考试备考资料

（习题试卷、考点）

2022年高二数学上册常考题专练重难点突破专题14　圆锥曲线中的范围、最值问题

圆锥曲线中的最值问题大致可分为两类：一是涉及距离、面积的最值以及与之相关的一些问题；二是求直线或圆锥曲线中几何元素的最值，以及当这些元素存在最值时，求解与之有关的一些问题.



对于最值问题，一般可以用数形结合的方法或转化为函数的最值问题加以解决；解决最值范围问题时，应重视曲线的定义、曲线的几何特征、方程的代数特征在解题中的作用

题型一　转化为斜率

由代数式的结构特征联想县其斜率公式，将代数问题转化为斜率问题，利用图形的直见性使问题得到简化.

1．试求函数 $f(x)=\dfrac{-1-2\sin x}{-3-\sqrt{5}\cos x}$ 的最大值、最小值.

题型二　转化为截距

利用直线在 y 轴上的截距的直观性，可求有关参数的取值范围，进而得到最值.

2．已知 x，y 满足 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}\leq 1$，则 $z=y-3x$ 的最大值为 ____，最小值为 ____.

题型三　转化为三角函数

利用椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

以及双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程 $\begin{cases}x=\frac{a}{\cos\theta},\\ y=b\tan\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数）等，

将椭圆和双曲线上的点的坐标用三角函数表示出来，再利用三角函数知识来求其最值.

3．过点 $B(0,-b)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的弦，若弦长的最大值是 $2b$，则椭圆离心率的取值范围是_____.

4．设 A、B 分别是椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 的左顶点和上顶点，点 P 在 C 上，则点 P 到直线 AB 的距离的最大值为(　　)

A．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

题型四　利用基本不等式

5．函数 $y=a^{3-x}(a>0,a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A，若点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$ 上，则 $m-n$ 的最大值为(　　)

A．6　　B．4　　C．2　　D．1

6．设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，若 C 的焦距为 12，则 ΔOAB 面积的最大值为(　　)

A．72　　B．36　　C．18　　D．9

7．设 O 为坐标原点，点 $A(1,0)$，动点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，且位于第一象限，M 是线段 PA 的中点，则直线 OM 的斜率的取值范围为(　　)

A．$(0，1]$　　B．$(0,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1，+\infty)$

8．椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为椭圆 M 上任一点，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 最

大值取值范围为$[2c^2,\ 3c^2]$（其中$c^2=a^2-b^2$），则椭圆M的离心率的取值范围是(　　)

A．$[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　B．$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　C．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$　　D．$[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

9．已知函数$y=\log_a(x-1)+1(a>0$，且$a\neq1)$的图象恒过定点A，若点A在椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$上，则$m+n$的最小值为(　　)

A．12　　B．10　　C．9　　D．8

10．抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，E的准线l与x轴交于点A，M为E上的动点.则$\frac{|MF|}{|MA|}$的最小值为(　　)

A．1　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

题型五　构造二次函数

利用解析几何中的代数和识，把问题转化为关于某个变量的二次函数，利用二次函数的有关知识来求最值.

11．抛物线$y^2=2x$上的点到直线$x+\sqrt{3}y+5=0$距离的最小值是(　　)

A．3　　B．$\frac{8}{5}$　　C．$\frac{7}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

12．已知点P在椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$上运动，点$Q$在圆$(x-1)^2+y^2=\frac{5}{8}$上运动，则$|PQ|$的最小为(　　)

A．2　　B．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$2-\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{4}$

13．已知抛物线$C:y=\frac{1}{4}x^2$，过抛物线焦点的直线交抛物线于A，B两点，若直线AO，BO分别交直线$y=x-2$于E，F两点，则$|EF|$的最小值(　　)

A．$\frac{25}{3}$　　B．$\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{128}{25}$　　D．$\frac{8\sqrt{2}}{5}$

14.已知直线l与抛物线$y^2=4x$交于A，B两点(点A在第一象限，点B在第四象限)，与x轴交于点$M(m,0)$，若线段AB的中点的横坐标为3，则m的取值范围是(　　)

A．(0，3]　　B．$(-\infty$，3]　　C．(0，6]　　D．(1，6]

15．P 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 左支上任意一点，EF 为圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 的任意一条直径，则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值为(　　)

A．3　　B．4　　C．5　　D．9

16．在过动直线 $x+2y=t$（其中 $t\in(0,3a]$）与定直线 $2x-y=a$ 的交点 Q 的等轴双曲线系：$x^2-y^2=\lambda$ 中，当 t 取何值时，λ 达到最大值与最小值？

17．已知抛物线 $C:y^2=x$，M 为 x 轴负半轴上的动点，MA，MB 为抛物线的切线，A，B 分别为切点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为(　　)

