高二期中联考

数学

班级：__________姓名：__________准考证号：__________

（本试卷共 4 页，19 题，考试用时 120 分钟，全卷满分 150 分）

注意事项：

1.答题前，先将自己的班级、姓名、准考证号写在试题卷和答题卡上，并将准考证条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上相应题目的答案标号涂黑.写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，将答题卡上交.

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\in Z\middle|x^2-x-6<0\right\}$，$B=\left\{x\middle||x+2|<3\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|-2<x<1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{x|-5<x<3\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】先求出集合 A,B，再根据交集的定义求解即可.

【详解】因为 $A=\left\{x\in Z\middle|x^2-x-6<0\right\}=\left\{x\in Z\middle|-2<x<3\right\}=\{-1,0,1,2\}$，

$B=\left\{x\middle||x+2|<3\right\}=\left\{x\middle|-5<x<1\right\}$，

所以 $A\cap B=\{-1,0\}$.

故选：B.

2. “$m=0$”是“直线 $l_1:mx+4y+2=0$ 与直线 $l_2:x+my+1=0$ 垂直”的（　　）

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据直线垂直可得 $m=0$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为直线 $l_1: mx+4y+2=0$ 与直线 $l_2: x+my+1=0$ 垂直，

等价于 $m\times 1+4\times m=0$，即 $m=0$，

所以"$m=0$"是"直线 $l_1: mx+4y+2=0$ 与直线 $l_2: x+my+1=0$ 垂直"的充要条件.

故选：A.

3. 下列说法错误的是（　　）

A. 若空间中点 O，A，B，C 满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 A，B，C 三点共线

B. 对空间任意一点 O 和不共线三点 A，B，C，若 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则 P，A，B，C 共面

C. 空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

D. $\vec{a}=(1,1,x)$，$\vec{b}=(3,x,9)$，若 $x>-\frac{3}{10}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角

【答案】D

【解析】

【分析】对于 A：根据三点共线的结论分析判断；对于 B：根据四点共面的结论分析判断；

对于 C：根据共面向量的定义分析判断；对于 D：举反例说明即可.

【详解】对于选项 A：因为 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，且 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$，

所以 A，B，C 三点共线，故 A 正确；

对于选项 B：因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，

可得 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，且 $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$，

所以 P，A，B，C 共面，故 B 正确；

对于选项 C：若 $\vec{a},\vec{b}$ 共线，则对任意 $\vec{c}$，均有 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，故 C 正确；

对于选项 D：例如 $x=3>-\frac{3}{10}$，则 $\vec{a}=(1,1,3)$，$\vec{b}=(3,3,9)$，

可知 $\vec{b}=3\vec{a}$，即 $\vec{a},\vec{b}$ 同向，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 0，故 D 错误；

故选：D.

4. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=BC=2$，$AA_1=4$，E 为 A_1D_1 的中点，则直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{21}}{42}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{21}$　　C. $\frac{\sqrt{42}}{42}$　　D. $\frac{\sqrt{42}}{21}$

【答案】C

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用线线角公式即可求解.

【详解】在长方体中，以 D 点为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

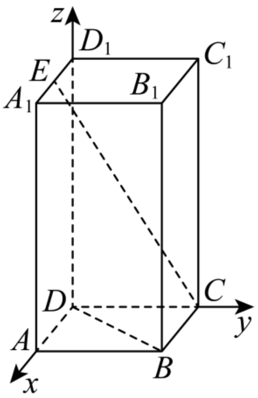
因为 $AB=BC=2$，$AA_1=4$，则 $B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$E(1,0,4)$，$D(0,0,0)$，

可得 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0),\overrightarrow{CE}=(1,-2,4)$，

则 $\cos\langle\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CE}\rangle=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\times\sqrt{1^2+2^2+4^2}}=-\frac{\sqrt{42}}{42}$，

则直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{42}$.

故选：C.



5. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，O 为坐标原点，A 为抛物线上一点，且 $|AF|=2|OF|$，$\triangle OAF$ 的面积为 4，则抛物线方程为（　　）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=4x$

C. $y^2=16x$　　D. $y^2=\frac{15}{2}x$

【答案】A

【解析】

【分析】设 $A(x_0,y_0)$，结合抛物线的定义可得 $x_0=\frac{p}{2}$，$|y_0|=p$，再根据面积关系运算求解即可.

【详解】由题意可知：$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

设 $A(x_0,y_0)$，则 $|AF|=x_0+\frac{p}{2}$，

因为 $|AF|=2|OF|$，即 $x_0+\frac{p}{2}=2\times\frac{p}{2}=p$，

解得 $x_0=\frac{p}{2}$，则 $y_0^2=2px_0=p^2$，即 $|y_0|=p$，

又因为△OAF 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times p=\frac{p^2}{4}=4$，且 $p>0$，解得 $p=4$，

所以抛物线方程为 $y^2=8x$.

故选：A.

