中 文 摘 要

在研究保险公司的最优投资再保险策略问题时, 最为常见的方法就是将随机控制理论应用到风险模型中. 一般来说, 解决随机最优控制问题的方法一种是 Bellman 的动态规划原理, 另外一种是 Pontryagin 型随机最大值原理.

大多数学者在解决最优投资再保险问题时, 通常会选择 Bellman 的动态规划原理, 建立 HJB 方程并通过随机验证定理得到问题的最优解. 但 Bellman 的动态规划原理严重依赖于随机系统的半群性质, 这使得保险公司的风险模型受限于马尔可夫过程, 导致了模型与实际现象存在很大差距. 由于 Hurst 指数大于 1/2 时的分数布朗运动的增量具有正相关性, 即具有长期相依性, 因此它能够更准确地刻画保险公司的索赔过程. 且分数布朗运动不是马尔可夫过程, 在解决分数布朗运动驱动的随机控制问题时, Bellman 动态规划原理失效, 所以我们自然地会使用 Pontryagin 型随机最大值原理的方法.

本文假设保险公司的盈余过程由分数布朗运动驱动, 设保险公司在保险市场上进行比例再保险来分散风险, 在金融市场上投资来增加公司财富. 其中, 我们令金融市场由一种风险资产和一种无风险资产构成, 且风险资产由布朗运动驱动. 在保险公司进行比例再保险和投资之后, 考虑延迟财富, 我们得到了一个由分数布朗运动和标准布朗运动同时驱动的随机时滞微分方程, 它代表保险公司的财富过程. 我们的目的是找到一个最优的投资-再保险策略, 使保险公司的终端期望财富达到最大值. 因此, 本文的主要研究内容如下:

(1) 研究了由分数布朗运动和标准布朗运动同时驱动的随机时滞微分方程的最优控制问题, 其中控制系统的状态变量和控制变量均含有时滞因子, 分数布朗运动与布朗运动具有相关性. 借助分数布朗运动的相关性质、对偶方法和超前的倒向随机微分方程, 我们得到了一个带有 Malliavin 导数和诱导算子的 Pontryagin 型的随机最大值原理.

(2) 研究了保险公司的最优投资-再保险问题, 其中保险公司进行比例再保险和金融投资. 利用随机最大值原理, 我们给出了最优投资-再保险策略所满足的必要条件.

关键词： 随机最优控制; 最大值原理; 分数布朗运动; 再保险

Abstract

When studying the optimal investment reinsurance strategy of insurance companies, the most common method is to apply the stochastic control theory to the risk model. Generally speaking, one method to solve the stochastic optimal control problem is Bellman's dynamic programming principle, and the other is Pontryagin's stochastic maximum principle.

When solving the optimal investment reinsurance problem, most scholars usually choose Bellman's dynamic programming principle, establish HJB equation and obtain the optimal solution of the problem through random verification theorem. However, Bellman's dynamic programming principle is heavily dependent on the semigroup property of the stochastic system, which makes the risk model of the insurance company limited to the Markov process, resulting in a large gap between the model and the actual phenomenon. Because the increments of fractional Brownian motion when Hurst parameter is greater than 1/2 have positive correlations, that is, it has a long-term dependence, so it can more accurately describe the claim process of insurance companies. Moreover, fractional Brownian motion is not a Markov process. When solving the stochastic control problem driven by fractional Brownian motion, Bellman dynamic programming principle is invalid, so we naturally use the method of Pontryagin type stochastic maximum principle.

This paper assumes that the earnings process of an insurance company is driven by fractional Brownian motion. The insurance company is supposed to carry out proportional reinsurance in the insurance market to spread the risk and invest in the financial market to increase the company's wealth. Among them, we make the financial market composed of a risky asset and a risk-free asset, and the risky asset is driven by a Brownian motion. After the insurance company carries out proportional reinsurance and investment, considering delayed wealth, we obtain a stochastic delay differential equation driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion simultaneously, which represents the wealth process of the insurance company. Our goal is to find an optimal investment-reinsurance strategy to maximize the terminal expected wealth of the insurance company. Therefore, the main research contents of this paper are as follows:

(1) We study the optimal control problem of stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motions with Hurst parameter $H > 1/2$ and the underlying Brownian motions, where the state and the control variables both have delays and the fractional Brownian motion depends on the underlying Brownian motion. With the help of the relevant properties of fractional Brownian motion, duality approach and the anticipated backward stochastic differential equations, we obtain a Pontryagin's type stochastic maximum principle involving Malliavin derivative and the induced operator.

