \frac{3}{2}r = 2 \Rightarrow r = 4$ ，所以  $x^2$

的系数是  $(-1)^4 C_8^4 = 70$ ，故选 A.

考点：二项式定理的应用。

5、A

**【解析】**

先求出集合  $A = (0, 3]$ ，化简  $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ ，令  $\sin x = t \in (0, 1]$ ，得  $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$  由二次函数的性质即可得值域。

**【详解】**

由  $\begin{cases} \sin x > 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 3$ , 得  $A = (0, 3]$ ,  $f(x) = \cos 2x + 2\sin x = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ , 令  $\sin x = t$ ,

$Q x \in (0, 3]$ ,  $\therefore t \in (0, 1]$ , 所以得  $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$ ,  $g(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上递增, 在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上递减,

$g(1) = 1, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ , 所以  $g(t) \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ , 即  $f(x)$  的值域为  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

故选 A

【点睛】

本题考查了二次不等式的解法、二次函数最值的求法, 换元法要注意新变量的范围, 属于中档题

6、C

【解析】

求出集合  $B$ , 计算出  $A \cap B$  和  $A \cup B$ , 即可得出结论.

【详解】

$Q A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | e^x < 1\} = \{x | x < 0\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | x < 0\}$ ,  $A \cup B = \{x | x < 1\}$ .

故选: C.

【点睛】

本题考查交集和并集的计算, 考查计算能力, 属于基础题.

7、D

【解析】

试题分析: 抛物线  $x^2 = 4y$  焦点在  $y$  轴上, 开口向上, 所以焦点坐标为  $(0, 1)$ , 准线方程为  $y = -1$ , 因为点  $A$  的纵坐标为 4, 所以点  $A$  到抛物线准线的距离为  $4 + 1 = 5$ , 因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 所以点  $A$  与抛物线焦点的距离为 5.

考点: 本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离, 考查学生的运算求解能力.

点评: 抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 这条性质在解题时经常用到, 可以简化运算.

8、B

【解析】

根据题意, 建立平面直角坐标系. 令  $\overrightarrow{OP} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c$ .  $E$  为  $OB$  中点. 由  $\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right| = 1$  即可求得  $P$  点的轨迹方程. 将  $\frac{1}{c} = \lambda \frac{1}{a} + \mu \frac{1}{b}$  变形, 结合  $\lambda + 2\mu = 1$  及平面向量基本定理可知  $P, C, E$  三点共线. 由圆切线的性质可知  $\left| \frac{1}{c} \right|$  的最小值  $m$  即为  $O$  到直线  $PE$  的距离最小值, 且当  $PE$  与圆  $M$  相切时,  $m$  有最大值. 利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程, 进而求得原点到直线的距离, 即为  $m$  的最大值.

【详解】

根据题意,  $|\vec{b}| = 2$ , 设  $\vec{OP} = \vec{a} = (x, y)$ ,  $\vec{OB} = \vec{b} = (2, 0)$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $E(1, 0)$

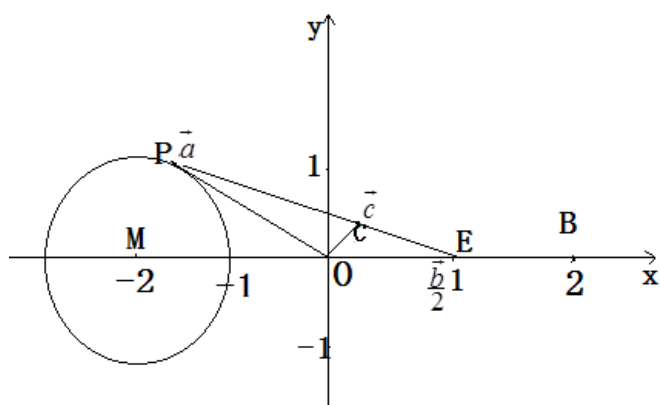
$$\text{则 } \vec{OE} = \frac{\vec{b}}{2}$$

$$\text{由 } |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \text{ 代入可得 } \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 1$$

$$\text{即 } P \text{ 点的轨迹方程为 } (x+2)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{又因为 } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \text{ 变形可得 } \vec{c} = \lambda \vec{a} + 2\mu \left( \frac{\vec{b}}{2} \right), \text{ 即 } \vec{OC} = \lambda \vec{OP} + 2\mu \vec{OE}, \text{ 且 } \lambda + 2\mu = 1$$

