辽宁省辽阳市2023-2024学年高一下学期期末考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．复数$z=\dfrac{2+2i}{1-i}$的虚部为（　）

A．1　　B．2　　C．i　　D．$2\mathrm{i}$

2．在$\triangle ABC$中，$AB=6,\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{3},C=120^{\circ}$，则$AC=$（　）

A．8　　B．12　　C．16　　D．4

3．已知直线l，m及平面α，β，且$\alpha\perp\beta$，$a\cap\beta=l$，下列命题正确的是（　）

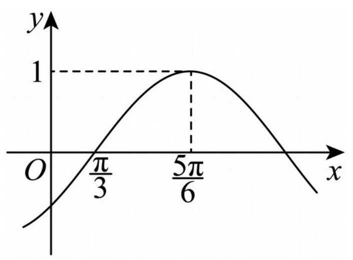
A．若$m\perp l$，则$m\perp\alpha$　　B．若$m\perp\alpha$，则$m\perp l$

C．若$m\parallel\alpha$，则$m/\!/ l$　　D．若$m/\!/ l$，则$m\parallel\alpha$

4．已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-\dfrac{9}{2}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

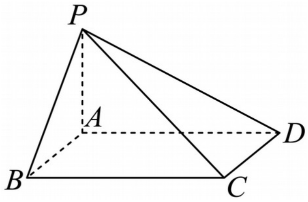
A．0　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

5．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则$f\left(2\pi\right)=$（　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=3$，$AD=4$，则该四棱锥外接球的表面积为（　　）



A．$\sqrt{34}\pi$　　B．$2\sqrt{34}\pi$　　C．34π　　D．136π

7．已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{20}\sin\alpha$，则$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{20}\right)=$（　　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．1

8．已知四边形$ABCD$的顶点都在半径为2的圆O上，且AD经过圆O的圆心，$BC=2, CD<AB$，四边形$ABCD$的面积为$3+\sqrt{3}$，则$AB=$（　　）

A．2　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

二、多选题

9．已知函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，则（　　）

A．$f(x)$的最小正周期为π

B．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{8}$对称

C．$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},1\right)$中心对称

D．$f(x)$的最大值为1

10．已知平面向量$\vec{a}=(m,m+2),m\in\mathbf{R},\vec{b}=(3,4)$，则下列结论正确的是（　　）

A．$|\vec{a}|$的最小值为$\sqrt{2}$

B．若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则m的取值范围是$\left(-\frac{8}{7},+\infty\right)$

C．一定存在一个实数m，使得$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

D．若$m=1$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

11．有一种“蒺藜形多面体”，其可由两个正交的正四面体组合而成，如图1.也可由正方体切割而成，如图2.在如图2所示的“蒺藜形多面体”中，若$AB=2$，则（　　）

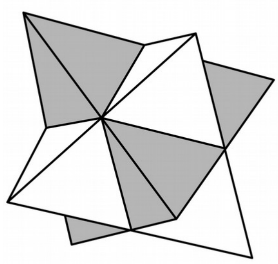


图1

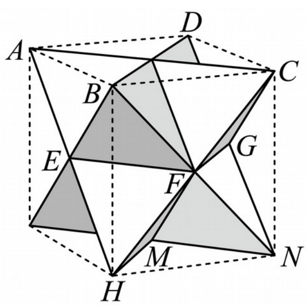


图2

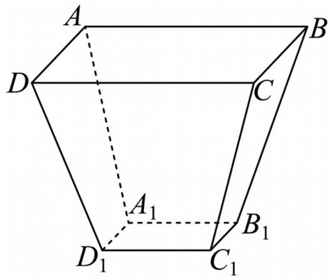
A．该几何体的表面积为$12\sqrt{3}$　　B．该几何体的体积为4

C．直线HM与直线GN所成的角为$\frac{\pi}{3}$　　D．二面角$B-EF-H$的余弦值为$\frac{1}{3}$

三、填空题

12．已知复数$z=-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$，则$|z|=$______.

13．如图，四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的侧棱长均相等，四边形$ABCD$和四边形$A_1B_1C_1D_1$都是正方形，$A_1B_1=2, AB=4, AA_1=3\sqrt{2}$，则该四棱台的体积为______.



14．若函数$f(x)=\cos 2x-m\sin x$在$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$上有$2$个零点，则$m$的取值范围是______.

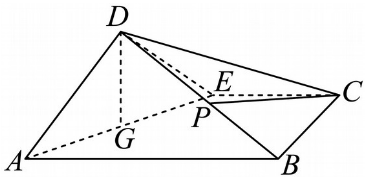
四、解答题

15．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,x)$.

(1)若$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，求$|\vec{b}|$；

(2)若向量$\vec{c}=(-3,-2)$，$\vec{a}\,//\,(\vec{b}+\vec{c})$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值.

16．如图，在四棱锥$D-ABCE$中，平面$ADE\perp$平面$ABCE$，$AB//CE$，$AB=2CE$，$DA=DE$，G为AE的中点，点P在线段BD上，$CP//$平面ADE.



(1)证明：$DG\perp AB$；

(2)求 $\frac{BP}{DP}$ 的值.