(2) We study the optimal investment-reinsurance problem of insurance company, in which insurance company carry out proportional reinsurance and financial investment. Using the stochastic maximum principle, we give some necessary conditions for the optimal investment-reinsurance strategy.

Key words: Stochastic optimal control; Maximum principle; Fractional Brownian motion; Reinsurance

目录

第 1 章　引言 1

1.1　研究背景 1

1.2　研究现状 2

1.3　论文结构 3

第 2 章　分数布朗运动 5

2.1　概念与假设 5

2.2　Malliavin导数 7

2.3　空间和范数 8

第 3 章　时滞系统的随机最大值原理 10

3.1　随机控制问题陈述 10

3.2　变分方程与主要估计 12

3.3　随机最大值原理 16

第 4 章　最优投资-再保险策略 23

4.1　再保险 23

4.2　模型介绍 23

4.3　问题求解 26

参考文献 29

致谢 34

第 1 章　引言

1.1　研究背景

随机最优控制理论在金融数学中发挥着重要作用, 并在该领域的各种实际应用中被广泛使用着. 大多数现代的投资组合理论都是基于随机控制理论的概念和技术, 其中一些已经脱离了学术界的限制, 并在现代银行和金融实践中得到了积极应用.

近年来, 越来越多的学者用随机最优控制理论来解决保险的风险理论下的优化问题. 这是因为如今保险公司的资产负债管理越来越技术化, 与金融部门的联系也越来越紧密. 保险公司为了分散自身风险, 可以将部分责任准备金投资到金融市场中, 也可以与其他保险公司签订再保险合同. 保险公司需要制定适当的投资再保险策略来优化其投资交易并管理其风险敞口, 这就可以通过最优控制的技术来实现.

研究表明, 保险损失数据具有尖峰厚尾的特征. 因此, 保险数据的这种随机性使得用布朗运动来描述保险损失的波动情况比较受限. 作为经典布朗运动的延伸, 由 Mandelbrot 和 van Ness [1] 提出的分数布朗运动在赫斯特指数 $H \geq 1/2$ 时的增量是正相关的. 此时, 分数布朗运动具有长期相依性, 并表现出了更好的尾部行为, 从而分数布朗运动可以更能精确地刻画尖峰厚尾这一特征. 在考虑金融模型时, 分数布朗运动的长期相依性还可以用来表示股票当期价格与前一期价格的正相关关系, 因此在金融领域中用分数布朗运动代替布朗运动作为基础扩散过程的想法也越来越常见 [2, 3]. 除了金融领域, 这一随机过程还成功地应用于水文学、网络流量、物理学和许多其他领域中.

依据现有的研究, 大部分学者一直使用具有马尔可夫性质的布朗运动来刻画保险的索赔过程. 然而对于保险公司来说, 理赔过程往往具有长期依赖性. 所以在考虑保险公司的索赔过程时, 把分数布朗运动用作建模工具会比标准布朗运动更灵活些. 因此, 本文的一个创新点就是我们设保险公司的索赔过程是由分数布朗运动驱动的.

延迟或时滞现象在现实生活中被广泛观察到, 在学术界中也有很多应用.

例如, 出于生物学原因, 延迟自然会发生在种群动力学模型中. 因此, 在处理生态系统的最优收获问题时, 需要研究带有时滞因素的最优控制系统. 另一个有关延迟现象的应用领域是数学金融, 其中动态的延迟可以代表金融系统中的记忆或惯性. 如果金融市场具有有限记忆或存在与绩效相关的资本流入或流出, 那么我们需要考虑具有延迟的状态过程.

