

北京市北师大附中 2025 年高考预测金卷数学试题文（湖南卷）

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 R 上函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(1+x)+f(2-x)=0$ ，若 $f(1)=1$ ，则

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2020)=\quad(\quad)$$

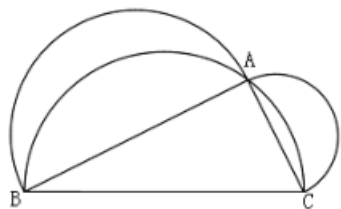
- A. 0 B. 1 C. 673 D. 674

2. 已知 $A(-\sqrt{3},0)$ ， $B(\sqrt{3},0)$ ， P 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点， $\vec{AP}=\vec{PQ}$ ，过点 P 作与 AP 垂直的直线 l 交直线 QB

于点 M ，若点 M 的横坐标为 x ，则 $|x|$ 的取值范围是 $(\quad)$

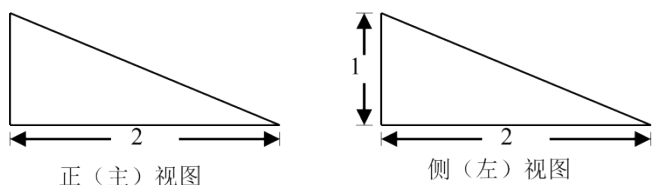
- A. $|x|\geq 1$ B. $|x|>1$ C. $|x|\geq 2$ D. $|x|\geq \sqrt{2}$

3. 如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC ，直角边 AB, AC 。已知以直角边 AC, AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，记 $\angle ABC = \alpha$ ，则 $\sin 2\alpha =$
- $(\quad)$



- A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为 $(\quad)$

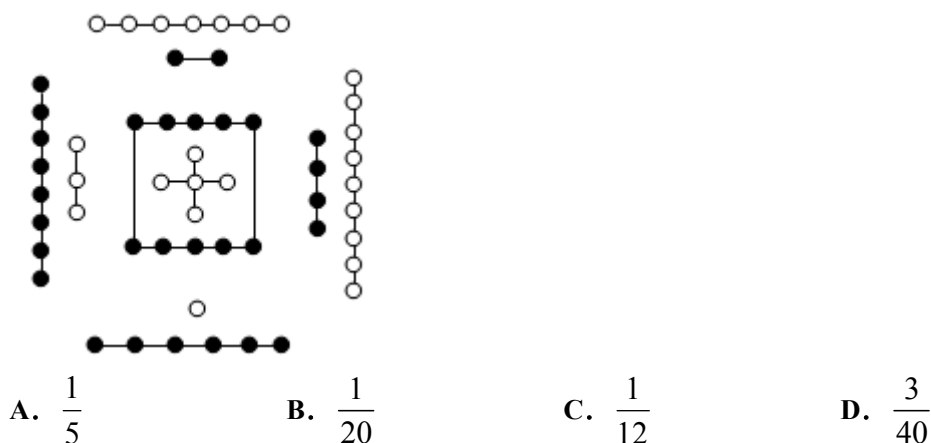


- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

5. 根据党中央关于“精准”脱贫的要求，我市某农业经济部门派四位专家对三个县区进行调研，每个县区至少派一位专家，则甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中华文化，阴阳术数之源，其中河图的排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中.如图，白圈为阳数，黑点为阴数.若从这 10 个数中任取 3 个数，则这 3 个数中至少有 2 个阳数且能构成等差数列的概率为（ ）



7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，过 F_1 的直线交椭圆于 A 、 B 两点，交 y 轴于点 M ，

若 F_1 、 M 是线段 AB 的三等分点，则椭圆的离心率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

8. 在区间 $[-3, 3]$ 上随机取一个数 x ，使得 $\frac{3-x}{x-1} \geq 0$ 成立的概率为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差，且 $a_2 + a_6 = -4$ ，若 $a_n > 0$ ，则 n 的最小值为（ ）

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n = a_{b_n}$,

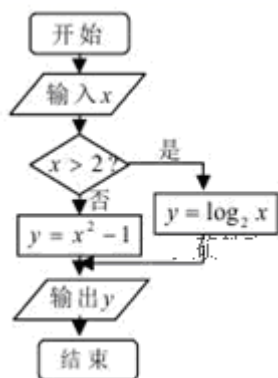
$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

10. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ()

- A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

11. 执行如图所示的程序框图, 若输出的结果为 3, 则可输入的实数 x 值的个数为 ()



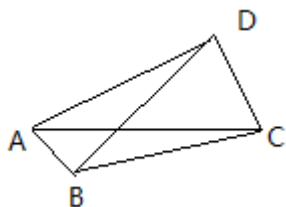
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A、B 两点, 则 $|AB|$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $|AB| = 3, |BC| = 4$, 则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) =$ _____



14. 我国古代名著《张丘建算经》中记载: “今有方锥下广二丈, 高三丈, 欲斩末为方亭; 令上方六尺: 问亭方几何?” 大致意思是: 有一个四棱锥下底边长为二丈, 高三丈; 现从上面截取一段, 使之成为正四棱台状方亭, 且四棱台的上底边长为六尺, 则该正四棱台的高为 _____ 尺, 体积是 _____ 立方尺 (注: 1 丈=10 尺)。

15. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq x, \\ 3x + 2y \leq 15, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值是_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, B, C 的坐标分别为 $(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0)$, 且满足 $\sin B - \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin A$, O 为坐标原点,

若点 P 的坐标为 $(4, 0)$, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{AP}$ 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知不等式 $|2x - 1| - |x + 1| < 2$ 的解集为 $\{x | a < x < b\}$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 已知 $x > y > z$ 存在实数 k 使得 $-\frac{3a}{2(x-y)} + \frac{b}{4(y-z)} \geq \frac{k}{x-z}$ 恒成立, 求实数 k 的最大值.

18. (12 分) 已知 $f(x) = x \ln x$ 与 $y = a$ 有两个不同的交点 A, B , 其横坐标分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $ae + 1 < x_2 - x_1 < \frac{3a + 2 + e^{-3}}{2}$.

19. (12 分) 2020 年, 山东省高考将全面实行“3 + [6 选 3]”的模式 (即 语文、数学、外语为必考科目, 剩下的物理、化学、历史、地理、生物、政治六科任选三科进行考试). 为了了解学生对物理学科喜好程度, 某高中从高一年级学生中随机抽取 200 人做调查. 统计显示, 男生喜欢物理的有 64 人, 不喜欢物理的有 56 人; 女生喜欢物理的有 36 人, 不喜欢物理的有 44 人.

(1) 据此资料判断是否有 75% 的把握认为“喜欢物理与性别有关”;

(2) 为了了解学生对选科的认识, 年级决定召开学生座谈会. 现从 5 名男同学和 4 名女同学 (其中 3 男 2 女喜欢物理) 中, 选取 3 名男同学和 2 名女同学参加座谈会, 记参加座谈会的 5 人中喜欢物理的人数为 X , 求 X 的分布列及期望 $E(X)$.

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.05
k	1.323	2.706	3.841

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$

(1) 已知直线 $l: x - y - 1 = 0$, $l_1: 2x - y - 2 = 0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称, 又函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 l_2 垂直, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $g(x) = (e - 2)x + 1$, 则当 $x > 0$, $a = 1$ 时, 求证:

① $f(x) \geq g(x)$;

② $e^x - ex - 1 \geq x(\ln x - 1)$.

21. (12 分) 某企业生产一种产品, 从流水线上随机抽取 100 件产品, 统计其质量指标值并绘制频率分布直方图 (如图 1): 规定产品的质量指标值在 $[65, 85)$ 的为劣质品, 在 $[85, 105)$ 的为优等品, 在 $[105, 115]$ 的为特优品, 销售时劣质品每件亏损 0.8 元, 优等品每件盈利 4 元, 特优品每件盈利 6 元, 以这 100 件产品的质量指标值位于各区间的频率代替产品的质量指标值位于该区间的概率.

