

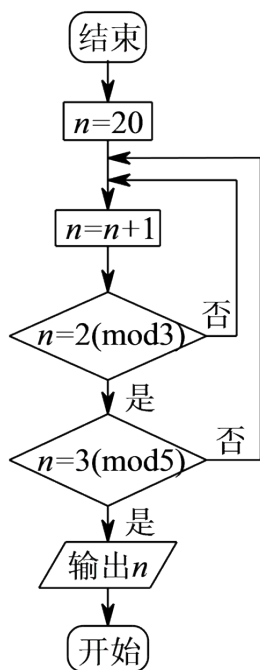
江西省南昌二中 2024 年下学期高三期末考试数学试题试卷试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 i 为虚数单位，则复数 $z = \frac{1+i}{1+2i}$ 在复平面上对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 某人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆，其轨道的离心率为 e ，设地球半径为 R ，该卫星近地点离地面的距离为 r ，则该卫星远地点离地面的距离为 ()
A. $\frac{1+e}{1-e}r + \frac{2e}{1-e}R$ B. $\frac{1+e}{1-e}r + \frac{e}{1-e}R$
C. $\frac{1-e}{1+e}r + \frac{2e}{1+e}R$ D. $\frac{1-e}{1+e}r + \frac{e}{1+e}R$
3. 已知三棱锥 $P-ABC$ ， $AC = \sqrt{2}$ ， $BC = 1$ ， $AC \perp BC$ 且 $PA = 2PB$ ， $PB \perp$ 平面 ABC ，其外接球体积为 ()
A. $\frac{4\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3}\pi$
4. 若函数 $f(x) = (x^2 - mx + 2)e^x$ ($e = 2.71828\ldots$ 为自然对数的底数) 在区间 $[1, 2]$ 上不是单调函数，则实数 m 的取值范围是 ()
A. $\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$ B. $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$ C. $\left[2, \frac{10}{3}\right]$ D. $\left(2, \frac{10}{3}\right)$
5. 中国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道算术题：“今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，问物几何？”人们把此类题目称为“中国剩余定理”，若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n ，则记为 $N = n(\text{mod } m)$ ，例如 $11 = 2(\text{mod } 3)$ 。现将该问题以程序框图的算法给出，执行该程序框图，则输出的 n 等于 ()。



- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

6. 设 x_1, x_2 为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x (\omega > 0)$ 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1, 则 $\omega =$ ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

7. 小王因上班繁忙, 来不及做午饭, 所以叫了外卖. 假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下, 则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 F_1, F_2 , 其中焦点 F_2 与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点重合, 且椭圆与抛物线的两个交点连线正好过点 F_2 , 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

9. 已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$, 那么 $\neg p$ 为 ()

- A. $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ B. $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$
C. $\exists x_0 \leq 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ D. $\forall x \leq 2, x^3 - 8 \leq 0$

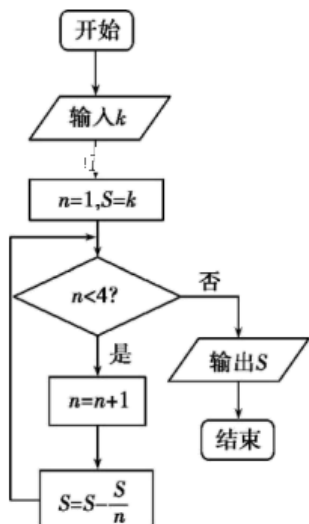
10. 已知变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $2x - y$ 的最小值为 ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 4

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x (\omega > 0)$, 对任意的 x_1, x_2 , 当 $f(x_1)f(x_2) = -12$ 时, $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则下列判断正确的是 ()

- A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增
- C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{6}$ D. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