1.2 研究现状

再保险和投资是保险公司管理风险的主要方式. 近年来, 再保险和投资已经成为精算领域的热门话题. 关于最优再保险策略的研究可以追溯到 Karl [4] 和 Kenneth [5]. 20 世纪 90 年代以来, 随机控制理论开始普遍应用于最优投资再保险策略的研究中. Hipp 和 Plum [6]、David 和 Young [7] 从最小化破产概率的角度考虑保险公司的最优再保险投资问题. Yang 和 Zhang [8], Zhang 和 Siu [9], Yi 等人 [10], 以及 Liang 和 Bayraktar [11] 寻找最优再保险投资策略, 以使终端财富的预期效用最大化. Bai 和 Guo [12] 在没有做空约束的情况下, 研究了最大化指数效用和最小化破产概率的最优比例再保险投资问题. Bai 和 Zhang [13], Shen 和 Zeng [14] 还有 Zeng 等人 [15] 在均值-方差准则下, 研究不同情况下的最优再保险投资策略. Zhang 和 Meng [16] 把保险人和再保险人的利益以及再保险人的市场份额全部考虑在内, 建立了一个稳健的最优再保险投资模型, 然后用随机动态规划原理推导出HJB方程, 得到了模糊厌恶保险公司的显式最优策略. Yuan 等人 [17] 研究了具有两类保险业务的风险模型中的最优投资和再保险问题, 其中这两类保险业务的索赔数量过程具有相关性, 并且借款利率高于贷款利率.

许多学者针对分数布朗运动驱动的随机控制问题进行了研究. 例如, 2002 年 Biagini 等人 [18] 首先把分数布朗运动应用到了随机控制领域中, 他们设控制系统是由 n 维 Hurst 指数为 $H \in (1/2, 1)^n$ 的分数布朗运动驱动的, 并获得了一个最大值原理. Hu 和 Zhou [19] 研究了包含分数布朗运动的随机线性系统的最优控制问题. 他们引入了一个新的 Riccati 型方程, 这是一个由分数布朗运动和标准布朗运动驱动的倒向微分随机方程. Han 等人 [20] 获得了由分数布朗运动驱动的一般控制系统随机控制问题的极大值原理. Wang 等

人 [21] 考虑了分数布朗运动驱动的随机时滞微分方程的最优控制问题. 在他们的控制系统中, 他们假设状态变量具有延迟因子, 并推导出了最优控制问题需要满足的必要条件. Buckdahn 等人 [22] 研究了由分数布朗运动驱动的具有 Hurst 指数 $H \in (1/2, 1)$ 的平均场随机控制问题. 他们得到了一个庞特里亚金型最大值原理. Han 和 Sun [23] 考虑了由分数布朗运动驱动的随机线性控制系统, Hurst 参数 H 大于 1/2, 其中目标泛函相对于状态和控制变量是二次的. 他们获得了一个随机最大值原理作为最优控制的必要条件. Sun [24] 在控制域不一定是凸的假设下, 研究了由 [20] 引入的一般控制系统的最优控制问题. 但是, 由分数布朗运动和标准布朗运动同时驱动的的随机时滞系统的最优控制问题, 目前研究的较少. 因此, 本文将深入探讨这一类随机控制问题.

关于随机时滞微分方程的最优控制问题, 现有的理论也非常丰富, 同时也有许多的应用. Chen 和 Wu [25], Øksendal 等人 [26], Shen 等人 [27] 研究了不同情况下的随机时滞微分方程的最优控制问题, 建立了随机最大值原理, 并把最大值原理应用到了具体的金融模型上. 时滞在保险市场中的影响同样不能忽视, 大量学者也把随机时滞微分方程应用到了保险问题的研究中. 例如, Shen 和 Zeng [28] 采用三阶段程序来解决均值-方差准则下保险人的最优投资和再保险问题, 最终得到了有效的策略和保险公司均值-方差问题的有效前沿. A 和 Li [29] 在 Heston 的随机波动模型下, 研究了一个具有延迟的最有投资和超额损失再保险问题. A 等人 [30] 研究了一个具有延迟和跳扩散风险过程的最有投资和超额损失再保险问题, 通过求解 HJB 方程, 得到了最优策略和相应的值函数的闭式表达式. Xiao 和 Qiu [31] 基于再保险的系统建立了一个再保险延迟风险投资模型. 他们利用这个模型来描述保险公司的收益情况, 在最小化破产概率的优化准则下求解最优投资和再保险策略. 同时, 通过对模型参数数据的分析, 讨论了各参数对最优投资和再保险策略的影响.