A．$-\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{1}{8}$　　C．$-\frac{1}{16}$　　D．$-\frac{1}{2}$

题型六　利用几何图形的性质

18．已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点且斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 R 是含抛物线顶点 O 的弧 AB 上一点，求 ΔRAB 的最大面积．

19．已知平行四边形 $ABCD$ 内接于椭圆 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 AB，AD 斜率之积的取值范围为 $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{4})$，则椭圆 Ω 的离心率的取值范围为(　　)

A．$(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{1}{2})$　　B．$(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{5}}{5})$　　D．$(\frac{1}{5},\frac{1}{4})$

20．设 $P(x,y)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右支上的点，则代数式 $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}-\sqrt{x^2+y^2-6x+9}$ 的最小值为(　　)

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{5}-\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{10}-\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{5}+\sqrt{6}-3$

21．已知点 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一个动点，点 P 到点 $(0,\sqrt{3})$ 的距离与 P 到 y 轴的距离之和的最小值为(　　)

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$1+\sqrt{3}$

22．已知抛物线 $y=ax^2$ 的焦点为 $(0,1)$，直线 $y=kx+1$ 与该抛物线相交于 A，B 两点，则线段 AB 的最小值为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

23．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的左焦点为 F，点 M 在双曲线 C 的右支上，$A(0,3)$，当 ΔMAF 的周长最小时，ΔMAF 的面积为(　　)

A．$\frac{60}{7}$　　B．9　　C．$\frac{3}{7}$　　D．4

题型七　利用圆锥曲线的定义

24．已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$F$ 是椭圆的左焦点，P 是椭圆上一点，若椭圆内一点 $A(1,1)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为(　　)

A．3　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{5}+\frac{1}{2}$　　D．$\sqrt{5}+1$

25．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，设 A 和 B 是 C 上的两点，且 M 是线段 AB 的中点，若 $|AB|=6$，则 M 到 y 轴的距离的最小值是(　　)

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

26．双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$，已知 O 是坐标原点，A 是双曲线 C 的斜率为正的渐近线与直线 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的交点，F 是双曲线 C 的右焦点，D 是线段 OF 的中点，若 B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的一点，则 ΔABD 的面积的最小值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{2\sqrt{6}-3}{3}$　　C．2　　D．$\frac{\sqrt{3}-1}{3}$

27．已知 M 为抛物线 $C:y^2=4x$ 上一点，过抛物线 C 的焦点 F 作直线 $x+(m-1)y=5-2m$ 的垂线，垂足为 N，则 $|MF|+|MN|$ 的最小值为（　　）

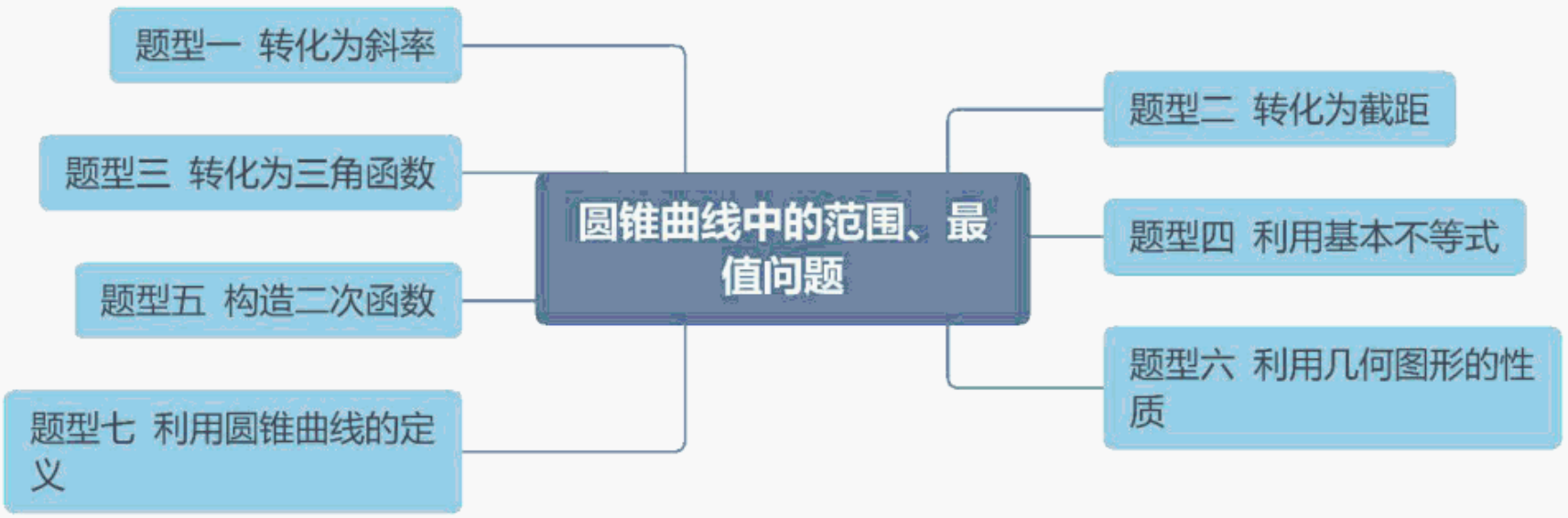
A．$2\sqrt{2}-3$　　B．$2\sqrt{2}-2$　　C．$2+\sqrt{2}$　　D．$3-\sqrt{2}$