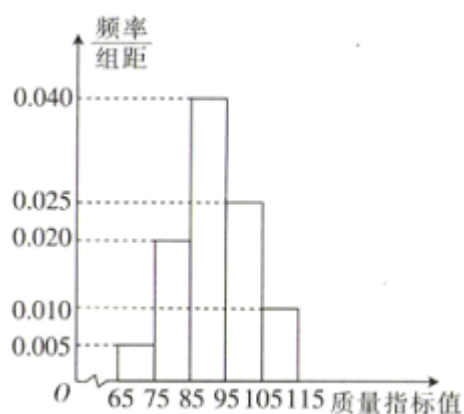


图 1

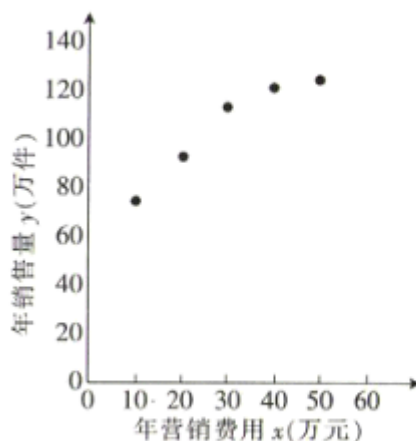


图 2

- (1) 求每件产品的平均销售利润;
- (2) 该企业主管部门为了解企业年营销费用 x (单位: 万元) 对年销售量 y (单位: 万件) 的影响, 对该企业近 5 年的年营销费用 x_i 和年销售量 y_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 数据做了初步处理, 得到的散点图 (如图 2) 及一些统计量的值.

$\sum_{i=1}^5 u_i$	$\sum_{i=1}^5 v_i$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2$
16.35	23.4	0.54	1.62

表中 $u_i = \ln x_i$, $v_i = \ln y_i$, $\bar{u} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 u_i$, $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

根据散点图判断, $y = ax^b$ 可以作为年销售量 y (万件) 关于年营销费用 x (万元) 的回归方程.

①求 y 关于 x 的回归方程;

②用所求的回归方程估计该企业每年应投入多少营销费, 才能使得该企业的年收益的预报值达到最大? (收益 = 销售利润 - 营销费用, 取 $e^{3.59} = 36$)

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

22. (10 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , AB 为过焦点 F 且垂直于 x 轴的抛物线 C 的弦, 已知以 AB 为直径的圆经过点 $(-1, 0)$.

(1) 求 p 的值及该圆的方程;

(2) 设 M 为 l 上任意一点, 过点 M 作 C 的切线, 切点为 N , 证明: $MF \perp FN$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

由题知 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1+x)+f(2-x)=0$ 可得函数 $f(x)$ 的周期为 3，分别求出

$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=-1$ ，知函数在一个周期内的和是 0，利用函数周期性对所求式子进行化简可得.

【详解】

因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(0)=0$ ；

因为 $f(1+x)+f(2-x)=0$ ，故 $f(1+x)=-f(2-x)=f(x-2)$ ，

可知函数 $f(x)$ 的周期为 3；

在 $f(1+x)+f(2-x)=0$ 中，令 $x=1$ ，故 $f(2)=-f(1)=-1$ ，

故函数 $f(x)$ 在一个周期内的函数值和为 0，

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2020)=f(1)=1$.

故选：B.

本题考查函数奇偶性与周期性综合问题. 其解题思路：函数的奇偶性与周期性相结合的问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行变换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

2. A

【解析】

由题意得 $\|MB\|-\|MA\|=\|BQ\|=2\|OP\|$ ，即可得点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a=1$ 的双曲线，根据双曲线的性质即可得解.

【详解】

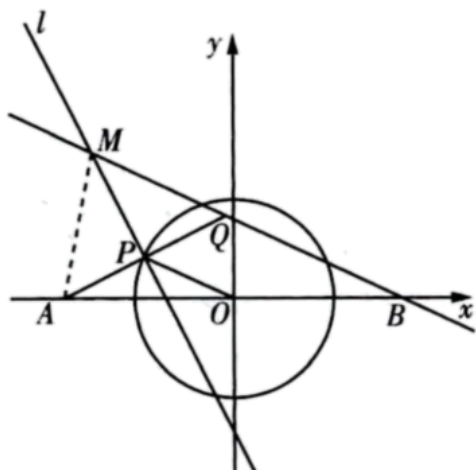
如图，连接 OP, AM ，

由题意得 $\|MB\|-\|MA\|=\|BQ\|=2\|OP\|=2$ ，

$\therefore$ 点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a=1$ 的双曲线，

$\therefore |x|\geq 1$.

故选：A.



本题考查了双曲线定义的应用，考查了转化化归思想，属于中档题.