17．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}(0<\omega<7)$，且 $\forall x_0\in\mathbf{R}, f\left(x_0\right)\leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

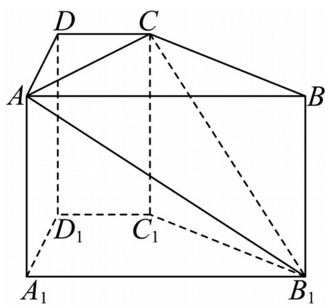
(1)求 ω 的值；

(2)求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

(3)若 $x\in\left[0,m\right], f\left(x\right)$ 的值域是 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$，求 m 的取值范围.

18．如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $CDD_1C_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$AB//CD$，

$AD\perp CD$，$AB=B_1C=3$，$AA_1=2AD=2CD=2$.



(1)证明：$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求直线 AB 与平面 AB_1C 所成角的正弦值.

19．A 是直线 PQ 外一点，点 M 在直线 PQ 上（点 M 与点 P,Q 任一点均不重合），我们称

如下操作为“由 A 点对 PQ 施以视角运算”：若点 M 在线段 PQ 上，记

$\left(P,Q;M\right)=\frac{|AP|\sin\angle PAM}{|AQ|\sin\angle MAQ}$；若点 M 在线段 PQ 外，记 $\left(P,Q;M\right)=-\frac{|AP|\sin\angle PAM}{|AQ|\sin\angle MAQ}$.在

$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，点D在射线BC上.

(1)若AD是角A的平分线，且$b=3c$，由A点对BC施以视角运算，求$\left(B,C;D\right)$的值；

(2)若$A=60^{\circ},a=4,AB\perp AD$，由A点对$BC$施以视角运算，$\left(B,C;D\right)=2-2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长；

(3)若$A=120^{\circ}$，$AD=4$，由A点对BC施以视角运算，$\left(B,C;D\right)=\dfrac{c}{b}$，求$b+4c$的最小值.

参考答案：

1．B

【分析】由复数除法计算法则结合虚部定义可得答案.

【详解】$z=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-2+2i+2i}{2}=2i$，

所以复数z的虚部为2.

故选：B

2．D

【分析】根据题意，由正弦定理代入计算，即可求解.

【详解】在$\triangle ABC$中，由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，

即$AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

故选：D

3．B

【分析】根据空间中线面位置的判定和性质，判断选项中的结论是否正确.

【详解】对于A：若$m\perp l$，则m不一定垂直α，故A错误；

对于B：因为$a\cap\beta=l$，所以$l\subset\alpha$，因为$m\perp\alpha$，所以$m\perp l$，故B正确；

对于C：若$m\parallel\alpha$，则m不一定平行于l，故C错误；

对于D：若$m// l$，则$m\parallel\alpha$或$m\subset\alpha$，故D错误.

故选：B..

4．C

【分析】根据单位向量定义与等量关系可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，再利用夹角的计算公式即可求解.

【详解】由题意得，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，

因为$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=\vec{a}^2-6\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-6|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{9}{2}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

所以$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，

因为$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$，

所以$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，即$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

故选：C.

5．D

【分析】根据函数图象求出T，即可求出ω，再根据函数过点$\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$，求出$\varphi$，即可求出函数解析式，再代入计算可得.

【详解】依题意可得$\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以$T=2\pi$，又$\omega>0$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，解得$\omega=1$，

所以$f\left(x\right)=\sin\left(x+\varphi\right)$，又函数过点$\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$，则$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{4\pi}{3}$，所以$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

所以$f\left(x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，则$f\left(2\pi\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D

6．C

【分析】四棱锥可补成长方体，利用长方体的体对角线求外接球的半径，即可得解.

【详解】将四棱锥$P-ABCD$补全成以AD,AB,AP为长、宽、高的长方体，

则该四棱锥的外接球即补全后长方体的外接球，

外接球的半径为长方体体对角线一半$\frac{1}{2}\times\sqrt{3^2+3^2+4^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，

所以外接球表面积为34π.

故选：C

7．A

【分析】利用辅助角公式、两角和与差的正弦公式即可求解.

【详解】因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{2}\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{20}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\alpha\cos\frac{\pi}{20}+\sqrt{2}\cos\alpha\sin\frac{\pi}{20}=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{20}\sin\alpha$，

所以$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{20}\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha\sin\frac{\pi}{20}=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{20}\right)=0$，

即$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{20}\right)=0$.

故选：A.

8．C

【分析】将四边形$ABCD$的面积转化为$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAB}$，利用三角形面积公式，结合两

角差的正弦公式进行化简，可得$\sin(\angle AOB+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合$CD<AB$，从而可求出

$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，进而可求出 AB .