所以由平面向量基本定理可知  $P, C, E$  三点共线, 如下图所示:



所以  $|\vec{c}|$  的最小值  $m$  即为  $O$  到直线  $PE$  的距离最小值

根据圆的切线性质可知, 当  $PE$  与圆  $M$  相切时,  $m$  有最大值

$$\text{设切线 } PE \text{ 的方程为 } y = k(x-1), \text{ 化简可得 } kx - y - k = 0$$

$$\text{由切线性质及点 } M \text{ 到直线距离公式可得 } \frac{|-2k - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, \text{ 化简可得 } 8k^2 = 1$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{所以切线方程为 } \frac{\sqrt{2}}{4}x - y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{4}x + y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\text{所以当 } \vec{a} \text{ 变化时, } O \text{ 到直线 } PE \text{ 的最大值为 } m = \frac{\left| -\frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (\pm 1)^2}} = \frac{1}{3}$$

即  $m$  的最大值为  $\frac{1}{3}$

故选:B

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标应用,平面向量基本定理的应用,圆的轨迹方程问题,圆的切线性质及点到直线距离公式的应用,综合性强,属于难题.

9、D

【解析】

易知  $f(x)$  单调递增,由  $f(1) = 0$  可得唯一零点  $m = 1$ ,通过已知可求得  $0 \leq n \leq 2$ ,则问题转化为使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$  在区间  $[0, 2]$  上有解,化简可得  $a = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$ ,借助对勾函数即可解得实数  $a$  的取值范围.

【详解】

易知函数  $f(x) = e^{x-1} + x - 2$  单调递增且有惟一的零点为  $m = 1$ , 所以  $|1 - n| \leq 1$ ,  $\therefore 0 \leq n \leq 2$ , 问题转化为: 使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$  在区间  $[0, 2]$  上有解, 即  $a = \frac{x^2 + 3}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$

在区间  $[0, 2]$  上有解, 而根据“对勾函数”可知函数  $y = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$  在区间  $[0, 2]$  的值域为  $[2, 3]$ ,  $\therefore 2 \leq a \leq 3$ .

故选 D.

【点睛】

本题考查了函数的零点问题,考查了方程有解问题,分离参数法及构造函数法的应用,考查了利用“对勾函数”求参数取值范围问题,难度较难.

10、C

【解析】

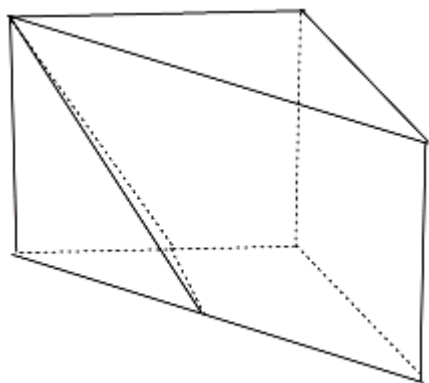
首先把三视图转换为几何体,该几何体为由一个三棱柱体,切去一个三棱锥体,由柱体、椎体的体积公式进一步求出几何体的体积.

【详解】

解: 根据几何体的三视图转换为几何体为:

该几何体为由一个三棱柱体,切去一个三棱锥体,

如图所示:



故：  $V = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{11}{3}$ .

故选：C.

【点睛】

本题考查了由三视图求几何体的体积、需熟记柱体、锥体的体积公式，考查了空间想象能力，属于基础题.

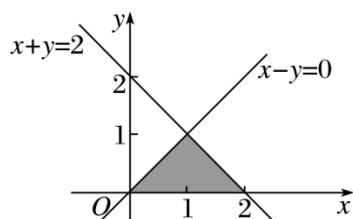
11、D

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

作出不等式组表示的平面区域如下图所示中阴影部分所示，



$z = 2x + y$  等价于  $y = -2x + z$ ，作直线  $y = -2x$ ，向上平移，

易知当直线经过点  $(2,0)$  时  $z$  最大，所以  $z_{\max} = 2 \times 2 + 0 = 4$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

12、C

【解析】

由向量垂直的向量表示求出  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，再由投影的定义计算.

【详解】

由  $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b})$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/988037017126007000>