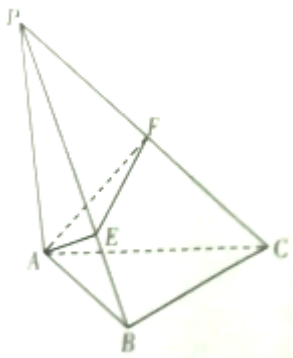
12. 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题: “今有器中米, 不知其数, 前人取半, 中人三分取一, 后人四分取一, 余米一斗五升(注 一斗为十升). 问, 米几何?” 下图是解决该问题的程序框图, 执行该程序框图, 若输出的 $S=15$ (单位: 升), 则输入的 k 的值为 ()



- A. 45 B. 60 C. 75 D. 100

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑, 如图, 在鳖臑 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, 且 $AP = AC = 4$, 过 A 点分别作 $AE \perp PB$ 于点 E , $AF \perp PC$ 于点 F , 连接 EF , 则三棱锥 $P-AEF$ 的体积的最大值为_____.



14. 已知函数 $f(x) = e^x(x+1)^2$, 令 $f_1(x) = f'(x)$, $f_{n+1}(x) = f'_n(x) (n \in \mathbb{N}^*)$, 若 $f_n(x) = e^x(a_n x^2 + b_n x + c_n)$, $[m]$

表示不超过实数 m 的最大整数, 记数列 $\left\{\frac{2a_n}{2c_n - b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $[3S_{2000}] = \underline{\hspace{2cm}}$

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{ex}{e^x}, & x \leq 2 \\ \frac{4x-8}{5x}, & x > 2 \end{cases}$, (其中 e 为自然对数的底数), 若关于 x 的方程 $f^2(x) - 3a|f(x)| + 2a^2 = 0$ 恰

有 5 个相异的实根, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如果椭圆的对称轴为坐标轴, 短轴的一个端点与两焦点组成一正三角形, 焦点在 x 轴上, 且 $a - c = \sqrt{3}$, 那么椭圆的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 2, \end{cases}$ (t 为参数), 在以坐标原点 O 为极

点, x 轴的正半轴为极轴, 且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程是

$$\rho = 4\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A, B , 求线段 AB 的长.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax \ln x + b$ (a, b 为实数) 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 求实数 a, b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{x}$, 证明 $g(x_1) = g(x_2) (x_1 < x_2)$ 时, $x_1 + x_2 > 2$.

19. (12 分) 若关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x + 5 - m = 0$ 的两根都大于 2, 求实数 m 的取值范围.

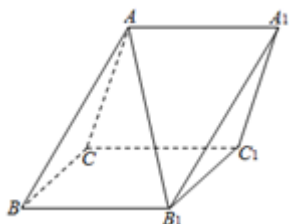
20. (12 分) a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边. 已知 $a(\sin A + 4\sin B) = 8\sin A$.

(1) 若 $b = 1, A = \frac{\pi}{6}$, 求 $\sin B$;

(2) 已知 $C = \frac{\pi}{3}$, 当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. (12 分) 如图, 在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ACC_1A_1 与侧面 CBB_1C_1 都是菱形,

$\angle ACC_1 = \angle CC_1B_1 = 60^\circ$, $AC = 2$.



(I) 求证: $AB_1 \perp CC_1$;

(II) 若 $AB_1 = \sqrt{6}$, 求平面 CAB_1 与平面 A_1AB_1 所成的锐二面角的余弦值.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(0, -1)$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = -1 + t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为

极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho + \rho\cos 2\theta = 8\sin\theta$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A, B , M 是线段 AB 的中点, 当 $|PM| = \frac{40}{9}$ 时, 求 $\sin\alpha$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据复数的运算, 化简得到 $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$, 再结合复数的表示, 即可求解, 得到答案.

【详解】

由题意, 根据复数的运算, 可得 $z = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$,

所对应的点为 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 位于第四象限.

故选 D .

【点睛】

本题主要考查了复数的运算, 以及复数的几何意义, 其中解答中熟记复数的运算法则, 准确化简复数为代数形式是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

2、A

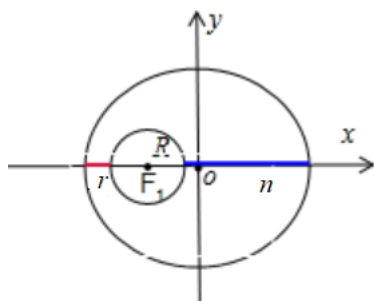
【解析】

由题意画出图形, 结合椭圆的定义, 结合椭圆的离心率, 求出椭圆的长半轴 a , 半焦距 c , 即可确定该卫星远地点离地面的距离.