1.3 论文结构

本文主要从以下四个方面展开详细研究:

第一章是引言部分, 介绍了本文的研究背景, 阐述了投资-再保险问题的研究现状.

第二章主要对分数布朗运动的相关内容进行了介绍. 给出了分数布朗运动的概念和基本性质, 回顾 Malliavin 导数的定义和性质. 介绍了几个空间和命题, 为推导最大值原理做准备.

第三章的主要内容是最大值原理的推导. 我们研究了由 Hurst 指数 $H > 1/2$ 的分数布朗运动和标准布朗运动同时驱动的随机时滞系统的最优控制问题. 给出状态方程相对应的差分方程的一个估计, 并借助对偶方法和超前的倒向随机微分方程来推导最大值原理, 获得了最优控制需要满足的必要条件.

第四章在第三章的基础上考虑了保险公司的最优投资-再保险问题. 假设保险公司的索赔过程是由分数布朗运动驱动的, 在进行比例再保险和投资之后, 把瞬时的资金流入流出考虑在内, 得到了一个由分数布朗运动和标准布朗运动同时驱动的随机时滞微分方程, 它代表保险公司的财富过程. 最后利用第三章的最大值原理给出最优投资-再保险策略的必要条件.

第 2 章 分数布朗运动

本章主要给出了一些预备知识, 为后续最大值原理的推导做铺垫. 首先我们介绍了分数布朗运动的基本概念, 并引入由核函数 $Z_H(t,s)$ 诱导的算子 $\mathbb{\Gamma}_{H,T}$, $\mathbb{\Gamma}^*_{H,T}$, 和 $\mathbb{B}^*_{H,T}$. 通过这些算子, 我们能够将关于分数布朗运动的随机积分转换成关于布朗运动的随机积分. 其次, 我们给出 Malliavin 导数的定义, 并回顾了与 Malliavin 计算相关的经典命题.

2.1 概念与假设

本文通篇假定分数布朗运动的 Hurst 指数 H 限定在 $(1/2,1)$ 区间内. 设 $T>0$ 为一个有限的时间, Hurst 指数为 H 的 m 维分数布朗运动 $B^H(t)=(B_1^H(t),\cdots,B_m^H(t),\ t\in[0,T])$ 是一个连续的高斯过程, 其具有性质

$$\mathbb{E}[B_i^H(t)]=B_i^H(0)=0$$

和

$$\mathbb{E}[B_i^H(t)B_j^H(t)]=\frac{1}{2}\delta_{ij}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}),$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } i=j,\\ 0, & \text{if } i\neq j,\end{cases}$$

$i,j=1,\ldots,m$. 当 $H=1/2$ 时, 分数布朗运动就是一个标准的布朗运动, 我们将它记作 B_t.

令 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一个完备的概率空间, 它具有一个右连续且递增的域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. $\mathcal{F}_0$ 包含所有 P 测度意义下的零测集, $\mathcal{F}_t$ 是由 Hurst 指数 $H\in(1/2,1)$ 的 m 维分数布朗运动 $B^H(t)=(B_1^H(t),\cdots,B_m^H(t),\ t\in[0,T])$ 生成的. 众所周知, 分数布朗运动可以表示为

$$B_j^H(t)=\int_0^t Z_H(t,s)dB_j(s), \tag{2.1}$$

其中 $B_t=(B_1(t),\cdots,B_m(t),\ t\in[0,T])$ 是一个 m 维的布朗运动, 核函数 $Z_H(t,s)$ 满足条件:

$$Z_H(t,s):=\kappa_H\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{1}{2}}-\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t u^{H-\frac{3}{2}}(u-s)^{H-\frac{1}{2}}du\right],$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数, κ_H 为常数,

$$\kappa_H=\sqrt{\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)}}. \tag{2.2}$$

