

§3.2 二维随机变量的 条件分布

—— 将条件概率的概念推广到随机变量

● 二维离散型随机变量的条件分布律

设已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

若
$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} > 0$$

则称
$$\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{p_{i\bullet}} \quad \text{记作} \quad = P(Y = y_j | X = x_i)$$

$j = 1, 2, \dots$

为在 $X = x_i$ 的条件下, Y 的条件分布律

若 $p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} > 0,$

则称 $\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \stackrel{\text{记作}}{=} P(X = x_i | Y = y_j)$
 $i = 1, 2, \dots$

为在 $Y = y_j$ 的条件下, X 的条件分布律
类似于乘法公式

$$\begin{aligned} P(X = x_i, Y = y_j) &= P(X \\ &\stackrel{\text{或}}{=} P(Y = y_j)P \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

类似于全概率公式

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(Y = y_j | X = x_i) P(X = x_i)$$

$$j = 1, 2, \dots$$

例1 把三个球等可能地放入编号为1, 2, 3 的三个盒子中, 每盒容纳的球数无限. 记 X 为落入 1 号盒的球数, Y 为落入 2 号盒的球数, 求

- (1) (X, Y) 的联合分布律与边缘分布律;
- (2) $P(X = i | Y = 0)$ 与 $P(Y = j | X = 2)$;

联合分布律的求法: 由乘法公式

$$\begin{aligned} P(X = x_i, Y = y_j) &= P(X = x_i)P(Y = y_j | X = x_i) \\ &\quad \text{或} \\ &= P(Y = y_j)P(X = x_i | Y = y_j) \end{aligned}$$

在§3.1已计算过

$$= C_{3-i}^j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-i-j} \quad j = 0, \dots, 3-i$$

$$i = 0$$

$$P(X = i | Y = j) = C_{3-j}^i \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-j-i} \quad i = 0, \dots, 3-j$$

$$j = 0, \dots, 3$$

由问题的意义可知

X	0	1	2	3
$P(X = i Y = 0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1
$P(Y = j X = 2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

另一方面，若已知联合分布律，则可由它求出条件分布律.

假设已知本例的联合分布律如下表所示

求条件分布律即对矩形框中的数据进行运算

p_{ij} $X \backslash Y$		0	1	2	3	$p.$
	j					
0		$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1		$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3		$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
p_i		$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1
.						

例2 一射手进行独立射击, 已知每次他击中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 射击一直进行到击中两次目标为止. 令 X 表示他首次击中目标所进行射击的次数, Y 表示他总共进行射击的次数. 求 X 和 Y 的联合分布律、条件分布律和边缘分布律.

解 ($Y = n$ —— 第 n 次击中目标, 前 $n - 1$ 次恰有一次击中目标

故联合分布律为

$$P(X = m, Y = n) = p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$m = 1, 2, \dots, n-1; n = 2, 3, \dots$$

$$(m = 1, 2, \dots; n = m+1, m+2, \dots)$$

边缘分布律为

$$\begin{aligned} P(X = m) &= \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{p^2 (1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)} = p(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

$$m = 1$$

$$P(Y = n) = \sum_{n=2}^{n-1} \binom{n-1}{n-2} p^{n-1} (1-p)^2$$

$$= (n-1) p^{n-1} (1-p)^2$$

$$n = 2, 3, \dots$$

条件分布律为

对每个 $n, (n = 2, 3, \dots)$

$$= \frac{p^2 (1-p)^{n-2}}{(n-1) p^2 (1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$
$$m = 1, 2, \dots, n-1$$

对每个 $m, (m = 1$

$$P(Y = n | X = m) = P(X = m$$
$$= \frac{p^2 (1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}$$
$$n = m+1, m+2, \dots$$