【详解】

椭圆的离心率: $e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$, (c 为半焦距; a 为长半轴),

设卫星近地点, 远地点离地面距离分别为 r , n , 如图:



则 $n = a + c - R$, $r = a - c - R$

所以 $a = \frac{r+R}{1-e}$, $c = \frac{(r+R)e}{1-e}$,

$n = a + c - R = \frac{r+R}{1-e} + \frac{e(r+R)}{1-e} - R = \frac{1+e}{1-e}r + \frac{2e}{1-e}R$

故选: A

【点睛】

本题主要考查了椭圆的离心率的求法, 注意半焦距与长半轴的求法, 是解题的关键, 属于中档题.

3、A

【解析】

由 $AC \perp BC$, $PB \perp$ 平面 ABC , 可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成长方体, 则三棱锥 $P-ABC$

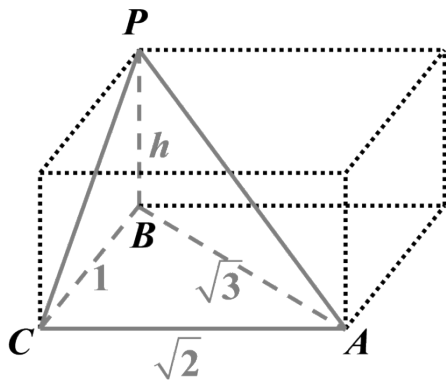
的外接球即为长方体的外接球,进而求解.

【详解】

由题,因为 $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AC \perp BC$, 所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3}$,

设 $PB = h$, 则由 $PA = 2PB$, 可得 $\sqrt{3 + h^2} = 2h$, 解得 $h = 1$,

可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成如图所示的长方体,



则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 设外接球的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$, 所以 $R = 1$,

所以外接球的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}$.

故选:A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球体积, 考查空间想象能力.

4、B

【解析】

求得 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 由此构造函数 $g(x) = x^2 + (2-m)x + 2-m$, 根据题意可知 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上有变号零点.

由此令 $g(x) = 0$, 利用分离常数法结合换元法, 求得 m 的取值范围.

【详解】

$$f'(x) = e^x [x^2 + (2-m)x + 2-m],$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 + (2-m)x + 2-m,$$

要使 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上不是单调函数,

即 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上有变号零点, 令 $g(x) = 0$,

$$\text{则 } x^2 + 2x + 2 = m(x+1),$$

令 $t = x+1 \in (2,3)$, 则问题即 $m = t + \frac{1}{t}$ 在 $t \in (2,3)$ 上有零点, 由于 $t + \frac{1}{t}$ 在 $(2,3)$ 上递增, 所以 m 的取值范围是

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right).$$

故选：B

【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查方程零点问题的求解策略，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

5、C

【解析】

从 21 开始，输出的数是除以 3 余 2，除以 5 余 3，满足条件的是 23，故选 C.

6、A

【解析】

先化简已知得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$, 再根据题意得出 $f(x)$ 的最小值正周期 T 为 1×2 , 再求出 ω 的值.

【详解】

由题得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$,

设 x_1, x_2 为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1,

$$\therefore \frac{T}{2} = 1, \text{ 解得 } T = 2;$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = 2,$$

解得 $\omega = \pi$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换和三角函数的图象与性质的应用问题, 是基础题.