因此, 由分数布朗运动 $\{B_t^H\}$ 生成的域流与由其基本的布朗运动生成的域流是一致的, 也就是,

$$\mathcal{F}_t=\sigma(B_1^H(s),\ldots,B_m^H(s),\ 0\le s\le t)=\sigma(B_1(s),\ldots,B_m(s),\ 0\le s\le t).$$

回顾由 (2.1) 诱导的算子 $\mathbb{\Gamma}_{H,T}$, $\mathbb{\Gamma}_{H,T}^*$ 和 $\mathbb{B}_{H,T}^*$ (见 [32] 中的 (5.4), (5.21) 和 (5.35)).

$$\mathbb{\Gamma}_{H,T}f(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}Z_H(t,s)f(s)ds,\quad 0\le t\le T,$$

$$\mathbb{\Gamma}_{H,T}^*f(t)=\left(H-\frac{1}{2}\right)\kappa_H t^{\frac{1}{2}-H}\int_t^T u^{H-\frac{1}{2}}(u-t)^{H-\frac{3}{2}}f(u)du,\quad 0\le t\le T \tag{2.3}$$

和

$$\mathbb{B}_{H,T}^*f(t)=-\frac{2H\kappa_1}{\kappa_H}t^{\frac{1}{2}-H}\frac{d}{dt}\int_t^T(u-t)^{\frac{1}{2}-H}u^{H-\frac{1}{2}}f(u)du,$$

其中 κ_H 的定义在 (2.2), 并且

$$\kappa_1=\frac{1}{2H\Gamma(H-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-H)}.$$

令 $\mathbf{A}:=\{\mathbb{B}_{H,T}^*f: f\in\mathbf{S}\}$, 其中 $\mathbf{S}$ 表示在区间 $[0,T]$ 上导数有界的所有光滑函数的集合. 对于 $\mathbf{A}$ 中的任意两个元素 $g_1=\mathbb{B}_{H,T}^*f_1$ 和 $g_2=\mathbb{B}_{H,T}^*f_2$, 定义

$$\langle g_1,g_2\rangle_{\Theta_H}:=\int_0^T f_1(t)f_2(t)dt=\int_0^T\mathbb{\Gamma}_{H,T}^*g_1(t)\mathbb{\Gamma}_{H,T}^*g_2(t)dt.$$

将$\mathbf{A}$ 通过标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Theta_H}$ 张成的空间表示为 $\Theta_H([0,T])$. 当 $g_1=g_2$ 时, 我们有范数表达式:

$$\|g_1\|^2_{\Theta_H}=\int_0^T|f_1(t)|^2dt=\int_0^T|\Gamma^*_{H,T}g_1(s)|^2ds.$$

使用算子 $\Gamma^*_{H,T}$, 我们可以把关于分数布朗运动的积分转换成关于标准布朗运动的积分:

设 $f\in\Theta_H([0,T])$ 为一个确定的函数. 定义 ([32] 定义 6.1)

$$\int_0^T f(t)dB_j^H(t):=\int_0^T(\Gamma^*_{H,T}f)(t)dB_j(t). \tag{2.4}$$

接下来, 我们给出关于分数布朗运动的 Wick-Itô 型积分和 Stratonovich 型积分的定义([33] 定义2.1):

令 $\{\pi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ 为 $[0,t]$ 上的分划 $\pi_n:0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$, 当 $n\to\infty$ 时, 满足 $|\pi_n|\to 0$. 若对于所有分划 $\{\pi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ 来说, $\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i^{(n)})\diamond(B_j^H(t_{i+1}^{(n)})-B_j^H(t_i^{(n)}))$ 在空间 $L^2(\Omega,\,\mathcal{F},\,P)$ 中都收敛到同一个极限, 其中 $\diamond$ 代表 Wick 积, 那么这个极限称为 Wick-Itô 型随机积分, 记作 $\int_0^t f(s)dB_j^H(s)$.