【详解】连接 OB,OC，则 $\triangle OBC$ 为等边三角形，$\angle BOC=60^{\circ}$，

四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAB}$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\sin\angle COD+\frac{1}{2}\times2\times2\sin\angle COB+\frac{1}{2}\times2\times2\sin\angle AOB$

$=2\sin\angle COD+\sqrt{3}+2\sin\angle AOB$

$=2(\sin\angle COD+\sin\angle AOB)+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

所以 $2(\sin\angle COD+\sin\angle AOB)=3$，

所以 $\sin\angle COD+\sin\angle AOB=\frac{3}{2}$，

因为 $\angle COD+\angle AOB=120^{\circ}$，所以 $\angle COD=120^{\circ}-\angle AOB$，

所以 $\sin(120^{\circ}-\angle AOB)+\sin\angle AOB=\frac{3}{2}$，

$\sin120^{\circ}\cos\angle AOB-\cos120^{\circ}\sin\angle AOB+\sin\angle AOB=\frac{3}{2}$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle AOB+\frac{3}{2}\sin\angle AOB=\frac{3}{2}$，

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\angle AOB+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle AOB\right)=\frac{3}{2}$，

所以 $\sin(\angle AOB+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$\angle AOB\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\angle AOB+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

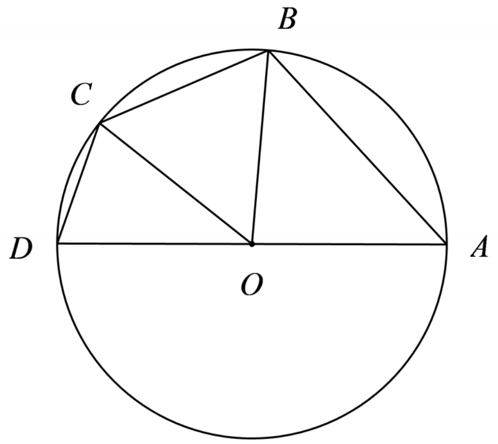
所以$\angle AOB+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或$\angle AOB+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，

所以$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，或$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，

因为$CD<AB$，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$舍去，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle AOB$为等腰直角三角形，所以$AB=2\sqrt{2}$.

故选：C



【点睛】关键点点睛：此题考查三角函数恒等变换公式的应用，考查三角形面积公式的应用，解题的关键是将四边形的面积转化为$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAB}$，再利用三角形面积公式化简，结合三角函数恒等变换公式可求得结果，考查数学转化思想和计算能力，属于较难题.

9．ABC

【分析】求得最小正周期判断A；求得最大值判断B；求得对称中心判断C；求得对称轴判断D.

【详解】因为$f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，所以$f\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，故A正确；

由$2\pi,+\frac{\pi\pi}{4}\ncong k\quad+\frac{}{2}\ k\in$ ，可得$x=\frac{\pi\pi}{8}+\frac{k}{2},k\in Z$，

所以$f\left(x\right)$图象的对称轴为$x=\frac{\pi\pi}{8}+\frac{k}{2},k\in Z$，

当$k=1$时，$f\left(x\right)$图象的关于$x=\frac{5\pi}{8}$对称，故B正确；

由$2\pi,+\frac{\pi}{4}\ncong k\quad k\in$ ，可得$x=-\frac{\pi\pi}{8}+\frac{k}{2},k\in Z$，

所以$f\left(x\right)$图象的对称中心为$\left(-\frac{\pi\pi}{8}+\frac{k}{2},1\right)$，当$k=0$时，

$f\left(x\right)$图象的关于点$\left(-\frac{\pi}{8},1\right)$对称，故C正确；

当$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=1$时，$f\left(x\right)$的最大值为2，故D不正确.

故选：ABC.

10．ACD

【分析】表示出$|\vec{a}|$，结合二次函数的性质判断A；根据$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不同向判断B；根据数量积的运算律得到$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即可判断C；根据投影向量的定义判断D.

【详解】对于A：因为$\vec{a}=\left(m,m+2\right),m\in\mathbf{R}$，

则$|\vec{a}|=\sqrt{m^2+\left(m+2\right)^2}=\sqrt{2\left(m+1\right)^2+2}\geq\sqrt{2}$，当且仅当$m=-1$时取等号，

所以$|\vec{a}|$的最小值为$\sqrt{2}$，故A正确；

对于B：若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不同向，

所以$3m+4\left(m+2\right)>0$且$4m\neq 3\left(m+2\right)$，解得$m>-\frac{8}{7}$且$m\neq 6$，故B错误；

对于C：若$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$3m+4\left(m+2\right)=0$，解得$m=-\frac{8}{7}$，

即存在$m=-\frac{8}{7}$，使得$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，故C正确；

对于D：当$m=1$时$\vec{a}=\left(1,3\right)$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 3+3\times 4=15$，

又$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

所以$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量的坐标为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{15}{\sqrt{10}}\times\frac{\vec{a}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}\vec{a}=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$，故D正确.

故选：ACD

11．ABC

【分析】根据正四面体的表面积即可判断A；利用割补法，结合体积公式即可判断B；根据异面直线所成角的定义平移直线HM到直线BD，求解$\angle BDN$即可判断C；根据二面角的定义作出二面角$B-EF-H$的平面角，结合空间向量法即可求解D.

【详解】对于A，因为$AB=2$，所以$BE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

蒺藜形多面体的表面可看作是八个全等的棱长为$\sqrt{2}$的小正四面体构成，

故该几何体的表面积为$24\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=12\sqrt{3}$，故A正确；