二维连续型随机变量的条件分布函数和条件密度函数

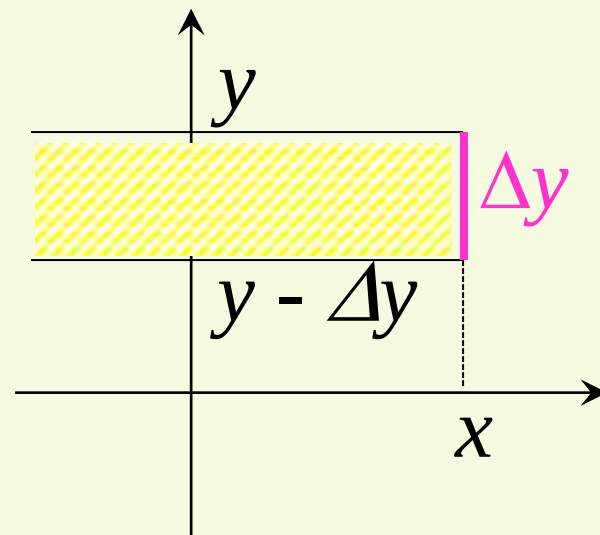
设二维连续型随机变量 (X, Y) 的
联合分布函数为 $F(x, y)$,
联合密度函数为 $f(x, y)$

X 的边缘分布函数为 $F_X(x)$,
边缘密度函数为 $f_X(x)$

Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)$,
边缘密度函数为 $f_Y(y)$

→ 设 $\Delta y > 0$

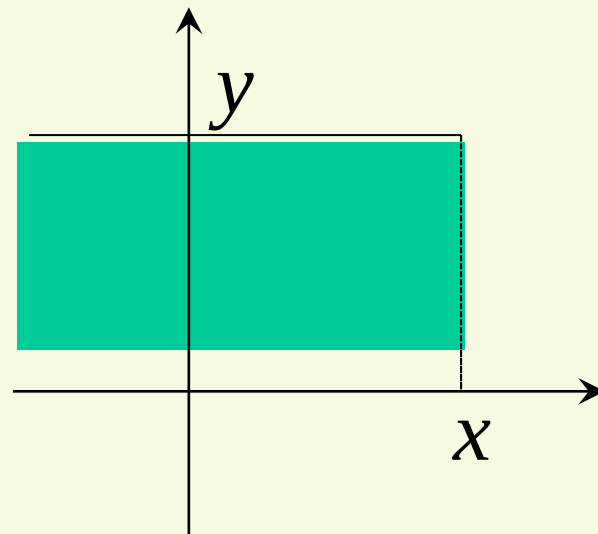
$$\begin{aligned} & P(X \leq x \mid y - \Delta y < Y \leq y) \\ &= \frac{P(X \leq x, y - \Delta y < Y \leq y)}{P(y - \Delta y < Y \leq y)} \\ &= \frac{F(x, y) - F(x, y - \Delta y)}{F_Y(y) - F_Y(y - \Delta y)} \\ &= \frac{[F(x, y - \Delta y) - F(x, y)] / (-\Delta y)}{[F_Y(y - \Delta y) - F_Y(y)] / (-\Delta y)} \end{aligned}$$



$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0+} \frac{[F(x, y - \Delta y) - F(x, y)] / (-\Delta y)}{[F_Y(y - \Delta y) - F_Y(y)] / (-\Delta y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial}}{dF} = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) du}{f_Y(y)}$$

$f(x, y)$ 连续
 $f_Y(y) \neq 0$, 连续



def.

$$= P(X \leq x | Y = y)$$

定义 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, $f_Y(y)$ 在点 y 处连续
且 $f_Y(y) > 0$, 则称

$$\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^x f(u,y)du}{f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^x f(u,y)du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du}$$
$$= \int_{-\infty}^x \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

为 $Y = y$ 的条件下 X 的条件分布函数, 记作

$F_{X|Y}(x|y)$, 称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y = y$ 的条件下 X 的

条件概率密度函数, 记作 $f_{X|Y}(x|y)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/988116125057006026>