若 $\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i^{(n)})(B_j^H(t_{i+1}^{(n)})-B_j^H(t_i^{(n)}))$ 在空间 $L^2(\Omega,\,\mathcal{F},\,P)$ 中, 对于所有的分划 $\{\pi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ 都收敛到同一个极限, 那么这个极限称作 Stratonovich 型随机积分, 记作 $\int_0^t f(s)\circ dB_j^H(s)$.

2.2 Malliavin 导数

设 $\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots$ 为 $L^2([0,T])$ 空间上的正交基, 则 $\xi_k, k=1,2,\cdots$ 是 $[0,T]$ 上的光滑函数. 令 $\eta_k=\Gamma^*_{H,T}\xi_k$. 则 $\eta_1,\cdots,\eta_k,\cdots$ 为空间 Θ_H 上的正交基. 我们把 $\mathcal{P}^H$ 记作 $[0,T]$区间上由分数布朗运动的随机积分 $\int_0^T\eta_k(t)dB_j^H(t)$ 构成的所有多项式的集合. 也就是说, $\mathcal{P}^H$ 包含具有以下形式的所有元素

$$G(w)=g\left(\int_0^T\eta_{k_1}(t)dB_{j_1}^H(t),\cdots,\int_0^T\eta_{k_n}(t)dB_{j_n}^H(t)\right),$$

其中 $j=1,\ldots,m$, g 为 n 个变量的多项式. 关于元素 $G\in\mathcal{P}^H$ 的 Malliavin 导数 $D_s^H(0\le s\le T)$ 的定义为

$$D_s^{H,j}G=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\int_0^T\eta_{k_1}(t)dB_{j_1}^H(t),\cdots,\int_0^T\eta_{k_n}(t)dB_{j_n}^H(t)\right)\eta_{k_i}(s)I_{\{j_i=j\}}.$$

G 的另一种形式的 Malliavin 导数 $\mathbb{D}_t^{H,j}G$ 是通过 ϕ 来引进的. 它的定义如下

$$\mathbb{D}_t^{H,j}G = \int_0^T \phi(s,t) D_s^{H,j} G ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.5}$$

其中

$$\phi(s,t) = H(2H-1)|s-t|^{2H-2}. \tag{2.6}$$

2.3 空间和范数

在本节中, 我们给出将在后续章节中使用到的赋范空间.

1. $\mathcal{L}(0,T)$ 是 $[0,T]$ 区间上的随机过程的集合, 此空间中的元素 $F \in \mathcal{L}(0,T)$ 满足条件: $\mathbb{E}\|F\|_T^2 < \infty$, F 是 ϕ 可导的 (见 [34]), Malliavin 导数算子 $(\mathbb{D}_s^H F_t,\ 0 \le s,\, t \le T)$ 存在并且 $\mathbb{E}\int_0^T (\mathbb{D}_s^H F_s)^2 ds < \infty$. $\mathcal{L}(0,T)$ 空间的范数 $\|\cdot\|_T$ 定义如下

   $$\|F\|_T^2 := \int_0^T \int_0^T F(s)F(r)\phi(s,r) ds dr,$$

   其中 $\phi(s,r)$ 由 (2.6) 定义.
2. $\mathbb{D}_{H,1,p}$ 是由 $\mathcal{P}^H$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H,1,p}$ 张成的 Banach 空间. 对于任意的 $G \in \mathcal{P}^H$, $p \in (1,\infty)$, 其范数 $\|\cdot\|_{H,1,p}$ 的定义为

   $$\|G\|_{H,1,p} := \mathbb{E}(\|G\|_{\Theta_H}^p)^{1/p} + \left[\mathbb{E}\left(\int_0^T |D_t^H G|^2 dt\right)^{p/2}\right]^{1/p}.$$

3. 设 $1/2 < H < 1$, $1-H < \alpha < 1/2$, $d \in \mathbb{N}^*$. $W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ 可测函数 $f:[0,T] \to \mathbb{R}^d$ 的空间, 可测函数 f 满足

   $$\|f\|_{\alpha,\infty} := \sup_{0 \le t \le T} \|f\|_{\alpha,t} < \infty,$$

   其中

   $$\|f\|_{\alpha,t} := |f(t)| + \int_0^t \frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds. \tag{2.7}$$

我们将在下一章中用到以下命题.