28．已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $\sqrt{3}x-y=0$，右焦点为 F，点 M 在双曲线左支上运动，点 N 在圆 $x^2+(y+3)^2=1$ 上运动，则 $|MN|+|MF|$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D

专题 14　圆锥曲线中的范围、最值问题

圆锥曲线中的最值问题大致可分为两类：一是涉及距离、面积的最值以及与之相关的一一些问题；二是求直线或圆锥曲线中几何元素的最值，以及当这些元素存在最值时，求解与之有关的一些问题.



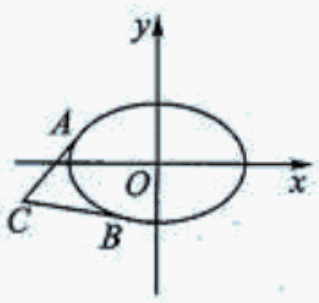
对于最值问题，一般可以用数形结合的方法或转化为函数的最值问题加以解决；解决最值范围问题时，应重视曲线的定义、曲线的几何特征、方程的代数特征在解题中的作用

题型一　转化为斜率

由代数式的结构特征联想县其斜率公式，将代数问题转化为斜率问题，利用图形的直见性使问题得到简化.

1．试求函数 $f(x)=\dfrac{-1-2\sin x}{-3-\sqrt{5}\cos x}$ 的最大值、最小值.

【解答】解：设 CA，CB 是椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两条切线，如图所示，



C 点坐标为 $(-3,-1)$，由椭圆的参数方程可得 $\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\sqrt{5}\cos x\end{cases}$

故 $f(x)$ 的最大值为 k_{CA}，$f(x)$ 的最小值为 k_{CB}，

设过 C 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的切线方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，

消去 y，得 $(4+5k^2)x^2+10kmx+5m^2-20=0$，

由 $\triangle=0$ 得 $m=\pm\sqrt{5k^2+4}$，

所以切线方程为 $y=\pm kx\pm\sqrt{5k^2+4}$，

因为切线过点 $C(-3,-1)$，所以 $-1=-3k\pm\sqrt{5k^2+4}$.

所以 $k_1=\frac{3+\sqrt{21}}{4}, k_2=\frac{3-\sqrt{21}}{4}$，

所以 $f(x)$ 的最大值 $\frac{3+\sqrt{21}}{4}$，$f(x)$ 的最小值为 $\frac{3-\sqrt{21}}{4}$.

题型二　转化为截距

利用直线在 y 轴上的截距的直观性，可求有关参数的取值范围，进而得到最值.

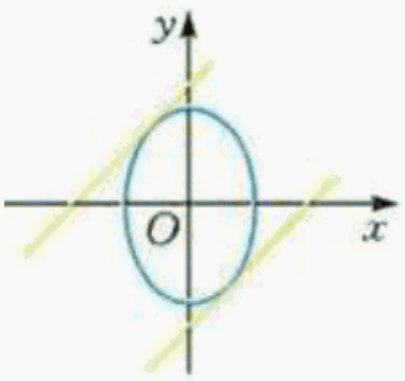
2．已知 x，y 满足 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$„ 1，则 $z=y-3x$ 的最大值为 __13__，最小值为 ____.

【解答】解：将所给的函数式改写为 $y=3x+z$，则 z 表示直线 $y=3x+z$ 在 y 轴上的截距，

∵ x，y 满足 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$„ 1，

∴ 可行域为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 的边界及其内部，

画出图形，如图所示，



由图可知，z 的最大值，最小值在直线与椭圆相切时取得，

联立方程$\begin{cases}y=3x+z\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1\end{cases}$，消去$y$得：$169x^2+96zx+16z^2-400=0$，

由$\triangle=0$得：$(96z)^2-4\times169\times(16z^2-400)=0$，

解得$z=\pm13$，

$\therefore z$的最大值为13，最小值为-13，

故答案为：13，-13．

题型三　转化为三角函数

利用椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的参数方程$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数）

以及双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的参数方程$\begin{cases}x=\frac{a}{\cos\theta},\\ y=b\tan\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数）等，