7、C

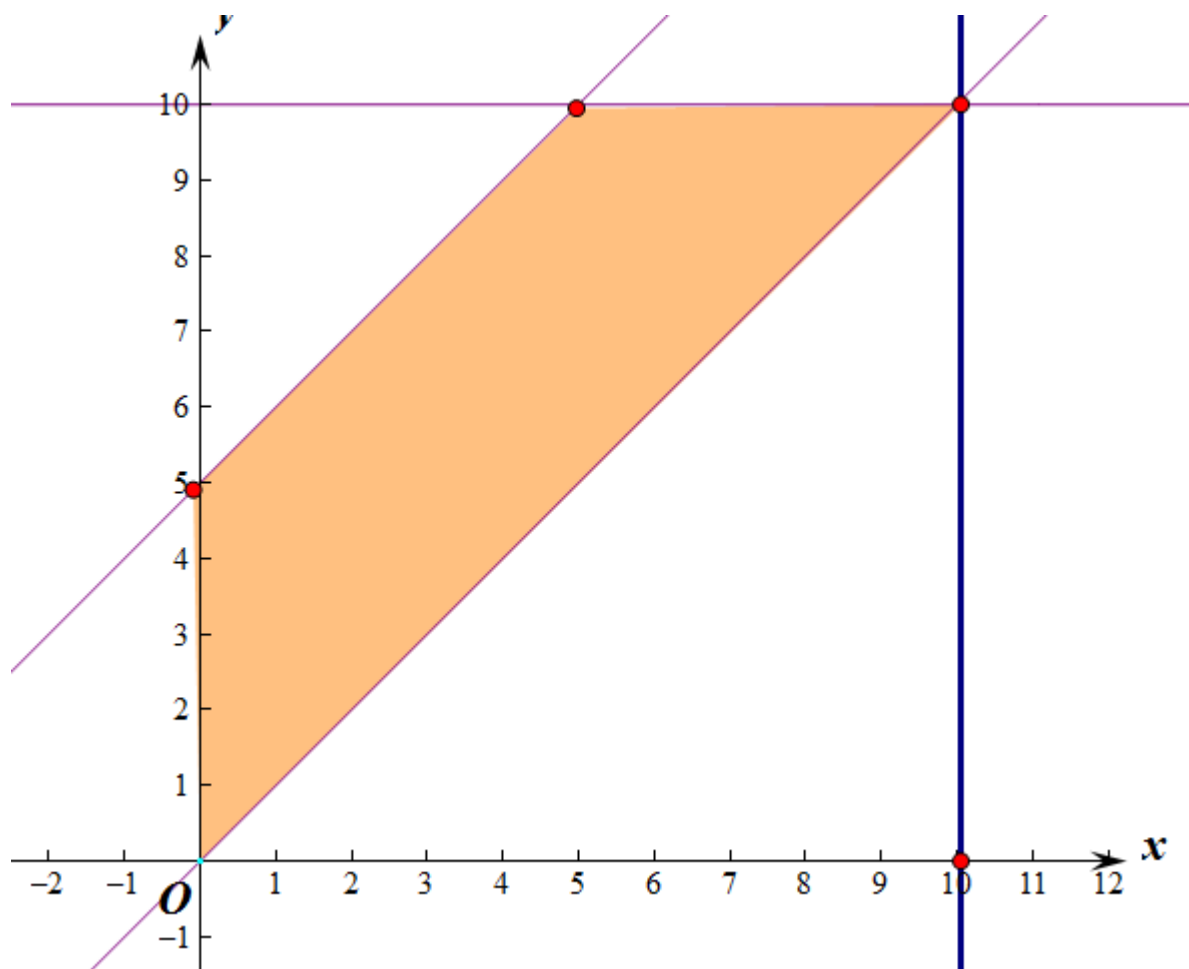
【解析】

设出两人到达小王的时间, 根据题意列出不等式组, 利用几何概型计算公式进行求解即可.

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y , 以 12:00 点为开始算起, 则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$, 在平面直角

坐标系内, 如图所示: 图中阴影部分表示该不等式组的所表示的平面区域,



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5}{10 \times 10} = \frac{3}{8}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力.

8、B

【解析】

根据题意可得易知 $c = \frac{p}{2}$ ，且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases}$ ，解方程可得 $\begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$ ，再利用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ 即可求解.

【详解】

$$\text{易知 } c = \frac{p}{2}, \text{ 且 } \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/995114222321012000>