6. 已知圆 $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 与圆 $C_2:(x+3)^2+(y-2)^2=1$，过动点 $M(m,n)$ 分别作圆 C_1、圆 C_2 的切线 MA，MB（A，B 分别为切点），若 $|MA|=|MB|$，则 m^2+n^2 的最小值是（　　）

A. $\frac{81}{68}$　　B. $\frac{121}{68}$　　C. $\frac{169}{68}$　　D. $\frac{49}{68}$

【答案】B

【解析】

【分析】求出 M 点的轨迹为直线 $8x-2y+11=0$，再根据点到直线的距离公式即可得到最值.

【详解】由题意得 $C_1(1,1)$，$C_2(-3,2)$，

因为 $|MA|=\sqrt{MC_1^2-1},|MB|=\sqrt{|MC_2|^2-1}$，

又 $|MA|=|MB|$，即 $MC_1^2-1=MC_2^2-1$，

即 $(m-1)^2+(n-1)^2-1=(m+3)^2+(n-2)^2-1$，

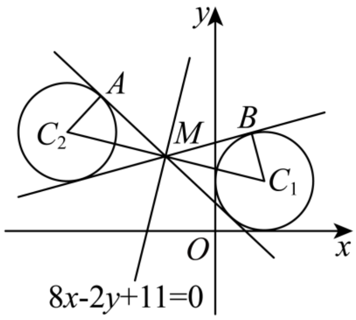
化简得 M 点的轨迹为 $8m-2n+11=0$，即在直线 $8x-2y+11=0$ 上，

m^2+n^2 表示的几何意义为 M 点到原点距离的平方，

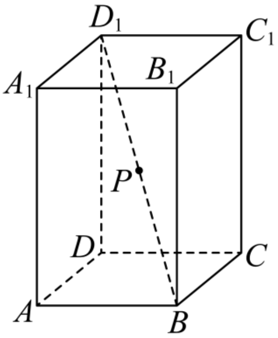
故只需计算原点到直线 $8m-2n+11=0$ 的距离再平方就可得最小值，

即最小值为 $\left(\frac{11}{\sqrt{8^2+2^2}}\right)^2=\frac{121}{68}$.

故选：B.



7. 如图所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $AB=1$， $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，动点 P 在体对角线 BD_1 上，直线 AP 与平面 PBD 所成角的最小值为 $\frac{\pi}{4}$，则直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为(　　)



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　C. $\sqrt{5}$　　　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

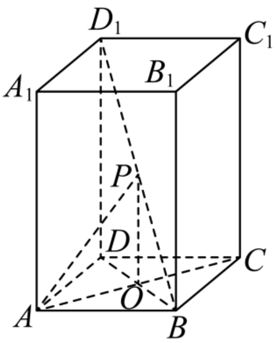
【答案】D

【解析】

【分析】设 $AC \cap BD=O$，可证 $AC\perp$ 平面 BDD_1，可知直线 AP 与平面 PBD 所成角为 $\angle APO$，

分析可知当点 P 与点 D_1 重合时， PO 取到最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可得 $DD_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即可得体积.

【详解】设 $AC \cap BD=O$，



因为底面 $ABCD$ 为菱形，则 $AC\perp BD$，

又因为 $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$， $AC\subset$ 底面 $ABCD$，则 $AC\perp DD_1$，

且 $BD\cap DD_1=D$，$BD,DD_1\subset$ 平面 BDD_1，则 $AC\perp$ 平面 BDD_1，

可知直线 AP 与平面 PBD 所成角为 $\angle APO$，

则 $\tan\angle APO=\dfrac{AO}{PO}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{PO}\geq 1$，可得 $PO\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $OB=OD=\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可知当点 P 与点 D_1 重合时，PO 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $DD_1=\sqrt{OP^2-OD^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $2\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

故选：D.

8. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为第一象限内一点，且满足 $|PF_1|=2c$，$|F_2P|=a$，线段 F_2P 与双曲线 C 交于点 Q，若 $\overrightarrow{F_2P}=5\overrightarrow{F_2Q}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

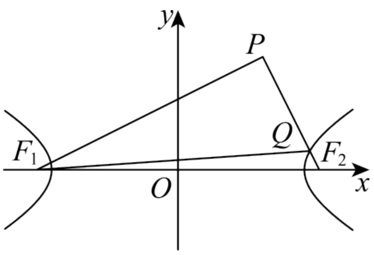
A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可得 $|F_2Q|=\dfrac{a}{5}$，$|F_1Q|=\dfrac{11a}{5}$，$|F_1F_2|=2c$，利用余弦定理列式求解即可.