将椭圆和双曲线上的点的坐标用三角函数表示出来，再利用三角函数知识来求其最值．

3．设A、B分别是椭圆$C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$的左顶点和上顶点，点P在C上，则点P到直线AB的距离的最大值为(　　)

A．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

【解答】解：椭圆$C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$的焦点在y轴上，

$a^2=2$，$b^2=1$，可得$a=\sqrt{2}$，$b=1$．

$\therefore$椭圆的左顶点为$A(-1,0)$，上顶点为$B(0,\sqrt{2})$，

则AB所在直线方程为$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{2}}=1$，即$\sqrt{2}x-y+\sqrt{2}=0$．

$\because P$在椭圆$C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$上，$\therefore$设$P(\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，

$\therefore P$到直线AB的距离$d=\frac{|\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}$

$=\frac{|2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}$，

$\therefore$ 点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$.

故选： D .

4．过点 $B(0,-b)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的弦，求这些弦长的最大值.

【解答】设椭圆上任意一点 M 的坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$

则 $|BM|=\sqrt{(a\cos\alpha-0)^2+(b\sin\alpha-b)^2}$

$$=\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2\alpha-2b^2\sin\alpha+a^2+b^2}$$

$$=\sqrt{(b^2-a^2)(\sin\alpha-\frac{b^2}{b^2-a^2})^2+\frac{a^4}{a^2-b^2}}.$$

因为 a>b>0，所以 $b^2-a^2<0$

①当 $-1\le\frac{b^{\omega}}{b^2-a^2}<0$，即 $a\ge\sqrt{2}b$ 时，取 $\sin\alpha=\frac{b^{\omega}}{b^2-a^2}$，

得 $|BM|_{\max}=\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}}=\frac{a^2}{c}$

②当 $\frac{b^2}{b^2-a^2}<-1$，即 $b<a<\sqrt{2b}$ 时，取 $\sin\alpha=-1,$

得 $|BM|_{\max}=2b.$

题型四　利用基本不等式

5．函数 $y=a^{3-x}(a>0,a\ne1)$ 的图象恒过定点 A ，若点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$ 上，则 $m-n$ 的最大值为 (　　)

A．6　　B．4　　C．2　　D．1

【解答】解：由题意可知，函数 $y=a^{3-x}(a>0,a\ne1)$ 的图象恒过定点 $A(3,1)$ ，

又∵点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$ 上，

$\therefore\frac{9}{m}-\frac{1}{n}=1(m>0,n>0)$ ，

$(m-n)=(m-n)(\frac{9}{m}-\frac{1}{n})=10-(\frac{9n}{m}+\frac{m}{n})\le10-2\sqrt{\frac{9n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=4$ ，当且仅当 $\frac{9n}{m}=\frac{m}{n}$ 时，即 $n=2$ ，

$m=6$时，等号成立.

故选：B.

6. 设O为坐标原点，直线$x=a$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点，若$C$的焦距为12，则$\Delta OAB$面积的最大值为(　　)

A．72　　B．36　　C．18　　D．9

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

$\because C$的焦距为12，$\therefore 2c=12$，即$c=6$，

$\therefore a^2+b^2=c^2=36$，

$\because$直线$x=a$与双曲线C的两条渐近线分别交于A，B两点，

$\therefore$不妨取$A(a,b)$，$B\ (a,-b)$，

$\therefore\Delta OAB$面积$S=\frac{1}{2}a\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b=ab$，$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{36}{2}=18$，当且仅当$a=b=3\sqrt{2}$时，等号成立，

$\therefore\Delta OAB$面积的最大值为18.

故选：C.

7. 设O为坐标原点，点$A(1,0)$，动点P在抛物线$y^2=4x$上，且位于第一象限，M是线段PA的中点，则直线OM的斜率的取值范围为(　　)

A．$(0，1]$　　B．$(0,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1，+\infty)$

【解答】解：设点P的坐标为$P(4m^2，4m)(m>0)$，

很明显直线的斜率为正数，

则：$M(2m^2+\frac{1}{2},2m),k_{OM}=\frac{2m}{2m^2+\frac{1}{2}}=\frac{4m}{4m^2+1}=\frac{4}{4m+\frac{1}{m}}$，$\frac{4}{2\sqrt{4m\times\frac{1}{m}}}=1$，

当且仅当$m=\frac{1}{2}$时等号成立

即直线OM的斜率的取值范围为$(0，1]$.

故选：A.

8．椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为椭圆$M$上任一点，且$|PF_1|\cdot|PF_2|$最大值取值范围为$[2c^2，3c^2]$（其中$c^2=a^2-b^2$），则椭圆$M$的离心率的取值范围是(　　)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/995111143331012003