3. D

【解析】

由半圆面积之比，可求出两个直角边 AB, AC 的长度之比，从而可知 $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，结合同角三角函数的基本关系，即可求出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ ，由二倍角公式即可求出 $\sin 2\alpha$.

【详解】

解：由题意知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，以 AB 为直径的半圆面积 $S_1 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ，

以 AC 为直径的半圆面积 $S_2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2$ ，则 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ，所以 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$.

故选:D.

本题考查了同角三角函数的基本关系，考查了二倍角公式.本题的关键是由面积比求出角的正切值.

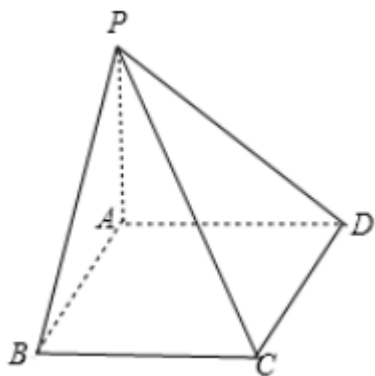
4. B

【解析】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，由此求出四棱锥的体积.

【详解】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，画出四棱锥的直观图，如图所示：



则该四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 = \frac{4}{3}$.

故选：B.

本题考查了利用三视图求几何体体积的问题，是基础题.

5. A

【解析】

每个县区至少派一位专家，基本事件总数 $n = 36$ ，甲，乙两位专家派遣至同一县区包含的基本事件个数 $m = 6$ ，由此能求出甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率.

【详解】

派四位专家对三个县区进行调研，每个县区至少派一位专家

基本事件总数： $n = C_4^2 A_3^3 = 36$

甲，乙两位专家派遣至同一县区包含的基本事件个数： $m = C_2^2 C_3^1 A_2^2 = 6$

$\therefore$ 甲，乙两位专家派遣至同一县区的概率为： $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

本题正确选项：A

本题考查概率的求法，考查古典概型等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

6. C

【解析】

先根据组合数计算出所有的情况数，再根据“3个数中至少有2个阳数且能构成等差数列”列举得到满足条件的情况，由此可求解出对应的概率.

【详解】

所有的情况数有： $C_{10}^3 = 120$ 种，

3个数中至少有2个阳数且能构成等差数列的情况有：

$(1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (3, 6, 9), (1, 3, 5), (3, 5, 7), (5, 7, 9), (1, 5, 9)$ ，共10种，

所以目标事件的概率 $P = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$.

故选: C.

本题考查概率与等差数列的综合, 涉及到背景文化知识, 难度一般. 求解该类问题可通过古典概型的概率求解方法进行分析; 当情况数较多时, 可考虑用排列数、组合数去计算.

7. D

【解析】

根据题意, 求得 A, M, B 的坐标, 根据点在椭圆上, 点的坐标满足椭圆方程, 即可求得结果.

【详解】

由已知可知, M 点为 AF_1 中点, F_1 为 BM 中点,

故可得 $x_{F_1} + x_A = 2x_M = 0$, 故可得 $x_A = c$;

代入椭圆方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 不妨取 $y_A = \frac{b^2}{a}$,

故可得 A 点的坐标为 $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$,

则 $M\left(0, \frac{b^2}{2a}\right)$, 易知 B 点坐标 $\left(-2c, -\frac{b^2}{2a}\right)$,

将 B 点坐标代入椭圆方程得 $a^2 = 5c^2$, 所以离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

故选: D.

本题考查椭圆离心率的求解, 难点在于根据题意求得 A, B, M 点的坐标, 属中档题.

8. D

【解析】

由题意, 本题符合几何概型, 只要求出区间的长度以及使不等式成立的 x 的范围区间长度, 利用几何概型公式可得概率, 即等差数列的公差, 利用条件 $a_2 + a_6 = 2a_4$, 求得 $a_4 = -2$, 从而求得 $a_n = -\frac{10}{3} + \frac{n}{3}$, 解不等式求得结果.

【详解】

由题意, 本题符合几何概型, 区间 $[-3, 3]$ 长度为 6,

使得 $\frac{3-x}{x-1} \geq 0$ 成立的 x 的范围为 $(1, 3]$, 区间长度为 2,

故使得 $\frac{3-x}{x-1} \geq 0$ 成立的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = d$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/988120127012006124>