【详解】由题意可知：$|F_2Q|=\dfrac{1}{5}|F_2P|=\dfrac{a}{5}$，$|F_1Q|=2a+|F_2Q|=\dfrac{11a}{5}$，且 $|F_1F_2|=2c$，



在 $\triangle F_1QF_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1F_2Q=\dfrac{|F_1F_2|^2+|QF_2|^2-|QF_1|^2}{2|F_1F_2|\cdot|QF_2|}=\dfrac{4c^2+\frac{a^2}{25}-\frac{121a^2}{25}}{2\times 2c\times\frac{a}{5}}=\dfrac{5c^2-6a^2}{ac}$，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1F_2P=\dfrac{|F_1F_2|^2+|PF_2|^2-|PF_1|^2}{2|F_1F_2|\cdot|PF_2|}=\dfrac{4c^2+a^2-4c^2}{2\times 2c\times a}=\dfrac{a}{4c}$，

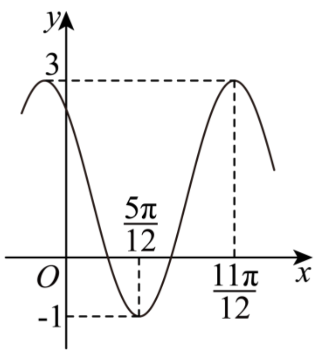
即 $\dfrac{5c^2-6a^2}{ac}=\dfrac{a}{4c}$，可得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{4}$，

所以双曲线 C 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：C.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对的得部分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

B. $\omega=2$

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称

D. $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

【答案】BD

【解析】

【分析】根据图象结合周期性和最值求 ω,φ，即可判断 AB；可得 $f(x)$、$f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的解析式，

直接代入运算判断对称性，即可判断 CD.

【详解】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，

则 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，

且 $\omega>0$，则 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，故 B 正确；

则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$，

因为$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)+1=-1$，可得$\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，

又因为$0<\varphi<\pi$，则$\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{11\pi}{6}$，

可得$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故 A 错误；

所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$，

对于选项 C：因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1=2\sin\pi+1=1$，

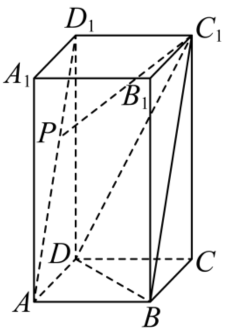
所以$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$对称，故 C 错误；

对于选项 D：令$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1=2\sin(2x+\pi)+1=-2\sin 2x+1$，

因为$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}+1=-1$（为最小值），所以$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，故 D 正确；

故选：BD.

10. 如图、在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P为线段AD_1上一动点，$AA_1=2AB=2$，则下列说法正确的是（　　）



A. 直线$BD_1\perp$平面BC_1D

B. 三棱锥$P-BC_1D$的体积为$\frac{1}{3}$

C. 三棱锥$C-BC_1D$外接球的表面积为6π

D. 存在点P使直线PC_1与平面BC_1D所成角为$\frac{\pi}{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】对 A，判断 BD_1, BD 不垂直即可；对 B，先判断平面 AB_1D_1 // 平面 BC_1D，再根据等体积计算判断；对 C，根据三棱锥 $C-BC_1D$ 外接球即长方体的外接球，再求得表面积即可；对 D，先根据等体积法求得 P 到平面 BC_1D 的距离 h，进而可得直线 PC_1 与平面 BC_1D 所成角的正弦值判断即可.

【详解】对 A，若直线 $BD_1 \perp$ 平面 BC_1D，则因为 $BD \subset$ 平面 BC_1D，则 $BD_1 \perp BD$，矛盾，故 A 错误；

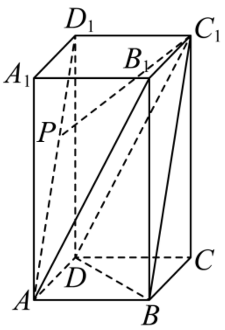
对 B，作辅助线如图，因为 $AB//C_1D_1, AB = C_1D_1$，所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

所以 $AD_1//BC_1$，$BC_1 \subset$ 面 BC_1D，$AD_1 \not\subset$ 面 BC_1D，故 AD_1 // 面 BC_1D，

同理得 $AB_1//DC_1$，$DC_1 \subset$ 面 BC_1D，$AB_1 \not\subset$ 面 BC_1D，故 AB_1 // 面 BC_1D，

又因为 $AD_1 \subset$ 面 AB_1D_1，$AB_1 \subset$ 面 AB_1D_1，$AD_1 \cap AB_1 = A$，

所以平面 AB_1D_1 // 平面 BC_1D，



又因为 P 点在平面 AB_1D_1 内，

所以 $V_{P-BC_1D} = V_{A-BC_1D} = V_{C_1-ABD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$，故 B 正确；

对于 C，三棱锥 $D_1 - BC_1D$ 外接球的半径 $R = \frac{1}{2} \cdot AC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$，

所以三棱锥 $D_1 - BC_1D$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$，故 C 正确；

对 D，设 P 到平面 BC_1D 的距离为 h，又 $BD = \sqrt{2}, BC_1 = DC_1 = \sqrt{5}$，

故 $S_{\vartriangle BC_1D} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$，又三棱锥 $P - BC_1D$ 的体积为 $\frac{1}{3}$，

则 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} h = \frac{1}{3}$，解得 $h = \frac{2}{3}$，设直线 PC_1 与平面 BC_1D 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = \frac{h}{PC_1} = \frac{2}{3PC_1}$，又 $D_1C_1 \le PC_1 \le AC_1$，即 $1 \le PC_1 \le \sqrt{6}$，